

Ольхова Зинаида Тадеевна

Преподаватель физики в лицее научно-инженерного профиля (МОУ ЛНИП) г. Королёва Московской обл. и в учебном центре «Ориентир» при МГТУ им. Н.Э. Баумана. Награждена почётной грамотой Министерства просвещения РСФСР (1989 г.).

Вода и лёд

В статье предлагается алгоритм решения таких калориметрических задач, в которых конечное фазовое состояние системы не определено. На конкретных примерах показано применение этого алгоритма. Задачи повышенной сложности отмечены звёздочкой.

1. Введение

Калориметрические задачи, в которых рассматривается теплообмен между различными компонентами смеси с возможным изменением фазы вещества, занимают, пожалуй, особое место в термодинамике. С одинаковым успехом они предлагаются восьмиклассникам, десятиклассникам и выпускникам школы. Решение задач этого типа в общем виде не всегда целесообразно, а иногда и невозможно, так как конечное состояние системы чаще всего изначально не определено.

Например, после помещения в калориметр воды и льда и установления теплового равновесия в калориметре может быть вода, лёд или смесь воды и льда. Результат зависит от начальных значений масс и температур воды и льда, заданных в условии задачи. В связи с этим не следует торопиться составлять уравнение теплового баланса. Если конечное состояние системы в задаче заранее не очевидно, то для решения требуется некоторая последовательность действий, т. е. алгоритм.

2. Алгоритм решения для воды и льда

Пусть в теплоизолированный сосуд, содержащий воду, помещён лёд. Задача состоит в нахождении температуры и массового состава содержимого калориметра по окончании теплообмена. Хороший результат даёт использование предлагаемого ниже алгоритма при решении задач этого типа. Примечательно, что каждый следующий шаг в решении задачи с применением этого алгоритма зависит от численных ре-

зультатов в предыдущих шагах.

Для определённости введём следующие обозначения: m_1 – масса воды, t_1 – начальная температура воды, c_v – удельная теплоёмкость воды; m_2 – масса льда, t_2 – начальная температура льда, c_l – удельная теплоёмкость льда, λ – удельная теплота плавления льда.

Алгоритм

1. Рассчитываем численно количество теплоты, которое может отдать вода, остывая от температуры t_1 до 0°C :

$$Q_1 = c_v m_1 (t_1 - 0).$$

2. Рассчитываем численно количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_2 до температуры плавления (0°C):

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_2 (0 - t_2).$$

3. Сравниваем Q_1 и Q_2 :

а) если $Q_1 > Q_2$, лёд будет таять;

б) если $Q_1 < Q_2$, вода будет замерзать.

4. Рассчитываем максимальную массу льда, которая может растаять из-за разности $Q_1 - Q_2$ (максимальную массу воды, которая может замёрзнуть из-за разности $Q_2 - Q_1$):

$$m = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \quad \left(m = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \right).$$

3. Примеры решения задач с водой и льдом

Рассмотрим несколько конкретных примеров. Во всех рассмотренных ниже задачах (кроме первой) конечное состояние системы не очевидно и потребуются применение алгоритма. Справочные данные для воды и льда считаем известными: $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ – удельная теплоёмкость воды, $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$ – удельная теплоёмкость льда, $\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}$ – удельная теплота плавления льда.

Задача 1. В калориметр с водой бросают кусочки тающего льда. В некоторый момент кусочки льда перестают таять. Первоначальная масса воды в сосуде 330 г, а в конце процесса таяния масса воды увеличилась на 84 г. Чему равна начальная температура

5. Если $m < m_2$ (если $m < m_1$), лёд не весь растает (вода не вся замёрзнет).

В этом случае в калориметре останется смесь воды и льда при температуре $\theta = 0^\circ\text{C}$. Находим численно массовый состав содержимого калориметра.

6. Если $m > m_2$ (если $m > m_1$), лёд растает полностью и установится температура $\theta > 0$ (вода замёрзнет вся и установится температура $\theta < 0$). В калориметре будет только вода массой $m_1 + m_2$ (только лёд массой $m_1 + m_2$). Находим численно массу воды (льда).

7. Если установившаяся температура ещё не найдена, то, имея полученные сведения о составе содержимого калориметра, находим значение установившейся температуры, используя уравнение теплового баланса. Иногда можно использовать и уже найденные численные значения количеств теплоты.

тура воды в калориметре? Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. В задаче $m_1 = 330 \text{ г}$, $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$, $m_2 = 84 \text{ г}$, $t_2 = 0^\circ\text{C}$, $\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}$. Кусочки льда перестали таять, когда смесь воды и льда оказалась в тепловом равновесии, т. е. установилась температура $\theta = 0^\circ\text{C}$. Количество теплоты, которое отдала вода, остывая от температуры t_1 до 0°C ,

$$Q_1 = c_v m_1 (t_1 - 0).$$

Количество теплоты, которое получил лёд в процессе плавления при 0°C ,

$$Q_2 = \lambda m_2.$$

Конечное состояние системы извест-

но, поэтому сразу можно воспользоваться уравнением теплового баланса:

$$c_B m_1 (t_1 - 0) = \lambda m_2.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{\lambda \cdot m_2}{c_B m_1}; \quad t_1 = 20^\circ \text{C}.$$

В данном случае применение алгоритма не потребовалось.

Для наглядности можно изображать происходящие в калориметре процессы на качественном уровне графически, откладывая температу-

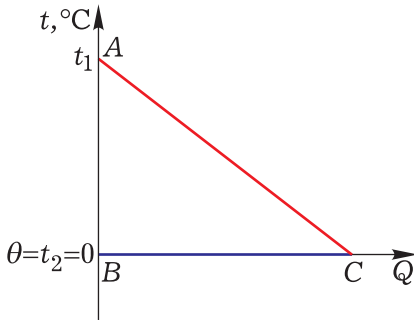


Рис. 1

ру вдоль оси ординат, а количество теплоты (полученное или отданное) – вдоль оси абсцисс. Каждому процессу соответствует определённый участок графика. Для рассмотренной задачи на рис. 1:

AC – охлаждение воды;

BC – плавление льда.

Ответ: начальная температура воды 20°C .

Задача 2. В калориметр, содержащий 1,5 кг воды при 20°C , положили 1 кг льда при -10°C . Какая температура установится в калориметре? Определить массовый состав содержимого калориметра после наступления теплового равновесия. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. Имеем

$$m_1 = 1,5 \text{ кг}, \quad t_1 = 20^\circ \text{C},$$

$$c_B = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K}), \quad m_2 = 1 \text{ кг},$$

$$t_2 = -10^\circ \text{C}, \quad c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K}),$$

$$\lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}.$$

Количество теплоты, которое может отдать вода, остывая от температуры t_1 до 0°C ,

$$Q_1 = c_B m_1 (t_1 - 0) = 126000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_2 до температуры плавления 0°C ,

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_2 (0 - t_2) = 21000 \text{ Дж}.$$

Получилось $Q_1 > Q_2$, значит, лёд будет таять. Максимальная масса льда, который может растаять из-за разности $Q_1 - Q_2$,

$$m = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \approx 0,32 \text{ кг}.$$

Как видим, $m < m_2$, то есть лёд растает не весь и в калориметре будет смесь льда массой $m_{2\text{к}} = m_2 - m = 0,68 \text{ кг}$ и воды массой $m_{1\text{к}} = m_1 + m = 1,82 \text{ кг}$ при 0°C . Установившаяся температура в калориметре $\theta = 0^\circ \text{C}$. График на рис. 2 соответствует происходящим процессам:

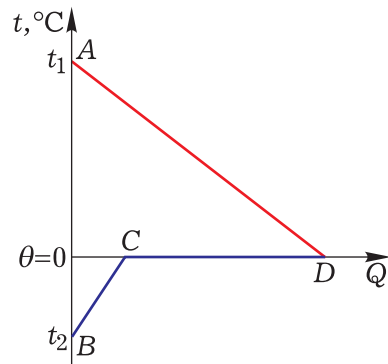


Рис. 2

AD – охлаждение всей воды;

BC – нагревание всего льда;

CD – плавление части льда.

Ответ: 0,68 кг льда и 1,82 кг воды при 0°C .

Задача 3. В калориметр налили 2 кг воды при температуре 5°C и положили кусок льда массой 5 кг при температуре -40°C . Определите температуру и массовый состав содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь.

Решение. В задаче $m_1 = 2$ кг, $t_1 = 5^\circ\text{C}$, $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·К), $m_2 = 5$ кг, $t_2 = -40^\circ\text{C}$,

$$c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$\lambda = 330$ кДж/кг. Количество теплоты, которое может отдать вода, остывая от температуры t_1 до 0°C ,

$$Q_1 = c_{\text{в}} m_1 (t_1 - 0) = 42000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_2 до температуры плавления 0°C ,

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_2 (0 - t_2) = 420000 \text{ Дж}.$$

Получилось $Q_1 < Q_2$, значит, вода будет отвердевать. Максимальная масса воды, которая может замёрзнуть из-за разности $Q_2 - Q_1$,

$$m = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \approx 1,15 \text{ кг}.$$

В данном случае $m < m_1$, т. е. вода отвердеет не вся и в калориметре будет смесь льда массой

$$m_{2\text{к}} = m_2 + m = 6,15 \text{ кг}$$

и воды массой

$$m_{1\text{к}} = m_1 - m = 0,85 \text{ кг}$$

при установившейся температуре $\theta = 0^\circ\text{C}$.

Процессам в калориметре соот-

ветствует график на рис. 3:

AB – охлаждение всей воды;

BC – кристаллизация части воды;

DC – нагревание всего льда.

Ответ: 6,15 кг льда и 0,85 кг воды при 0°C .

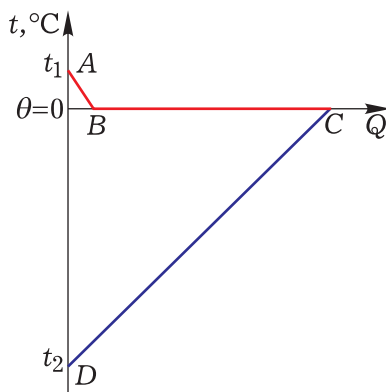


Рис. 3

Задача 4. В калориметр, содержащий 1,5 кг воды при 20°C , положили 200 г льда при -10°C . Какая температура установится в калориметре? Каким будет массовый состав содержимого калориметра? Теплоёмкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение. Имеем

$$m_1 = 1,5 \text{ кг}, \quad t_1 = 20^\circ\text{C},$$

$$c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$m_2 = 0,2 \text{ кг}, \quad t_2 = -10^\circ\text{C},$$

$$c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}), \quad \lambda = 330 \text{ кДж}/\text{кг}.$$

Количество теплоты, которое может отдать вода, остывая от температуры t_1 до 0°C ,

$$Q_1 = c_{\text{в}} m_1 (t_1 - 0) = 126000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_2 до температуры плавления 0°C ,

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_2 (0 - t_2) = 4200 \text{ Дж}.$$

Видим, что $Q_1 > Q_2$, значит, лёд будет таять. Максимальная масса льда, который может растаять из-за разности $Q_1 - Q_2$,

$$m = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \approx 0,37 \text{ (кг)}.$$

Получили $m > m_2$, следовательно, весь лёд растает. В калориметре будет только вода массой $m_{1к} = m_1 + m_2 = 1,7$ кг и установится температура $\theta > 0$. Находим значение этой температуры, используя уравнение теплового баланса:

$$c_в m_1 (t_1 - \theta) = c_л m_2 (0 - t_2) + \lambda m_2 + c_в m_2 (\theta - 0).$$

Отсюда

$$\theta = \frac{c_в m_1 t_1 + c_л m_2 t_2 - \lambda m_2}{c_в (m_1 + m_2)}.$$

С учётом найденных значений Q_1 и Q_2

$$\theta = \frac{126000 - 4200 - 330000 \cdot 0,2}{4200 \cdot 1,7} \approx 8 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

На рис. 4 процессы теплообмена показаны графически:

AB – охлаждение воды;

CD – нагревание льда;

DF – плавление льда;

FB – нагревание воды, образовавшейся из льда.

Ответ: 1,7 кг воды при 8 °С.

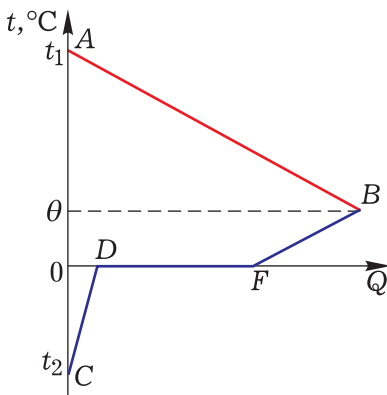


Рис. 4

Задача 5*. (Международная космическая олимпиада, г. Королёв, 2008 год, 8 класс) В сосуде находится лёд при температуре $t = 0^\circ\text{C}$. Туда влили воду массой $m_1 = 0,4$ кг, взятую при температуре $t_1 = 60^\circ\text{C}$. Какая температура установилась в сосуде, если конечный объём его содержимого равен $V = 1$ л? Найти массовый состав содержимого сосуда в конечном состоянии. Плотности воды и льда $\rho_1 = 1000$ кг/м³ и $\rho_2 = 900$ кг/м³, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

Решение. Количество теплоты, которое может отдать вода, остывая от температуры t_1 до 0°C ,

$$Q_1 = c_в m_1 (t_1 - 0) = 100800 \text{ Дж}.$$

Лёд обязательно будет таять, так как уже находится при температуре плавления. Максимальная масса льда, который может растаять при получении количества теплоты Q_1 ,

$$m = \frac{Q_1}{\lambda} = \frac{100800}{330000} = 0,3 \text{ (кг)}.$$

Соответствующая конечная масса воды

$$m_{1к} = m_1 + m = 0,7 \text{ кг}.$$

Объём этой воды

$$V_1 = \frac{m_{1к}}{\rho_1} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0,7 \text{ л}.$$

Но по условию объём содержимого сосуда $V > V_1$. Это значит, что лёд растаял не весь. Объём оставшегося льда $V_2 = V - V_1 = 0,3$ л, его масса

$$m_{2к} = \rho_2 \cdot V_2 = 0,3 \cdot 10^{-3} \cdot 900 = 0,27 \text{ (кг)}.$$

Ответ: при установившейся температуре $\theta = 0^\circ\text{C}$ в сосуде будет смесь 0,7 кг воды и 0,27 кг льда.

4. Примеры решения задач с водой, льдом и другими компонентами

Задачи значительно усложняются, если в теплообмене участвуют не только вода и лёд. Уже рассмотренные приёмы используются и при решении этих задач. Алгоритм решения опять содержит ряд последовательных шагов с получением промежуточных числовых результатов. Приведём ещё несколько примеров. Справочные данные для воды и льда считаем известными: $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ – удельная теплоёмкость воды, $c_l = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ – удельная теплоёмкость льда, $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$ – удельная теплота плавления льда, $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ – удельная теплота парообразования воды.

Задача 6*. В теплоизолированном сосуде содержится в тепловом равновесии смесь 54,4 г льда и 500 г воды. В сосуд вводится 6,6 г насыщенного водяного пара при температуре 100°C . Какой будет температура после установления теплового равновесия? Каким будет состав содержимого сосуда? Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

Решение. В данном случае имеем уже три компонента в системе. Первый компонент – лёд: $m_1 = 54,4 \text{ кг}$, $t_1 = 0^\circ \text{C}$, $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$; второй – вода: $m_2 = 500 \text{ г}$, $t_2 = t_1 = 0^\circ \text{C}$, $c_v = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$; третий компонент – пар: $m_3 = 6,6 \text{ г}$, $t_3 = 100^\circ \text{C}$, $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. Лёд может сразу плавиться, а пар конденсироваться. Количество теплоты, которое может отдать весь пар, конденсируясь,

$$Q_3 = L m_3 = 15180 \text{ Дж.}$$

Количество теплоты, необходимое для плавления всего льда,

$$Q_1 = \lambda m_1 = 17952 \text{ Дж.}$$

$Q_1 > Q_3$, значит, пар весь сконденсируется, и образовавшаяся из него вода будет остывать. Количество теплоты, которое может отдать эта вода, остывая от температуры t_3 до 0°C ,

$$Q_4 = c_v m_3 (t_3 - 0) = 2772 \text{ Дж.}$$

Максимальная масса льда, который может растаять за счёт $Q_3 + Q_4$,

$$m = \frac{Q_3 + Q_4}{\lambda} = \frac{15180 + 2772}{330000} = 54,4 \cdot 10^{-3} \text{ (кг)}.$$

Имеем $m = m_1$, значит, весь лёд растает (действительно, $Q_3 + Q_4 = Q_1$). После установления теплового равновесия в калориметре будет только вода массой

$$m_{2к} = m_2 + m_1 + m_3 = 561 \text{ г}$$

при установившейся температуре $\theta = 0^\circ \text{C}$.

Качественный график происходящих процессов изображён на рис. 5:

AB – конденсация пара;

BD – охлаждение воды, образовавшейся из пара;

DC – плавление льда.

Ответ: 0,561 кг воды при 0°C .

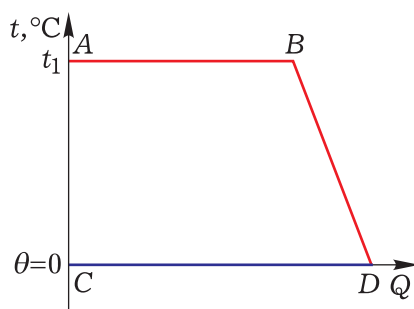


Рис. 5

Задача 7*. В калориметр, где находится 1 кг льда при температуре -40°C , впускают 1 кг пара при температуре 120°C . Давление в калориметре – атмосферное, потерями тепла и теплоёмкостью калориметра пренебречь. Определить установившуюся температуру и массовый состав содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Удельную теплоёмкость пара в процессе охлаждения считать равной $2200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$.

Решение. Первым компонентом данной системы по условию является лёд: $m_1 = 1 \text{ кг}$, $t_1 = -40^\circ\text{C}$,

$$c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K});$$

второй компонент – пар: $m_2 = 1 \text{ кг}$, $t_2 = 120^\circ\text{C}$, $c_2 = 2200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$. Пусть $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ – удельная теплоёмкость воды, $L = 2200 \text{ кДж}/\text{кг}$ – удельная теплота парообразования воды. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от температуры t_1 до температуры плавления 0°C ,

$$Q_1 = c_{\text{л}} m_1 (0 - t_1) = 84000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, которое может отдать пар, остывая от температуры t_2 до $t_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$,

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_{\text{к}}) = 44000 \text{ Дж}.$$

Поскольку $Q_2 < Q_1$, пар будет конденсироваться. При конденсации всего пара выделится количество теплоты

$$Q_3 = L m_2 = 2260000 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты, необходимое для плавления всего льда,

$$Q_4 = \lambda m_1 = 330000 \text{ Дж}.$$

Видим, что $(Q_1 + Q_4) < (Q_2 + Q_3)$, по-

этому вода, образовавшаяся из льда, будет нагреваться. Количество теплоты, необходимое для нагревания этой воды от 0°C до температуры $t_{\text{к}} = 100^\circ\text{C}$,

$$Q_5 = c_{\text{в}} m_1 (t_{\text{к}} - 0) = 420000 \text{ Дж}.$$

$$Q_1 + Q_4 + Q_5 = (84 + 330 + 420) \cdot 10^3 = 843000 \text{ (Дж)}.$$

Найдём максимальную массу пара, который должен конденсироваться из-за разности $(Q_1 + Q_4 + Q_5) - Q_2$,

$$m = \frac{(Q_1 + Q_4 + Q_5) - Q_2}{L} = \frac{843000 - 44000}{2260000} \approx 0,35 \text{ (кг)}$$

Видим, что $m < m_2$, то есть пар конденсируется не весь. Тогда в калориметре останется смесь пара массой $m_{2\text{к}} = m_2 - m = 0,65 \text{ кг}$ и воды массой $m_{\text{в}} = m_1 + m = 1,35 \text{ кг}$ при 100°C . Установившаяся температура в калориметре $\theta = 100^\circ\text{C}$.

На графике, показанном на рис. 6,

AB – нагревание льда;

BC – плавление льда;

CD – нагревание воды, образовавшейся из льда;

EK – охлаждение пара;

KD – конденсация части пара.

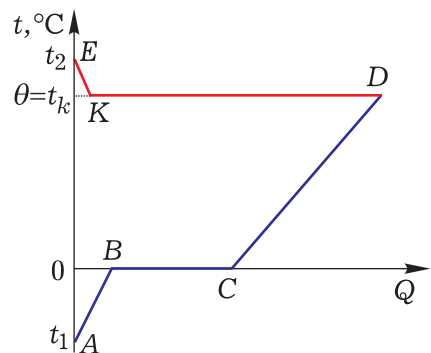


Рис. 6

Ответ: 0,65 кг пара и 1,35 кг воды при 100°C .

Задача 8*. В латунном калориметре массой 0,1 кг находится 5 г льда при температуре -10°C . В калориметр вливают 30 г расплавленного свинца при температуре плавления. Какая температура установится в калориметре? Удельные теплоёмкости латуни и свинца равны соответственно 380 Дж/(кг·К) и 130 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления свинца 25 кДж/кг, температура плавления 327°C .



Решение. Первым компонентом данной системы является калориметр: $m_1 = 0,1$ кг, $c_1 = 380$ Дж/(кг·К), $t_1 = -10^\circ\text{C}$; вторым — лёд: $m_2 = 5$ г, $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг·К), $\lambda_2 = 330$ кДж/кг, $t_2 = t_1 = -10^\circ\text{C}$; третьим — свинец: $m_3 = 30$ г, $c_3 = 130$ Дж/(кг·К), $t_3 = = 327^\circ\text{C}$, $\lambda_3 = 25$ кДж/кг.

Количество теплоты, необходимое для нагревания калориметра и находящегося в нём льда от температуры $t_1 = t_2$ до температуры плавления льда 0°C ,

$$Q_1 + Q_2 = (c_1 m_1 + c_{\text{л}} m_2) \cdot (t_1 - 0) = 485 \text{ Дж.}$$

При отвердевании расплавленно-

го свинца и дальнейшем охлаждении твёрдого свинца от температуры t_3 до 0°C выделится количество теплоты $Q_3 + Q_4 = \lambda_3 m_3 + c_3 m_3 (t_3 - 0) = 2025$ Дж. Имеем

$$(Q_3 + Q_4) > (Q_1 + Q_2).$$

Значит, лёд будет таять. Максимальная масса льда, который может растаять из-за разности $(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)$,

$$m = \frac{(Q_3 + Q_4) - (Q_1 + Q_2)}{2} = \frac{2025 - 485}{330000} \approx 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ (кг)}.$$

Видим, что $m < m_2$, т. е. лёд растает не весь. Значит, в калориметре установится температура $\theta = 0^\circ\text{C}$. В нём будут находиться: лёд массой $m_{2\text{к}} = m_2 - m = 0,3$ г, вода массой $m = 4,7$ г, твёрдый свинец массой

$$m_3 = 30 \text{ г.}$$

Рисунок 7 качественно иллюстрирует происходящие процессы:

AB — нагревание латунного калориметра со льдом;

BC — плавление части льда;

KD — отвердевание свинца;

DC — остывание твёрдого свинца.

Ответ: 0,3 г льда, 4,7 г воды и 30 г твёрдого свинца при 0°C .

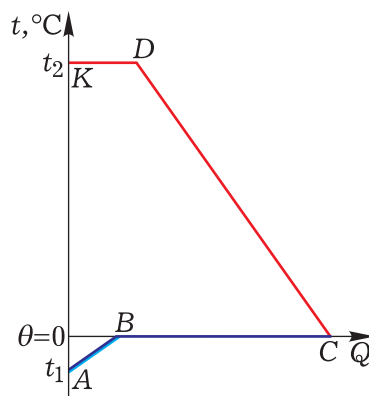


Рис. 7