

Лелеков Александр Васильевич

*Учитель физики высшей категории
ГБОУ Лицей информационных
технологий №1537, г. Москва.*



Жучков Иван Валерьевич

*Кандидат технических наук,
учитель физики ГБОУ Лицей
информационных технологий
№1537, г. Москва.*



Векторный способ решения задач по кинематике

В статье рассмотрен нестандартный подход к решению задач о движении тела, брошенного под углом к горизонту. Приведены как достаточно простые задачи, которые встречаются во многих задачаниках, так и более сложные, с которыми сталкивается школьник на олимпиадах.

Перемещение $\vec{s}$, скорость $\vec{v}$, ускорение свободного падения $\vec{g}$ – величины векторные. При рассмотрении движения тела в поле тяготения будем рассматривать результирующее перемещение $\vec{L}$ как векторную сумму перемещения равномерного прямолинейного движения с некоторой начальной скоростью $\vec{s} = \vec{v}_0 t$ и перемещения равноускоренного движения $\vec{h} = \frac{\vec{g} t^2}{2}$, направленного всегда вертикально вниз, т. е. $\vec{L} = \vec{s} + \vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$. Это позволяет рассматривать любую кинематическую задачу как геометриче-

скую, для решения которой требуется использование элементов тригонометрии, при этом сокращается и упрощается ход решения задачи.

Задача 1. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Определить время движения от момента броска до момента падения t и дальность броска по горизонтали L .

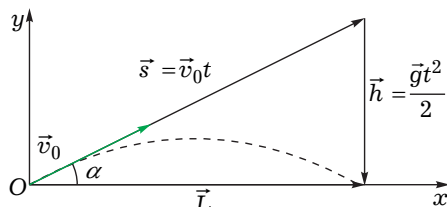


Рис. 1

Решение. По оси Oy тело совершает свободное падение, и за время

t вектор его перемещения $\vec{h} = \frac{gt^2}{2}$.

По направлению $\vec{v}_0$ вектор перемещения $\vec{s} = \vec{v}_0 t$. Результирующий вектор перемещения $\vec{L}$ направлен вдоль оси Ox .

Эти векторы образуют треугольник, в котором

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} = \frac{gt^2}{2v_0 t} = \frac{gt}{2v_0}.$$

Отсюда находим время полёта

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полёта

$$\begin{aligned} L &= s \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha = \\ &= \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \end{aligned}$$

Пунктиром на рисунках показана траектория движения тела.

Задача 2. На горе с углом наклона α к горизонтالي бросают мяч с начальной скоростью $\vec{v}_0$ перпендикулярно склону горы. Найти время полёта мяча t . На каком расстоянии L от точки бросания упадёт мяч?

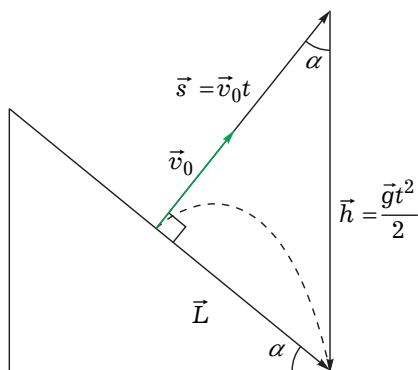


Рис. 2

Решение. Аналогично предыдущей задаче расписываем векторы $\vec{h}$ (по оси Oy), $\vec{s}$ (по направлению $\vec{v}_0$)

и $\vec{L}$ (дальность полёта вдоль наклонной плоскости). Эти векторы составляют замкнутый треугольник $\vec{L} = \vec{s} + \vec{h}$ (рис. 2), в котором угол между $\vec{s}$ и $\vec{h}$ равен углу наклона горы, т. к. $\vec{v}_0 \perp$ плоскости горы и это углы со взаимно перпендикулярными сторонами. В этом треугольнике $\cos \alpha = \frac{s}{h} = \frac{2v_0}{gt}$, откуда $t = \frac{2v_0}{g \cos \alpha}$.

Расстояние от точки бросания L найдём через $\tan \alpha = \frac{L}{s} = \frac{L}{v_0 t}$. Отсюда

$$L = v_0 t \cdot \tan \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha}.$$



Задача 3. Из миномёта ведут обстрел цели, расположенной на склоне горы. На каком расстоянии $L = OB$ от миномёта будут падать мины, если угол наклона горы $\alpha = 30^\circ$, угол наклона ствола миномёта к горизонтالي $\beta = 60^\circ$. Начальная скорость мины v_0 .

Решение. Рассмотрим треугольник OAB (рис. 3). Сторона OA равна перемещению s : $OA = s = v_0 t$, сторона $AB = h = \frac{gt^2}{2}$, сторона OB есть искомое расстояние L .

По теореме синусов ($\triangle OAB$):

$$\frac{OA}{\sin \angle OBA} = \frac{AB}{\sin \angle AOB} = \frac{OB}{\sin \angle OAB}. \quad (1)$$

Из треугольника выражаем:

$$\sin \angle OBA = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha;$$

$$\sin \angle AOB = \sin(\beta - \alpha);$$

$$\sin \angle OAB = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta.$$

Подставляя эти значения в (1), получаем:

$$\frac{v_0 t}{\cos \alpha} = \frac{gt^2}{2 \sin(\beta - \alpha)} = \frac{L}{\cos \beta}.$$

Из первых двух равенств этого уравнения находим время полёта

$$\text{мины: } t = \frac{2v_0 \sin(\beta - \alpha)}{g \cos \alpha}.$$

Используя

$$\text{первое и третье равенства, находим } OB = L = \frac{v_0 t \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \sin(\beta - \alpha) \cos \beta}{g \cos^2 \alpha}.$$

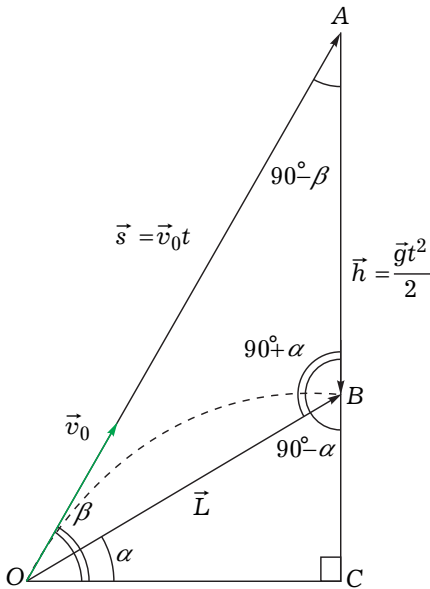


Рис. 3

Подставляя значения углов α и β ,

$$\text{получаем: } L = \frac{2v_0^2}{3g}.$$

Задача 4. Птица летела по горизонтальной прямой с постоянной

скоростью u . Мальчик бросил в неё камень. В момент броска направление скорости камня (угол α к горизонту) было как раз на птицу, модуль начальной скорости камня v_0 . На какой высоте H летела птица, если камень всё же попал в неё?

Эту задачу предлагается решить самостоятельно. *Указание:* написать уравнения перемещения птицы и камня по разным направлениям (см. рис. 4).

$$\text{Ответ. } H = \frac{2u}{g}(v_0 \cos \alpha - u)tg^2 \alpha.$$

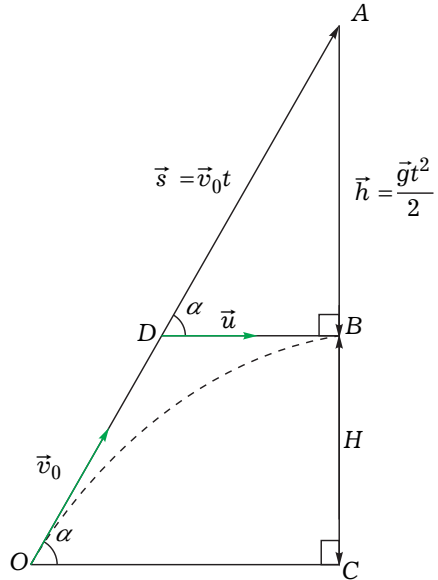


Рис. 4

Задача 5. (Олимпиада «Физтех-2011») На наклонной плоскости с $\alpha = 30^\circ$ к горизонту перпендикулярно ей стоит шест высотой $h = 7$ м. С какой минимальной скоростью v_0 нужно бросить камень с наклонной плоскости, чтобы он смог перелететь шест?

Решение. Произведём бросок камня из точки A (рис. 5). Шест высотой h показан на рисунке отрезком DE. Исходя из условия задачи о

нахождении наименьшей скорости и приняв камень за материальную точку, можно заключить, что он будет двигаться через точку D . Начальная траектория движения камня (линия AD) показана на рис. 5 пунктирной линией. При движении камня вертикальное смещение под действием силы тяжести будет равно: $CD = \frac{gt^2}{2}$. Вектор $\overline{AC}$ по модулю будет равен $AC = v_0 t$. Из рисунка видно, что расстояние $CB = AC - AB$, где $AB = DE = h$. Следовательно, $CB = v_0 t - h$. Чтобы скорость была минимальной, точка бросания должна располагаться как можно ближе к шесту, т. е. отрезок BD должен быть кратчайшим. Это достигается когда $CB \perp BD$, т. е. $\triangle CBD$ — прямо-

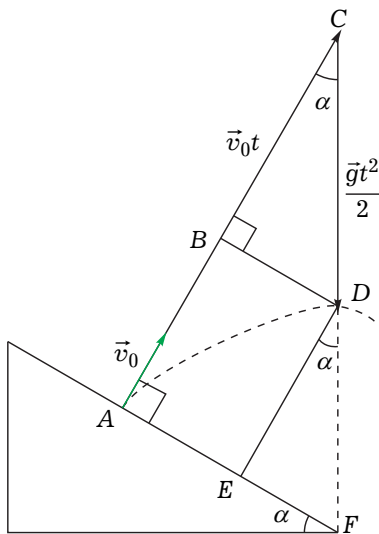


Рис. 5

угольный, в котором угол $\angle BCD$ равен углу наклона плоскости к горизонту.

Из треугольника BCD

$$\cos \alpha = \frac{CB}{CD} = \frac{v_0 t - h}{gt^2/2},$$

откуда

$$v_0 = \frac{gt}{2} \cos \alpha + \frac{h}{t}.$$

Для нахождения минимального значения скорости v_0 , являющейся функцией времени, необходимо приравнять нулю её производную по времени. Получим:

$$v_0' = \frac{g}{2} \cos \alpha - \frac{h}{t^2} = 0,$$

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2h}{g \cos \alpha}},$$

$$v_{0 \min} = \frac{g}{2} \cos \alpha t_{\min} + \frac{h}{t_{\min}} = \sqrt{2gh \cos \alpha}.$$

При подстановке численных данных получим $v_{0 \min} = 11$ м/с.



Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

На уроке физики

- Что ты, Иванов, знаешь о расщеплении ядра атома?
- Честное слово, ничего не знаю! Это ребята из соседнего класса...