

Шведов Олег Юрьевич

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник кафедры статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ). Лауреат премии Европейской Академии для молодых учёных СНГ и премии имени Н.Н. Боголюбова. Член методической комиссии и жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.



Загадка скорости звука

На рубеже XVII-XVIII веков Ньютон получил теоретическое предсказание для скорости звука в воздухе, но расхождение теории и эксперимента составило порядка 20 процентов. Только спустя столетие Лаплас разрешил данное противоречие, открыв одновременно важный способ измерения термодинамических свойств газов.

1. Задача о распространении звуковой волны

Можно ли теоретически, из первых принципов, рассчитать величину скорости звука? Через какие характеристики газа она выражается? Что можно узнать о газе, сравнив теоретический расчёт с экспериментальными данными?

В настоящее время такой теоретический расчёт проводят следующим образом:

- оценив по порядку величины характерные времена распространения звука и выравнивания температуры, устанавливают, что процессы в звуковой волне являются адиабатными;

- используя свойство адиабатности, на основе закона сохранения энергии получают уравнение адиабаты, согласно которому давление p является степенной функцией плотности ρ с показателем γ , равным отношению изobarной и изохорной теплоёмкостей газа

$$\gamma = C_p / C_v;$$

- записывают уравнения, вытекающие из определения плотности и второго закона Ньютона;

- решают полученную систему и находят скорость звука.

Скорость звука выражается через его давление, плотность и показатель адиабаты, который можно определить из сравнения теоретического значения скорости с опытом.

Однако такой способ решения задачи о распространении звука был возможен не всегда. Во времена Ньютона не только первое начало термодинамики, но даже понятие эмпирической температуры определено не было: первые температурные шкалы появились лишь в начале XVIII века. Поэтому не могло даже возникнуть представление об адиабатном процессе. Из всех газовых законов во времена Ньютона был известен только закон Бойля-Мариотта (давление газа пропорционально плотно-

сти), открытый в 1660-е годы, при этом условие применимости закона (постоянство температуры газа) сформулировано явным образом не было.

Поэтому Ньютон получил предсказание для скорости звука, отличающееся от экспериментальных данных примерно на 20 процентов. Долгое время это расхождение объяснить не удавалось. Только после того как Шарль и Гей-Люссак на рубеже XVIII-XIX веков исследовали зависимость свойств газов от температуры, оказалось возможным дать объяснение экспериментальным данным для скорости звука.

В 1816 году Лаплас высказал предположение о том, что в звуковой волне температура не остаётся постоянной, а также совершает колебания – нарушается закон Бойля-Мариотта. Если приближённо считать, что зависимость давления воздуха от его плотности в звуковой волне является степенной, то можно получить предсказание для скорости звука и определить из сравнения с экспериментальными данными показатель степени.

В это же время Дезорм и Клеман проводили опыты с адиабатными процессами в газах. Воспользовавшись результатами Дезорма и Клемана, Лаплас определил, какой степени плотности пропорционально давление в адиабатном процессе – зависимость давления газа от плотности в адиабатном процессе совпала с зависимостью давления от плотности в звуковой волне. Лаплас пришёл к выводу, что в звуковой волне процессы являются адиабатными.

Этот вывод Лапласа, установленный для воздуха, был обобщён на другие газы и лёг в основу наиболее точного метода определения показателей адиабаты газов на основе скорости звука в них.

Вскоре (в 1823 г.) Пуассон установил, что показатель адиабаты γ может

быть выражен через теплоёмкости $\gamma = C_p / C_v$. Поскольку экспериментально удавалось определить только изобарные теплоёмкости газов, соотношение Пуассона позволило на основе измерения скорости звука предсказывать изохорные теплоёмкости газов, что и привело в конечном итоге к открытию принципа эквивалентности теплоты и работы.

Перейдём к более подробному исследованию задачи о распространении звука. Рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся вдоль оси Ox , тогда каждый из слоёв воздуха смещается на своё расстояние ξ , зависящее от координаты x и времени t . Чтобы рассчитать скорость распространения волны, следует:

- выразить ускорение слоя воздуха через действующую на него силу, складывающуюся из сил давления на границы слоя;
- выразить давление воздуха через его плотность;
- выразить плотность через смещение слоёв воздуха.

Рассмотрим последовательно все эти подзадачи.



2. Ускорение слоёв воздуха и давление

Рассмотрим задачу о нахождении ускорений слоёв воздуха $a_x(x)$ по известной зависимости давления от координаты $p(x)$.

Задача 1. Найдите ускорение $a_x(x)$ слоя воздуха с координатой x . Зависимость давления воздуха от координаты считайте синусоидальной ($p = p_0 + A \cos \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \varphi_0 + kx$), а плотность воздуха ρ_0 – заданной.

Решение. Выделим в воздухе расположенную вдоль оси Ox «трубку» с площадью поперечного сечения S , а в ней – слой воздуха, лежащий между плоскостями с координатами x и $x + \Delta x$. Его масса $\Delta m = \rho_0 S \cdot \Delta x$; слева действует сила давления $p(x)S$, справа – сила давления $p(x + \Delta x)S$, равнодействующая сил $\Delta F = -\Delta p \cdot S$ выражается через разность давлений $\Delta p = p(x + \Delta x) - p(x)$,

которую можно рассчитать в каждом из случаев. Согласно второму закону Ньютона, ускорение слоя воздуха равно $a_x = \frac{\Delta F}{\Delta m} = -\frac{\Delta p \cdot S}{\rho_0 S \Delta x} = -\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta x}$.

Обозначим через $\Delta \varphi = k \cdot \Delta x$ разность фаз в точках $x + \Delta x$ и x ; тогда

$$\begin{aligned} \Delta p &= A \cos(\varphi + \Delta \varphi) - A \cos \varphi = \\ &= A \cos \varphi (\cos \Delta \varphi - 1) - A \sin \varphi \sin \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Воспользуемся приближёнными формулами

$$\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi,$$

$\cos \Delta \varphi = 1 - 2 \cdot \sin^2(\Delta \varphi / 2) \approx 1 - (\Delta \varphi)^2 / 2$, справедливыми при малых $\Delta \varphi$, и пренебрежём квадратичным по Δx слагаемым, тогда

$$\Delta p = -A \Delta \varphi \sin \varphi = -A k \sin \varphi \cdot \Delta x.$$

Отсюда $a_x = \frac{A k}{\rho_0} \sin \varphi$.

3. Плотность воздуха и смещение его слоёв

Рассмотрим задачу о расчёте плотности воздуха $\rho(x)$ по известной зависимости $\xi(x)$ смещений слоёв воздуха от координаты. Будем предполагать смещения слоёв достаточно малыми.

Задача 2. При прохождении звуковой волны слой воздуха с координатой x смещается на малое расстояние $\xi(x)$. Найдите зависимость плотности воздуха $\rho(x)$ от координаты. Плотность воздуха в невозмущённом состоянии равна ρ_0 . Зависимость $\xi(x)$ считайте синусоидальной:

$$\xi(x) = B \cdot \sin \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \varphi_0 + kx.$$

Решение. При прохождении звуковой волны изображённый на рис. 1 слой воздуха изменяет свой объём.

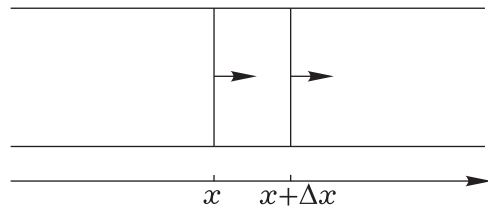


Рис. 1

Обозначим через φ и $\varphi + \Delta \varphi$ фазы колебаний на границах слоя, тогда они смещаются на расстояния $B \sin \varphi$ и $B \sin(\varphi + \Delta \varphi)$ соответственно. Поскольку разность фаз равна $\Delta \varphi = k \Delta x$, толщина слоя изменяется на величину $B \sin(\varphi + \Delta \varphi) - B \sin \varphi = B \sin \varphi (\cos \Delta \varphi - 1) + B \cos \varphi \sin \Delta \varphi \approx B \cos \varphi \cdot \Delta \varphi = B \cos \varphi \cdot k \Delta x$,

или в $(1+Bk\cos\varphi)$ раз. Учитывая, что $Bk \ll 1$, получим, что плотность воздуха изменится в $(1+Bk\cos\varphi)^{-1} \approx \approx (1-Bk\cos\varphi)$ раз. Следовательно,

$$\rho = \rho_0(1-Bk\cos\varphi).$$

Замечание. В общем (несинусоидальном) случае ответ задачи 2 обобщается следующим образом:

$$\rho = \rho_0(1-\Delta\xi/\Delta x).$$

4. Давление воздуха и его плотность в модели Ньютона

Ньютон дополнил рассмотренные уравнения законом Бойля-Мариотта, согласно которому давление воздуха пропорционально плотности. Таким образом, система уравнений Ньютона состоит из следующих соотношений:

$$1. a_x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{\Delta x} \text{ (задача 1);}$$

$$2. \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \text{ (задача 2);}$$

$$3. \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ (закон Бойля-Мариотта);}$$

та; p_0 и ρ_0 – давление и плотность в невозмущённом состоянии).

Рассмотрим важный пример решения данной системы – синусоидальную звуковую волну.

5. Синусоидальные звуковые волны

Задача 3. При каком соотношении между волновым числом k и круговой частотой ω функция

$$\xi(x, t) = B \sin(kx - \omega t)$$

удовлетворяет системе уравнений Ньютона?

Решение. Для краткости обозначим $\varphi(x, t) = kx - \omega t$. Согласно задаче 2, в рассматриваемом случае плотность воздуха равна

$$\rho = \rho_0(1-Bk\cos\varphi).$$

Давление выражается из закона Бойля-Мариотта:

$$p = p_0 \cdot \rho / \rho_0 = p_0(1-Bk\cos\varphi).$$

Согласно задаче 1, ускорение слоя с координатой x в момент времени t

$$\text{равно } a_x = -\frac{p_0}{\rho_0} B k^2 \sin\varphi = -\frac{p_0}{\rho_0} k^2 \xi.$$

С другой стороны, каждый из слоёв совершает гармонические колебания с круговой частотой ω , поэтому ускорение слоя связано с его смещением соотношением $a_x = -\omega^2 \xi$.

Сравнивая соотношения для a_x ,

$$\text{находим: } \omega = k \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Поскольку круговая частота, волновое число и скорость распространения волны связаны соотношением $\omega = kc$, приходим вслед за Ньютоном к выводу, что звуковая волна распространяется со скоростью $c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$.

Задача 4. Получите численное значение предсказанной Ньютоном скорости звука, используя экспериментальные данные для давления и плотности воздуха при нормальных условиях $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 1,3$ кг/м³.

Ответ. Расчёт даёт $c = 280$ м/с.

Таким образом, предсказанное Ньютоном значение оказалось примерно на 20 процентов меньше наблюдаемой на опыте скорости звука $c \approx 330$ м/с. В течение столетия расхождение теории и эксперимента объяснить не удавалось.

6. Разгадка тайны скорости звука Лапласом

Вспользуемся теперь вместо закона Бойля-Мариотта более общим соотношением Лапласа, согласно которому в звуковой волне давление воздуха является степенной функцией плотности: $p/\rho^\gamma = \text{const}$.

Задача 5. Определите скорость звука, используя вместо закона Бойля-Мариотта соотношение

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma.$$

Решение. Как и в задаче 3, рассмотрим синусоидальную волну $\xi(x,t) = B \sin \varphi$, где $\varphi = kx - \omega t$. Тогда $\rho = \rho_0(1 - Bk \cos \varphi)$, а давление выражается более сложной формулой $p = p_0(1 - Bk \cos \varphi)^\gamma$. Вспользуемся приближённой формулой

$$(1 + \varepsilon)^\gamma = 1 + \gamma \varepsilon,$$

справедливой при малых ε ; тогда $p = p_0(1 - \gamma Bk \cos \varphi)$. Согласно задаче 1, ускорение слоя с координатой x в момент времени t равно

$$a_x = -\frac{p_0}{\rho_0} \gamma k^2 \xi.$$

С другой стороны, $a_x = -\omega^2 \xi$. Сравнивая соотношения для a_x , находим:

$$\omega = k \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \text{ Отсюда скорость звука}$$

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Задача 6. Найдите числовое значение показателя γ , при котором получается правильное экспериментальное значение скорости звука.

Ответ. $\gamma \approx 1,4$.

7. Подтверждение зависимости давления воздуха от плотности в адиабатном процессе

Основываясь на экспериментальных данных Дезорма и Клемана (1816), покажем, что зависимость давления воздуха от его плотности в адиабатном процессе такая же, как и в звуковой волне.

Задача 7. В опыте Дезорма и Клемана над воздухом проводился адиабатный процесс, в котором давление изменялось от $p = 752,69$ мм рт.ст. до $p + \Delta p = 766,5$ мм рт.ст., а его температура — от $12,5^\circ \text{C}$ до $13,85^\circ \text{C}$. Считая, что $p \sim \rho^\gamma$, определите отсюда показатель адиабаты γ для воздуха. По данным того времени, абсолютный ноль соответствовал примерно -270°C .

Решение. Комбинируя известный со времён Ньютона закон Бойля-Мариотта и известный во времена Лапласа закон Гей-Люссака, находим, что температура газа, отсчитываемая

от абсолютного нуля, пропорциональна отношению давления к плотности: $T \sim p/\rho$. Поскольку в адиабатном процессе $\rho \sim p^{1/\gamma}$, находим: $T \sim p^{1-1/\gamma}$. Следовательно,

$$\frac{T + \Delta T}{T} = \left(\frac{p + \Delta p}{p} \right)^{1-1/\gamma} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p} \right)^{1-1/\gamma} \approx 1 + (1-1/\gamma) \frac{\Delta p}{p}.$$

(здесь использована приближённая формула $(1 + \varepsilon)^\lambda \approx 1 + \lambda \varepsilon$, справедливая при малых ε). Отсюда $\frac{\Delta T}{T} = (1-1/\gamma) \frac{\Delta p}{p}$. При указанных в условии численных значениях

$$\Delta T/T = 4,8 \cdot 10^{-3}, \Delta p/p = 1,8 \cdot 10^{-2}.$$

Следовательно, $\gamma = 1,37 \approx 1,4$.