

Иванов Анатолий Ефимович
Кандидат технических наук,
доцент кафедры «Основы физики»
МГТУ имени Н.Э. Баумана.



Иванов Сергей Анатольевич
Глава представительства японской фирмы
«Interactive Corporation».

Задачи на законы изменения и сохранения импульса и механической энергии

1. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна $\upsilon_0 = 200$ м/с. В точке максимального подъёма снаряд разорвался на два одинаковых по массе осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела со скоростью $u = 250$ м/с. Через какое время после этого упадёт на землю второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Из закона сохранения энергии найдём максимальную высоту подъёма снаряда (рис.1):

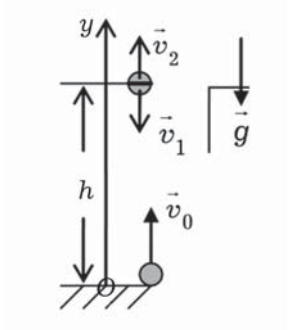


Рис. 1

$$\frac{M\upsilon_0^2}{2} = Mgh \Rightarrow h = \frac{\upsilon_0^2}{2g}, \qquad (1)$$

где M – масса снаряда, h – максимальная высота подъёма снаряда.

Скорость снаряда в верхней точке траектории равна нулю, поэтому из закона сохранения импульса, записанного в проекции на ось Oy :

$$0 = -m\upsilon_1 + m\upsilon_2, \qquad (2)$$

где m – масса каждого из двух осколков, υ_1, υ_2 – скорости первого и второго осколков. Из (2) следует, что модули начальных скоростей осколков соответственно равны:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon. \qquad (*)$$

Из закона сохранения энергии следует, что скорости осколков перед самым падением на землю также равны:

$$mgh + \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mu^2}{2}. \qquad (3)$$

Из (3) следует:

$$\upsilon = \sqrt{u^2 - 2gh}.$$

Времена падения найдём из уравнений кинематики для скоростей в проекции на ось Oy с учётом начальных и граничных условий:

$$-u = -\upsilon_1 - gt_1, \qquad (4)$$

$$-u = v_2 - gt_2. \qquad (5)$$

Решение системы уравнений (1) – (5) относительно искомого $t_2 - t_1$:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{u^2 - v_0^2}}{g} = 30{,}6\,\text{с}.$$

Ответ.

$$t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{u^2 - v_0^2}}{g} = 30{,}6\ \text{с}.$$

2. На идеально гладком горизонтальном столе лежит квадратная рамка массы M. Внутри рамки начинает двигаться шарик массы m со скоростью υ_0, направленной вдоль линии, соединяющей середины смежных сторон рамки. Определите, на сколько уменьшится кинетическая энергия шарика после двух ударов его о рамку. Удары считать абсолютно упругими.

Решение. *Первое соударение.* Так как нет внешних сил и сил внутренних диссипативных (сил трения) и соударение абсолютно упругое, то этим явлением управляют законы сохранения импульса и энергии. Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси координат (рис. 1) (система координат связана с Землёй):

$$m\upsilon_0 \cos\alpha = -m\upsilon_0' \cos\alpha + Mu_x, \qquad (1)$$

$$m\upsilon_0 \sin\alpha = m\upsilon_0' \sin\alpha + Mu_y. \qquad (2)$$

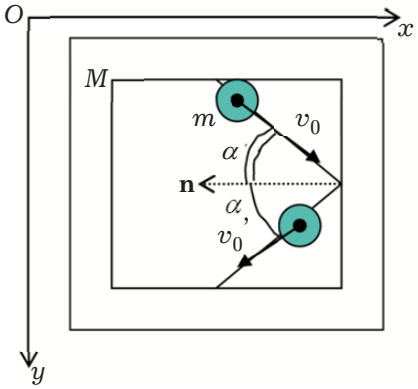


Рис. 2

Закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon_0'^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \qquad (3)$$

Здесь v_0', u – скорости шарика и рамки после соударения, u_x, u_y – проекции скорости рамки после соударения, $\alpha = 45^\circ$.

Уравнения (1) и (2) представим в виде

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(\upsilon_0 + \upsilon_0') = Mu_x, \qquad (1^*)$$

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(\upsilon_0 - \upsilon_0') = Mu_y. \qquad (2^*)$$

Возведя в квадрат обе части (1*) и (2*) и затем сложив их, получим

$$v_0^2 + v_0'^2 = \frac{M^2}{m^2}u^2. \qquad (*)$$

Решив совместно (3) и (*), (1*) и (2*), найдем υ_0', u_x и u_y:

$$\upsilon_0' = \upsilon_0\sqrt{\frac{M-m}{M+m}}, \qquad (4)$$

$$u_x = \frac{m\upsilon_0}{M\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\right), \qquad (5)$$

$$u_y = \frac{m\upsilon_0}{M\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}\right). \qquad (6)$$

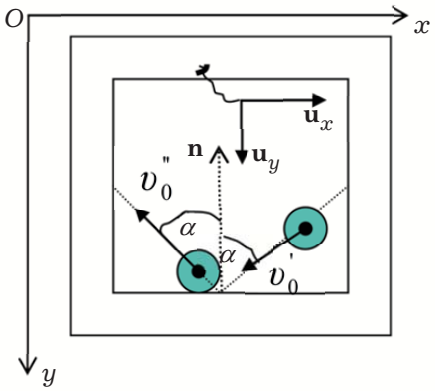


Рис. 3

Второе соударение. Закон сохранения импульса в проекциях на оси координат:

$$-m\upsilon_0'\cos\alpha + Mu_x = -m\upsilon_0''\cos\alpha + Mu_x', \quad (7)$$

$$m\upsilon_0'\sin\alpha + Mu_y = -m\upsilon_0''\sin\alpha + Mu_y'. \quad (8)$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m\upsilon_0'^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{m\upsilon_0''^2}{2} + \frac{Mu'^2}{2}. \quad (9)$$

Здесь двумя штрихами в верхнем индексе обозначены скорости после второго соударения.

Подставляя в (7) и (8) в (4) – (6), получим

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(\upsilon_0 + \upsilon_0'') = Mu_x', \quad (7^*)$$

$$\frac{m}{\sqrt{2}}(\upsilon_0 + \upsilon_0'') = Mu_y'. \quad (8^*)$$

Возведя последние уравнения в квадрат, затем складывая их и решая совместно с (9), получим квадратное уравнение в приведенной форме относительно υ_0'':

$$\upsilon_0''^2 + \frac{2m\upsilon_0}{M+m}\upsilon_0'' - \frac{M-m}{M+m}\upsilon_0^2 = 0.$$

$$\upsilon_0'' = \frac{M-m}{M+m}\upsilon_0.$$

Искомое уменьшение кинетической энергии шарика после двух ударов его о рамку

$$\Delta E_к = \frac{m}{2}(\upsilon_0^2 - \upsilon_0''^2) = \frac{2m^2M}{(M+m)^2}\upsilon_0^2.$$

Ответ. $\Delta E_к = \dfrac{2m^2M}{(M+m)^2}\upsilon_0^2$.

3. На гладком горизонтальном столе лежат гладкие шарики массой m и $2m$, связанные натянутой нитью длиной l. Третий шарик массой m налетает на шарик массой m со скоростью $\vec{v}_1$, направленной перпендикулярно нити. Найдите натяжение нити T и ускорение шарика массой m. Массой нити пренебречь. Столкновение шариков абсолютно упругое.

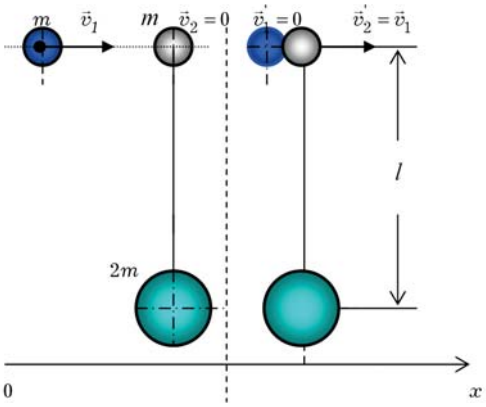


Рис. 4

Решение. Так как время столкновения шариков очень мало, то выполняются законы сохранения импульса и механической энергии.

Закон сохранения импульса в проекции на ось Ox:

$$m\upsilon_1 = m\upsilon_1' + m\upsilon_2'. \quad (1)$$

Закон сохранения механической энергии

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m\upsilon_2'^2}{2}. \quad (2)$$

Здесь штрихом $'$ обозначены скорости шариков после столкновения.

Решение системы уравнений (1) – (2) относительно двух неизвестных υ_1' и υ_2':

$$\upsilon_1' = 0, \quad (3)$$

$$\upsilon_2' = \upsilon_1. \quad (4)$$

В результате абсолютно упругого столкновения шарики обменялись скоростями.

Рассмотрим движение двух связанных нитью шариков после абсолютно упругого столкновения верхнего шарика. Найдём ординату центра масс, связав ось Oy с нижним шариком:

$$y_C = \frac{ml + 2m \cdot 0}{m + 2m} = \frac{l}{3}. \qquad (5)$$

Скорость центра масс в проекции на ось Ox:

$$\upsilon_C = \frac{m\upsilon_1 + 2m \cdot 0}{m + 2m} = \frac{\upsilon_1}{3}. \qquad (6)$$

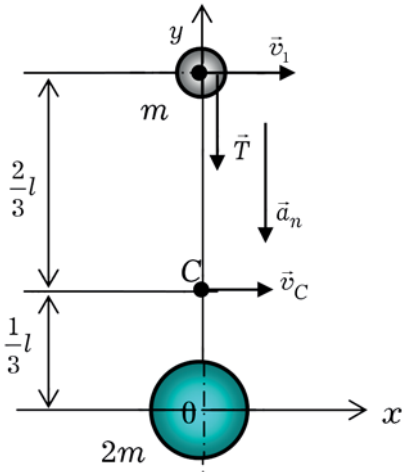


Рис. 5

Центр масс (точка C) движется прямолинейно со скоростью $\upsilon_1/3$ и относительно него шарики движутся по окружности с угловой скоростью ω, которую найдём, учитывая закон сложения скоростей для верхнего шарика в проекции на ось Ox:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{1отн} + \upsilon_1/3, \qquad (7)$$

$$\omega = \frac{\upsilon_{1отн}}{2l/3} = \frac{\upsilon_1}{l}. \qquad (8)$$

Натяжение нити

$$T = ma_n = \frac{2m\upsilon_1^2}{3l}. \qquad (9)$$

Таким получается натяжение нити в момент удара, и далее оно остаётся постоянным.

Ускорение шарика массой $2m$:

$$a_n = \frac{T}{2m} = \frac{\upsilon_1^2}{3l}.$$

Ответ: $T = \frac{2m\upsilon_1^2}{3l}$, $a_n = \frac{\upsilon_1^2}{3l}$

4. На гладкой горизонтальной плоскости находится брусок массой M, на нём небольшая шайба массой m. Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость v.

На какую высоту h (по сравнению с первоначальным горизонтальным уровнем) поднимется шайба после отрыва её от бруска массой M (рис. 6)? Трение между шайбой и бруском отсутствует.

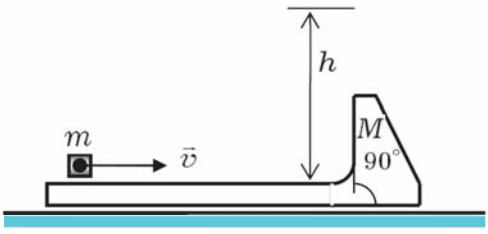


Рис. 6

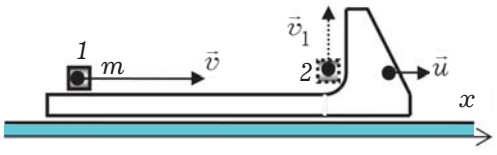


Рис. 7

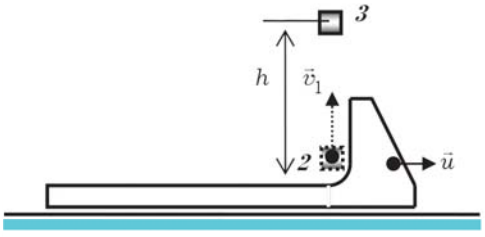


Рис. 8

Решение. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекции на ось x для положений системы ***1*** и ***2*** (рис. 7):

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{(m+M)u^2}{2}, \qquad (1)$$

$$mv=(m+M)u. \qquad (2)$$

Далее запишем закон сохранения энергии для шайбы (для её двух положений ***2*** и ***3*** (рис. 8)):

$$\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mu^2}{2}=mgh+\frac{mu^2}{2}. \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (1) – (3) относительно искомой величины h:

$$\text{из (3) } h=\frac{v_1^2}{2g},\ \text{из (2) } u=\frac{mv}{m+M}.$$

Подставляя последнее соотношение в (1), получаем

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{(m+M)m^2v^2}{2\cdot(m+M)^2} \Rightarrow$$

$$v_1^2=v^2-\frac{v^2}{m+M}=\frac{v^2(m+M-m)}{m+M}=\frac{Mv^2}{m+M}.$$

$$h=\frac{Mv^2}{2g(m+M)}.$$

Ответ. $h=\dfrac{Mv^2}{2g(m+M)}$ м.

5. На трёхгранную призму падает сверху шарик массой $m=0{,}1$ кг, имеющий перед самым соударением скорость $v=20$ м/с (см. рис. 9). Определите скорость призмы u сразу после абсолютно упругого соударения и зеркального отражения от неё шарика. Масса призмы M = 0,5 кг, её наклонная плоскость составляет угол $\alpha=60^\circ$ с горизонтальной плоскостью. Трением пренебречь.

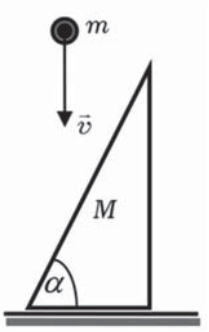


Рис. 9

Решение. Закон сохранения импульса в проекции на ось x (рис.10):

$$0=-p_2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+Mu, \qquad (6)$$

где в соответствии

$$p_2=p_1=mv. \qquad (**)$$

Решение системы уравнений (1) и (2) относительно искомой неизвестной u:

$$u=\frac{m}{M}v\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{M}v\cdot\cos\frac{60^\circ}{2}=\frac{m}{M}v\sin 60^\circ.$$

Ответ. $u=\dfrac{m}{M}v\sin\alpha=3{,}46$ м / с.

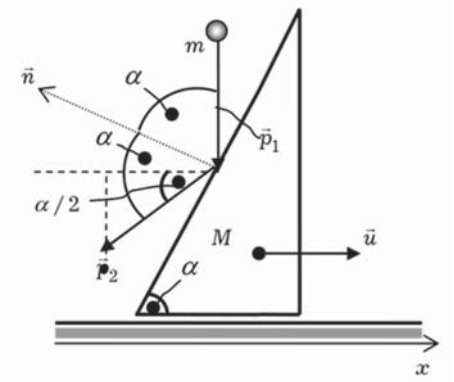


Рис. 10

9. Шарик *1* массой m = 200 г движется со скоростью $v_1=10$ м/с. Навстречу ему движется такой же массы шарик со скоростью $v_2=8$ м/с. После соударения шарик *1* начал двигаться перпендикулярно направлению его движения до соударения со

скоростью $\upsilon_1' = 5$ м/с. Какое количество тепла Q выделилось при соударении шариков?

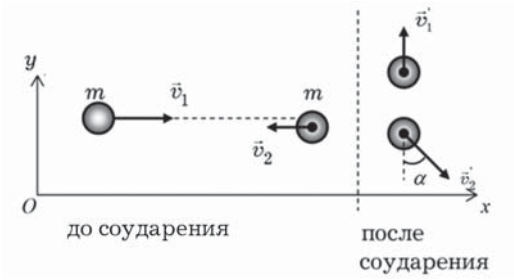


Рис. 11

Решение. Закон сохранения импульса в проекциях на оси координат:

$$m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = m\upsilon_2' \sin\alpha, \qquad (1)$$

$$0 = m\upsilon_1' - m\upsilon_2' \cos\alpha. \qquad (2)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} = \frac{m\upsilon_2'^2}{2} + \frac{m\upsilon_2'^2}{2} + Q. \qquad (3)$$

Решение системы уравнений (1) – (3) относительно искомой неизвестной Q: из (2) $\upsilon_2' = \dfrac{\upsilon_1'}{\cos\alpha}$ (*);

$$\text{из (1)} \quad 1 - \cos^2\alpha = \frac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_2'^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_2} \qquad (**);$$

подставляя (**) в (*), получаем выражение для υ_2'

$$\upsilon_2' = \frac{\upsilon_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_2'^2}}}.$$

Подставляя это значение υ_2' в (3), находим искомое Q:

$$Q = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1'^2}{2} - \frac{m}{2} \cdot \frac{\upsilon_1'^2}{1 - \dfrac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_1'^2}} =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - \upsilon_1'^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1 - \dfrac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_1'^2}}\right)}\right) = 10{,}9 \text{Дж}.$$

Ответ.

$$Q = \frac{m}{2}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - \upsilon_1'^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{1 - \dfrac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{\upsilon_1'^2}}\right)}\right) = 10{,}9 \text{Дж}$$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

***

– Известно, что появление дробей сопровождалось необычайно широким их использованием.

– Где это?

– В 3/9 царстве, в 3/10 государстве.

***

– Доверяете ли вы «доллару» и «евро»?

– Да, но чувствую их недоверие ко мне.

***

– Как изменяется долгота дня в течение года и почему?

– Летом дни длинные, а зимой короткие, потому что летом жарко, и они удлиняются, а зимой холодно, и они укорачиваются.