



Власов Анатолий Иванович

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
учитель физики гимназии №44 города Пензы.*

Удар простой и сложный

Удар – одна из стандартных и очень «простых» тем школьного раздела механики. В данной статье постараемся найти интересное и необычное в этой теме. Надеюсь, что статья будет интересной преподавателям, готовящим школьников к олимпиадам. Ограниченный объём статьи не позволяет рассмотреть эту тему полностью. Здесь нет задач на «косой» удар, не рассмотрены интересные задачи удара с кручением и трением, «резонансные» удары и многое другое. В статье есть очень простые, «средние» и по-настоящему сложные и интересные задачи. Соответственно и математика решений различна. В сложных задачах есть и производная, и интеграл. Оптимально следует читать эту статью со своим учителем, который поможет вам понять сложные моменты решений. Начнём с вывода формулы, определяющей скорости сталкивающихся тел после абсолютно упругого лобового удара.

Формулы скоростей

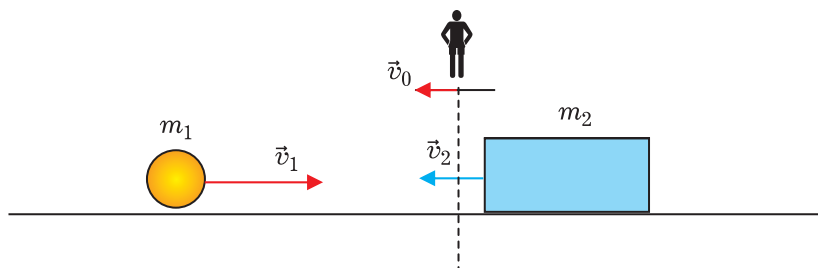


Рис. 1

Будем считать известными массы и скорости тел до удара. Рассмотрим удар с точки зрения наблюдателя, который находится в центре масс систе-

мы (и движется со скоростью центра масс). Удар, с точки зрения этого наблюдателя, выглядит очень просто: после удара скорости тел меняют

только направление (на противоположные), модули скоростей в подвижной системе отсчёта остаются неизменными. Это согласуется и с законом сохранения импульса, и с законом сохранения энергии. Теория начинается с формулы:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (1)$$

Это обычный закон сложения скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта $\vec{v}$ равна сумме скоростей центра масс $\vec{v}_0$ и скорости тела $\vec{v}'$ относительно центра масс. Скорость центра масс определяется известной формулой

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Выразим из формулы (1) скорость тела в системе центра масс:

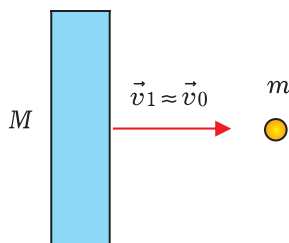
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0. \quad (3)$$

Как было сказано выше, после удара относительная скорость меняет знак:

$$\vec{v}^{*} = -\vec{v}' = -\vec{v} + \vec{v}_0. \quad (4)$$

Перепишем формулу (1) «после удара»¹:

$$\vec{v}^{*} = \vec{v}_0 + \vec{v}'^{*} = \vec{v}_0 - \vec{v} + \vec{v}_0.$$



В итоге получаем удобную формулу для расчёта скоростей тел, которые они приобретают после абсолютно упругого удара:

$$\vec{v}^{*} = 2\vec{v}_0 - \vec{v}. \quad (5)$$

Интересным является закон изменения относительной скорости при ударе. Скорость первого тела относительно второго тела определим формулой

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2. \quad (6)$$

Используя формулу (5), определяем относительную скорость тел после удара:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{12}^{*} &= 2\vec{v}_0 - \vec{v}_1 - (2\vec{v}_0 - \vec{v}_2) = \\ &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Мы видим, что относительная скорость изменила знак, но модуль относительной скорости сохранился.

Теперь рассмотрим простые примеры использования формулы (5).

Пример 1. (Подача) Определить скорость, которую получит покоящийся лёгкий мяч после удара тяжёлой теннисной ракеткой. Скорость ракетки перед ударом равна v_1 , а её масса значительно больше массы мяча.

$$\vec{v}_2^{*} = 2\vec{v}_1$$

Рис. 2

Решение. Скорость центра масс (с учётом формулы (2)) совпадает со скоростью тяжёлой ракетки

$$v_0 = \frac{M \cdot v_1}{M + m} \approx v_1.$$

¹ Скорости после удара обозначаем «звёздочкой».

В соответствии с формулой (5)

$$v_2^* = 2v_1.$$

Мяч «уходит» с двойной скоростью.

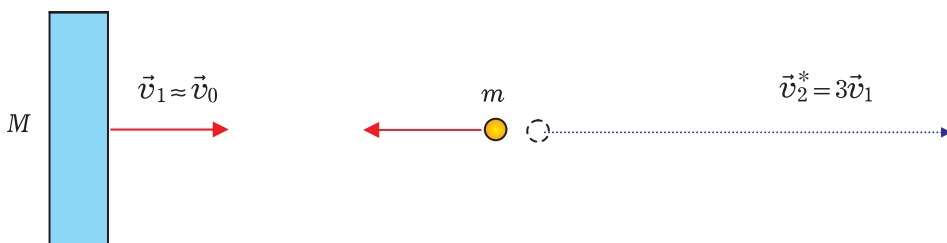


Рис. 3

Решение. В соответствии с формулой (5)

$$v_2^* = 2v_1 - (-v_1) = 3v_1.$$

Мяч «возвращается» с тройной скоростью.

Пример 3. (Плавный удар) Массивная платформа стоит на гладком столе, левым краем соприкасаясь с вертикальной стеной. В платформе имеется цилиндрическая выемка радиуса R . Небольшая шайба массой m начинает скатываться из состояния покоя с левой верхней точки выемки.

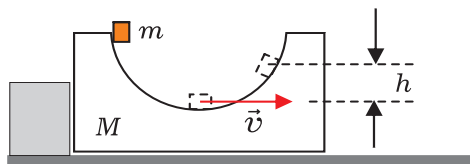


Рис. 4

Определите максимальную скорость платформы при установившемся «режиме» движения системы. Масса платформы M . Трение между шайбой и поверхностью выемки отсутствует.

Решение. Задача решается «в одно действие». До момента скатывания шайбы в нижнюю точку выемки платформа покоится. В нижней точке

Пример 2. (Встречный удар) Пусть ракетка и мяч (из первого примера) движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Определите скорость мяча после встречного удара.

шайба будет иметь горизонтальную скорость $v = \sqrt{2gR}$. С этого момента начинается «плавный» удар между шайбой и платформой. Этот удар заканчивается в момент возвращения шайбы в нижнюю точку выемки, когда шайба движется в обратном направлении. В соответствии с формулой (5) записываем ответ:

$$v_2^* = 2 \frac{m \sqrt{2gR}}{m + M}.$$

Теперь рассмотрим необычную схему ударного взаимодействия.

Пример 4. (Двойной удар) Имеется ящик с двумя отверстиями в вертикальных стенках с небольшим смещением этих отверстий по вертикали (см. рис. 5).

Мяч, летящий горизонтально со скоростью v_1 , влетает в первое отверстие и после удара о вторую стенку ящика возвращается к первой стенке. После второго упругого удара мяч покидает ящик через открытое «окно» во второй стенке. Такой двойной удар можно «осуществить», закрывая и открывая отверстия в нужные моменты времени. На приведённой схеме пролёт мяча «организован» небольшими наклонами траектории. Определите состо-

яние мяча и ящика после двойного удара (после вылета мяча из ящика).

Массы мяча и ящика соответственно равны m и M .

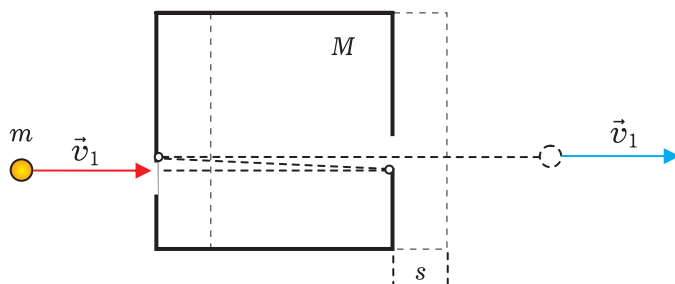


Рис. 5

Решение. Вычисляем скорости тел после первого удара:

$$\vec{v}_1^* = 2 \cdot \vec{v}_0 - v_1,$$

$$\vec{v}_2^* = 2 \cdot \vec{v}_0.$$

Величины скоростей после второго удара

$$\vec{v}_1^{**} = 2 \cdot \vec{v}_0 - (2 \cdot \vec{v}_0 - \vec{v}_1) = v_1,$$

$$\vec{v}_2^{**} = 2 \cdot \vec{v}_0 - 2 \cdot \vec{v} = 0.$$

В результате двойного удара мяч и ящик «вернулись» к первоначальным состояниям.

Дополнительно определим смещение ящика за время этого сложного двойного удара. Так как скорость мяча относительно ящика равна v_1 и её величина после первого удара сохранилась, то время между двумя ударами легко определяется (a – ширина ящика):

$$t = \frac{a}{v_1}.$$

Смещение ящика за это время

$$\begin{aligned} S &= v_2^* \cdot t = 2v_0 \cdot \frac{a}{v_1} = \\ &= 2 \frac{m \cdot v_1}{m + M} \cdot \frac{a}{v_1} = 2a \frac{m}{m + M}. \end{aligned}$$

Полное время «удара» (время, которое проводит мяч внутри ящика)

$$t_0 = 3 \frac{a}{v_1}.$$

Пример 5. (Множественный удар в сложных условиях) Мяч лежит в ящике в форме куба, нижняя грань которого находится на некоторой высоте h над поверхностью стола. Куб вместе с мячом начинает свободное падение. При ударе о поверхность стола куб упруго «отражается» (рис. 6). Определите количество ударов мяча о стенки куба за время одного «прыжка» куба. (За это время нижняя грань куба вновь возвращается на поверхность стола.) Удары мяча о стенки куба считайте абсолютно упругими. Известно отношение масс куба и мяча $m_{\text{к}} / m_{\text{м}} = \mu = 3$ и отношение высоты падения к длине ребра куба $h / l = \beta = 5$ (диаметр мяча очень мал по сравнению с ребром куба).

Решение. Данная задача по-настоящему сложная. Но знание предыдущего материала позволяет решить её достаточно просто и красиво.

1. Перед ударом о поверхность стола ящик и мяч имеют одинаковую скорость $v = \sqrt{2gh}$.

2. Будем считать, что ящик после удара о поверхность стола мгновенно

«отражает» свою скорость (скорость меняет знак).

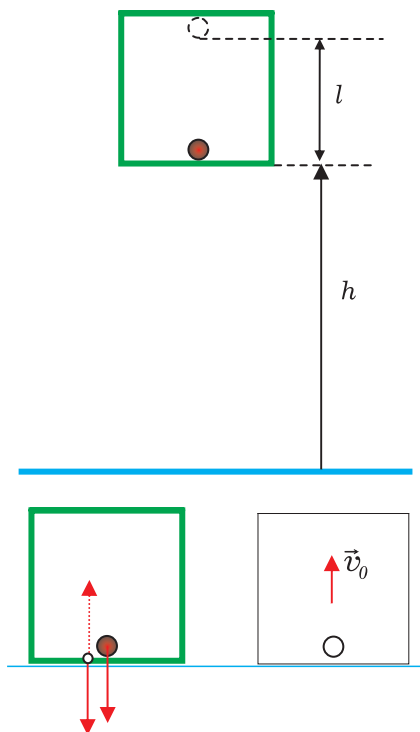


Рис. 6

3. Далее происходит абсолютно упругий удар между ящиком и мячом.

4. Скорости тел после этого удара определяем по формуле (5).

Вычисления скоростей¹ с учётом значения $\mu = 3$:

$$v_0 = v \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = v \frac{5 - 1}{5 + 1} = \frac{2}{3}v;$$

$$v_1^* = 2 \cdot v \frac{\mu - 1}{\mu + 1} - v = v \frac{\mu - 3}{\mu + 1} = 0;$$

$$v_2^* = 2 \cdot v \frac{\mu - 1}{\mu + 1} - (-v) = v \frac{3\mu - 1}{\mu + 1} = 2v.$$

Результаты вычислений показывают, что ящик после «поворота» и первого столкновения с мячом остаётся на столе (останавливается и приходит в движение вверх только после второго удара мяча о верхнюю крышку ящика). Мяч после столкновения движется вверх с двойной скоростью. Модуль относительной скорости сохраняется (до удара и после удара):

$$v_2^* - v_1^* = 2v.$$

5. Так как после первого удара ящик останавливается (нет дополнительного удара о стол), то центр масс системы стартует со скоростью $v_0 = \frac{2}{3}v$ и движется как «тело», брошенное вертикально вверх в поле тяготения². Время полёта центра масс:

$$t = 2 \frac{v_0}{g} = 2 \frac{v}{g} \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = \frac{v}{g}.$$

6. В системе центра масс ящик и мяч движутся равномерно, меняя после ударов скорости, но модуль относительной скорости движения при этом сохраняется.

7. Время между ударами

$$\tau = \frac{l}{2v}.$$

8. Число ударов к моменту возврата центра масс (к моменту возврата ящика на поверхность стола)

$$n = \frac{t}{\tau} = 2 \frac{v}{g} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{2v}{l} = 4 \frac{v^2}{gl} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} =$$

$$= 4 \cdot \frac{2gh}{gl} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = 8 \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} =$$

$$= 8 \cdot 5 \cdot \frac{3 - 1}{3 + 1} = 20.$$

¹ Обозначения: ящик – 1, мяч – 2.

² Напомним, что в начальный момент этого полёта ящик покоится на столе.

9. С учётом первого удара общее число ударов равно 21.¹

Пример 6 (Непрерывный двумерный удар). На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится обруч массой M . На него надета маленькая бусинка массой m . Бу-

синке сообщают скорость v_1 в направлении касательной к обручу. Определите максимальную скорость обруча и минимальную скорость бусинки при дальнейшем движении системы. Трение в системе отсутствует.

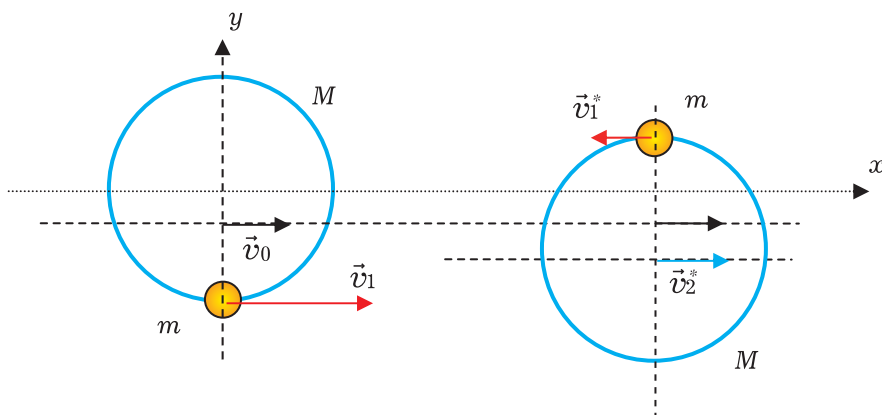


Рис. 7

Решение.² Взаимодействие бусинки с обручем является сложным двумерным ударом.³ На рис. 7 показаны начальная и конечная фазы удара в направлении оси x . Этот удар заканчивается в момент, когда скорость бусинки становится противоположной по отношению начальной скорости. В этот момент обруч имеет максимальную скорость, а бусинка имеет минимальную скорость. Несмотря на сложность геометрии удара, искомые скорости определяются очень просто (в соответствии с формулами (2), (5)):

$$v_{1,\min} = 2 \frac{m v_1}{m + M} - v_1 = \frac{m - M}{m + M} v_1,$$

$$v_{2,\max} = 2 \frac{m v_1}{m + M}.$$

Далее интересно следующее. Удар бусинки и кольца можно разложить на два удара (горизонтальный и вертикальный). К моменту завершения горизонтального удара происходит завершение «двойного удара» по вертикали (по оси y). Первый (прямой) вертикальный удар заканчивается к моменту, когда бусинка по кольцу движется вертикально вверх. При этом кольцо

¹ При составлении условия задачи значение отношения масс и отношение размеров было подобрано таким образом, чтобы искомое число ударов было целым. В данном случае число ударов нечётное. В конце одного «прыжка» ящика мяч 21 раз ударяет в его дно.

² В тексте решения вместо: «движение по оси x или y » будем использовать: «движение по горизонтали или вертикали»; «движется вверх или вниз».

³ При этом следует отметить, что обруч не будет раскручиваться. Сила со стороны бусинки действует на обруч ортогонально элементам кольца, так как трение отсутствует.

получает максимальный вертикальный импульс (вниз на нашем рисунке). Далее начинается вторичный (обратный) вертикальный удар, который заканчивается к моменту выхода бусинки на обратное горизонтальное движение (заканчивается первый удар по горизонтали). За время обратного вертикального удара гасится вертикальное движение кольца.

Подводим итоги. Взаимодействие бусинки и кольца во время движения носит характер сложного множественного непрерывного удара. Отдельный удар можно разложить на два взаимно ортогональных удара. Частоты вертикального и горизонтального ударов соотносятся как 2:1. Скорости после ударов определяются по элементарным формулам лобового удара. Кольцо движется поступательно в двух взаимно ортогональных направлениях. Амплитуда смещения центра кольца по оси y равна амплитуде смещения центра масс системы в этом направлении

$$\Delta y = \frac{m \cdot R}{m + M}.$$

Следующая задача является конкретным примером олимпиадной задачи на эту тему.

Пример 7. («Закрученный» удар)¹

В гладком прямоугольном канале находится неподвижный прямоуголь-

ный брусок массой M . В нём сделан «причудливый» канал, который имеет форму «плавной» петли. Стенки канала гладкие. Входной и выходной участки канала горизонтальны и расположены на одной высоте. Шарик массой m влетает с горизонтальной скоростью v в брусок с левой стороны и вылетает с правой его стороны. С какой скоростью u будет двигаться брусок после вылета из него шарика?

Решение. Ответ в данной задаче очевиден. Брусок к концу «необычного» удара должен остановиться. При этом число двойных ударов в горизонтальном направлении зависит от формы канала. Если канал в бруске делает один «простой» оборот (показан справа на рис. 8), то в горизонтальном направлении происходит один «двойной» удар, последствия которого были рассмотрены в примере 4. Вертикальные удары блокированы стенками канала, в котором движется брусок.

Теперь решим действительно сложную, но очень интересную задачу на множественный удар, который удаётся представить «непрерывным» взаимодействием. Сложность задачи в основном определена её математикой. При решении приходится использовать производную и

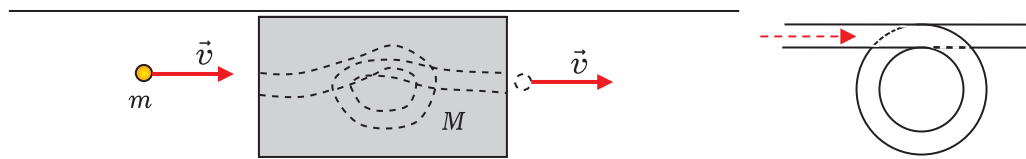


Рис. 8

¹ Задача № 16 (Канал), «Теоретические задачи по физике», А.В. Чудновский и др. (Международная олимпиада «ТУЙМААДА»).

интеграл. Олимпиадникам будет интересна математическая сторона решения.

Пример 8. (Удар через посредника)

Между шаром и неподвижной стенкой находится лёгкая частица-посредник. В начальный момент времени шар, движущийся к стенке, сталкивается с посредником на расстоянии L от стенки. Перед первым ударом скорости частиц равны и противоположны. Считая все удары центральными и абсолютно упругими, определите: количество ударов n между шаром и посредником до момента остановки шара (смены знака его скорости), расстояние шара до стенки в момент, когда его скорость уменьшится в два раза. Отношение массы посредника к массе шара считайте малой величиной (или $\mu = \frac{M}{m} \gg 1$).

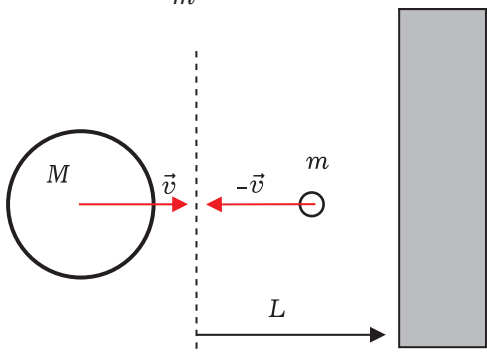


Рис. 9

Решение. Пусть перед очередным ударом шар имеет скорость v , посредник движется ему навстречу со скоростью u . Скорость шара после удара v^* определим по известной формуле (5):

$$v^* = 2v_0 - v. \quad (8)$$

Здесь v_0 — скорость центра масс системы двух тел

$$v_0 = \frac{M \cdot v - m \cdot u}{M + m}. \quad (9)$$

После подстановки в (8) получаем:

$$v^* = 2 \frac{M \cdot v - m \cdot u}{M + m} - v. \quad (10)$$

Эта формула позволяет определить изменение скорости шара при ударе:

$$\Delta v = -\frac{2}{1 + \mu}(v + u). \quad (11)$$

Соотношение между скоростями можно получить, используя закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{Mv_0^2}{2} &= \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} \rightarrow \\ \rightarrow u &= \sqrt{\mu(v_0^2 - v^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь в левой части равенства мы пренебрегли первоначальной энергией посредника. Введём безразмерную

величину $x = \frac{v}{v_0}$. После подстановки

(12) в выражение (11) получаем:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \Delta x = -\frac{2}{1 + \mu} \left(x + \sqrt{\mu(1 - x^2)} \right). \quad (13)$$

Этим выражением определяется относительное изменение скорости шара за один удар. Если считать число ударов n и величину x непрерывными величинами, то можно приближённо записать полученное выражение в виде дифференциального соотношения:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{2}{1 + \mu} \left(x + \sqrt{\mu(1 - x^2)} \right). \quad (14)$$

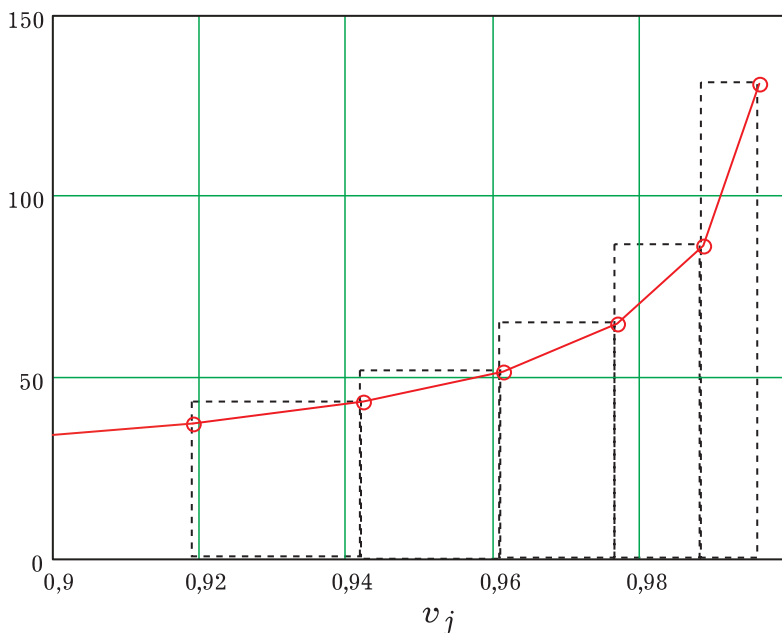


Рис. 10

Отсюда получаем искомое число ударов в виде интеграла:

$$n = \frac{1+\mu}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{\mu(1-x^2)}}. \quad (15)$$

Здесь следует сделать следующее замечание. Переход к интегрированию должен уменьшать расчётное число ударов, останавливающих шар. Это иллюстрирует рис. 10. На нём показана часть графика подынтегральной функции, на котором обозначены ударные точки. Правильное число ударов получается суммированием площадей прямоугольников, построенных на этих точках. Площадь каждого из прямоугольников равна 1. При интегрировании суммируются площади трапеций, и это уменьшает расчётное число ударов.

Интеграл (15) можно вычислить

точно, но мы упростим его, используя условие $\mu \gg 1$:

$$n \approx \frac{\sqrt{\mu}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (16)$$

После элементарного интегрирования выражения (16) получаем

$$n = \frac{\pi}{4} \sqrt{\mu}. \quad (17)$$

Точное интегрирование выражения (15) приводит к следующей функции числа ударов от величины μ :

$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\mu} - \ln(\sqrt{\mu}) \right). \quad (18)$$

Интересно проверить полученные формулы точным расчётом с получением целочисленного значения n в зависимости от μ . Результат такой проверки представлен графиком MathCAD (рис. 11).

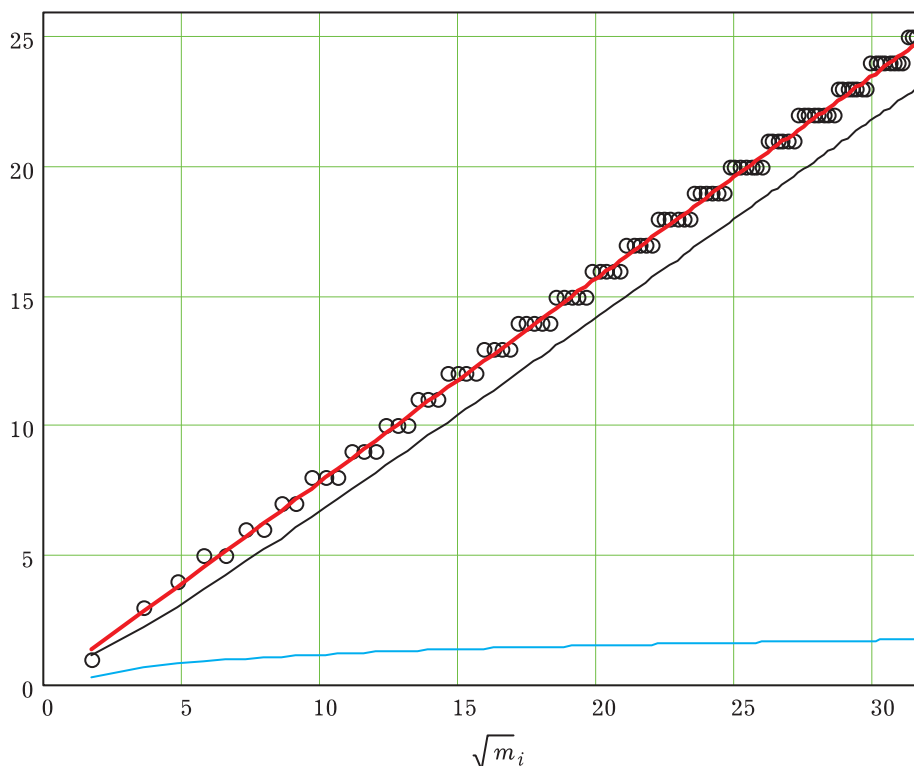


Рис. 11

На данном графике представлена зависимость числа ударов от величины $\sqrt{\mu}$ (начальная точка $\mu = 3$, интервал $\Delta \mu = 10$). «Точки/кружочки» на графике соответствуют численному (дискретному) расчёту числа ударов. Сплошная линия, идущая чуть ниже экспериментальных точек, соответствует непрерывной аппроксимации по «точной» формуле (18). Нижняя линия – график логарифмической «добавки» точной формулы. Линия, идущая по массиву точек (и очень хорошо согласующаяся с экспериментом), соответствует приближённой формуле (17). Не очень простой расчёт поправки к интегралу (8) показывает, что в области больших значений μ формула (17) становится точной (величина поправки точно компенсирует логарифмическую часть формулы (18)).

Теперь определим «линейные размеры» удара. Для этого производную в формуле (14) нужно преобразовать в производную по расстоянию. Сделаем это так. В формуле (13) вернёмся к размерным переменным (по скорости):

$$\Delta v = -\frac{2}{1 + \mu} \left(v + \sqrt{\mu(v_0^2 - v^2)} \right). \quad (19)$$

Для интервала времени между ударами справедливо соотношение:

$$\Delta t = \frac{2s - v \cdot \Delta t}{u}.$$

Здесь s – расстояние от шара до стенки в момент времени, когда шар имеет скорость v , а посредник скорость u . Из этого соотношения получаем

$$\Delta t = \frac{2s}{v + \sqrt{\mu(v_0^2 - v^2)}}. \quad (20)$$

Делим (19) на (20) (при этом $\Delta v \rightarrow dv$, $\Delta t \rightarrow dt$):

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{2 \left(v + \sqrt{\mu(v_0^2 - v^2)} \right)^2}{(1 + \mu) \cdot 2s}. \quad (21)$$

Теперь преобразовываем производную к виду $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ и, учитывая, что $\frac{ds}{dt} = -v$, получаем:

$$\frac{v \cdot dv}{ds} = \frac{2 \left(v + \sqrt{\mu(v_0^2 - v^2)} \right)^2}{(1 + \mu) \cdot 2s}. \quad (22)$$

При интегрировании этого выражения удобнее перейти к безразмерной переменной x :

$$\int_L^s \frac{ds}{s} = (1 + \mu) \int_1^x \frac{x \cdot dx}{\left(x + \sqrt{\mu(1 - x^2)} \right)^2}. \quad (23)$$

Этот интеграл можно вычислить точно, но мы опять воспользуемся условием превосходства μ над единицей и упростим данный интеграл:

$$\int_L^x \frac{ds}{s} = \int_1^x \frac{x \, dx}{\left(1 - x^2 \right) + 2 \frac{x}{\sqrt{\mu}} \sqrt{1 - x^2}}. \quad (24)$$

Если в правом интеграле сделать замену переменной $x = \sin(\phi)$, то упрощение интеграла становится явным

$$\ln \frac{x}{L} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\phi} \frac{\sin(\phi) \cdot d\phi}{\frac{\pi}{2} \cos(\phi) + \frac{2}{\sqrt{\mu}} \sin(\phi)}. \quad (25)$$

После несложного интегрирования¹ получаем формулу зависимости координаты шара от его скорости:

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{x + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \sqrt{1 - x^2}}. \quad (26)$$

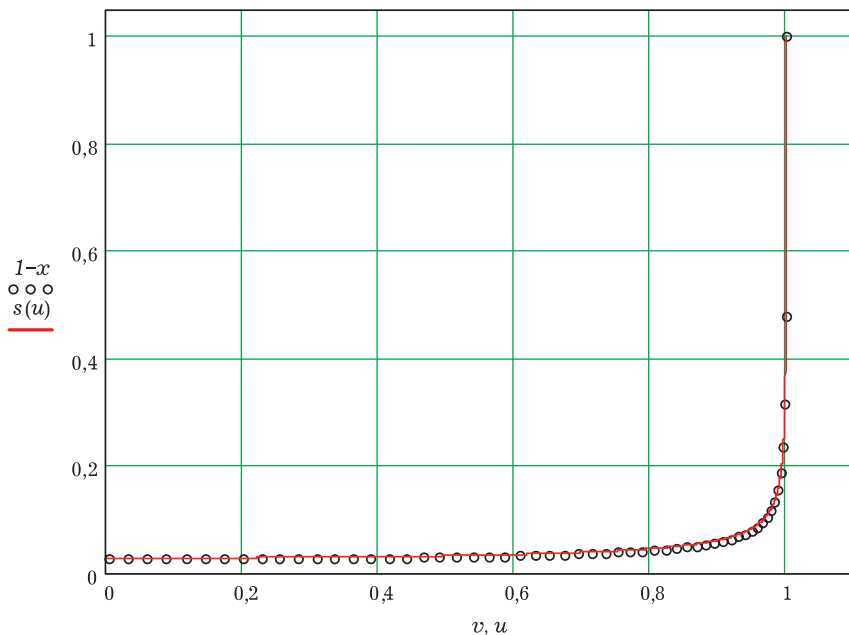


Рис. 12

¹В знаменателе интеграла делаем замену: $\cos(\phi) + a \cdot \sin(\phi) = A \cdot \cos(\phi + \delta)$,

$A = \sqrt{1 + a^2}$, $\operatorname{tg}(\delta) = -a$.

Согласованность формулы (26) с компьютерным расчётом иллюстрирует график на рисунке 12.

«Точки/кружочки» на графике соответствуют численному (дискретному) расчёту координаты шара (вертикальная ось, первоначальное расстояние шара до стенки равно 1) и его скорости (горизонтальная ось, отношение величины скорости шара к её первоначальному значению). Сплошная линия определяет непрерывную аппроксимацию по формуле (26). Формула (26) определяет минимальное расстояние шара от стенки при его остановке:

$$s_{\min} = \frac{2L}{\sqrt{\mu}}. \quad (27)$$

При уменьшении скорости в два раза расстояние до стенки составит

$$s(x=0,5) = \frac{2L}{1 + \frac{\sqrt{3}\mu}{2}} \approx \approx \frac{2L}{\sqrt{3}} s_{\min} \approx 1,15 \cdot s_{\min}. \quad (28)$$

Интересным является то, что результат формулы (18) можно получить на основе термодинамики одномерного газа. Уравнения термодинамики одномерного идеального газа (состоящего только из одной частицы!) записываются в виде:

$$F \cdot L = kT.$$

$$E = \frac{kT}{2}.$$

В первом уравнении (уравнение состояния) F – средняя сила, которая возникает на границах отрезка движения частицы, L – длина отрезка (длина одномерного ящика). Энергетическое уравнение соответствует теореме равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Одна энергетическая степень свободы частицы обладает энергией $kT/2$, где k – постоянная Больцмана.

Используя эти уравнения, можно показать, что отношение теплоёмкостей при постоянной силе и постоянной длине равно 3 (аналог отношения c_p / c_v):

$$\frac{c_p}{c_v} \rightarrow \frac{c_F}{c_L} = 3.$$

Изменение состояния посредника при движении шара можно представить адиабатным сжатием, используя уравнение адиабаты:

$$pV^\gamma = \text{const} \rightarrow F \cdot L^\gamma = \text{const},$$

можно записать:

$$F_0 \cdot L^3 = F_{\max} \cdot s_{\min}^3. \quad (29)$$

Силы определим по изменению импульса частицы. Для начального состояния изменение импульса частицы при ударе о стенку запишем в виде

$$\Delta p = 2 \cdot m(\beta \cdot v).$$

Здесь β – некоторое число (близкое к 1), введённое для согласования термодинамического расчёта с формулой (27). Временной интервал между ударами (процесс сжатия считаем медленным)¹

$$\Delta t = \frac{2L}{\beta \cdot v}.$$

Соответственно сила равна

$$F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m(\beta v)^2}{2L} = \frac{m(\beta v)^2}{L}.$$

Скорость частицы «газа» при максимальном сжатии определяется законом сохранения энергии:

$$M \frac{v^2}{2} = m \frac{u^2}{2} \rightarrow u = \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot v.$$

¹ При первых ударах процесс сжатия нельзя считать медленным.



Изменение импульса частицы газа при ударе о стенку в момент максимального сжатия, стенка неподвижна:

$$\Delta p = 2m \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} \cdot v.$$

Временной интервал удара:

$$\Delta t = \frac{2s_{\min}}{v} \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Величина силы при максимальном сжатии:

$$F_{\max} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{M v^2}{s_{\min}}.$$

После подстановки рассчитанных сил в формулу (29) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{m(\beta v)^2}{L} \cdot L^3 &= \frac{M v^2}{s_{\min}} \cdot s_{\min}^3 \rightarrow \\ \rightarrow s_{\min} &= \beta \cdot L \sqrt{\frac{m}{M}} = \frac{\beta L}{\sqrt{\mu}}. \end{aligned} \quad (30)$$

При $\beta = 2$ термодинамический расчёт минимального расстояния совпадает с результатом формулы (27).

Дополнение (вычисление поправки к числу ударов при переходе от суммирования к интегрированию).

Вернёмся к рис. 10. Как было сказано выше, переход от дискретного к непрерывному уменьшает величину числа ударов. Величина поправки равна сумме площадей уголков прямоугольников, которые отрезают трапеции при интегрировании. Величина площади отдельного уголка (треугольника) определяется соотношением:

$$\Delta n = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\Delta v} \right) \cdot \Delta v \cdot dv. \quad (31)$$

Действительно, в соответствии с формулами (11), (15) подинтегральная функция равна обратной величине изменения скорости при ударе. Её производная по скорости, умноженная на изменение скорости, равна «высоте» треугольника. Умножение высоты на «основание» (dv) и деление на 2 и определяет площадь треугольника (величину неучтенной части числа ударов). Вычисляем производную в формуле (21)

$$\begin{aligned} \Delta n &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\Delta v)^2} \cdot \frac{d(\Delta v)}{dv} \cdot \Delta v \cdot dv = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta v} \cdot \frac{d(\Delta v)}{dv} \cdot dv. \end{aligned} \quad (32)$$

Интегрирование этого выражения определяет полную поправку числа ударов

$$\begin{aligned} \Delta n &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\left(x + \sqrt{\mu(1-x^2)} \right)' \cdot dx}{x + \sqrt{\mu(1-x^2)}} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(x + \sqrt{\mu(1-x^2)} \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \right) = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{\mu}). \end{aligned} \quad (33)$$

Эта поправка точно компенсирует логарифмическую часть формулы (18). Таким образом, формула (17) является точной при расчёте числа ударов в области больших μ .

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Вопроса нет

По окончании лекции П. Дирака задавались вопросы. Один из слушателей поднял руку и сказал:

– Я не понял Вашего заключения.

Дирак молчал. Находящийся на подиуме человек обратился к нему:

– Не угодно ли Вам ответить на вопрос?

– Это не вопрос, – произнёс Дирак, – а утверждение.