



Мукушев Базарбек Агзашулы
 Доктор педагогических наук, профессор
 кафедры физики и информатики
 Семипалатинского государственного
 педагогического института,
 обладатель государственного гранта
 Республики Казахстан «Лучший
 преподаватель вуза – 2007».



Маматреева Сана Оралбековна
 Учитель математики «Назарбаев интеллектуальной
 школы» физико-математического направления,
 г. Семей, Республика Казахстан.

Трансцендентные уравнения в физических задачах

В статье рассматриваются физические задачи, в ходе решения которых получаются трансцендентные уравнения. Поскольку трансцендентные уравнения невозможно решать аналитическим способом, придётся искать другие оптимальные способы их решения. Исследованы следующие методы решения таких уравнений: графический, численный, компьютерный и экспериментальный.

Введение

В теории математических уравнений наряду с классическими уравнениями (линейными, квадратными, тригонометрическими и другими) исследуются и трансцендентные уравнения. Следующие уравнения могут быть примерами трансцендентных уравнений:

$$2^x - \lg x = 10x, \quad \lg x - x^2 - x = 0,$$

$$0,7 \cos x - \sin(1,3 x) = 0.$$

Очевидно, корни этих уравнений невозможно найти аналитическим способом. В математике эти уравнения обычно решают либо графически, либо посредством численных методов. Поскольку с позиции науки математики трансцендентные урав-

нения достаточно хорошо исследованы, мы хотим остановиться на процедуре выбора методов решения, что имеет междисциплинарный характер.

В математической науке при исследовании трансцендентных уравнений недостаточно уделяется внимания их прикладному значению. То есть изучение таких уравнений не подкреплено практическими примерами из физики, химии, биологии. С целью устранения этих пробелов в теории математических уравнений предлагается ряд задач из механики, в процессе решения которых получаются трансцендентные урав-

нения, не решаемые аналитически. Также нами систематизированы и

подобраны оптимальные методы решения подобных задач.

Задачи и решения

Задача 1. На закреплённый шар радиуса R сверху поставлена игрушка Ванька-встанька (рис. 1). Нижняя поверхность игрушки – сферическая с радиусом r , C – центр тяжести игрушки, $OC = 1,9$ см. До какого предельного угла $\beta_{\max}$ можно отклонить игрушку, чтобы она возвратилась в начальное положение? $R = 16$ см, $r = 5,4$ см.

Решение. При отклонении игрушки, например, вправо, центр тяжести смещается (см. рис. 1). Если при этом он окажется левее вертикали AB , проходящей через точку опоры A , то момент силы тяжести будет возвращать игрушку в положение равновесия. Если же центр тяжести окажется правее AB , игрушка упадёт.

Обозначим α – угол поворота игрушки, β – угол поворота радиуса $O'A$. Дуги LA и KA равны (нет проскальзывания), т. е. $\alpha r = \beta R$, откуда

$$\alpha = \beta \frac{R}{r}.$$

Из треугольника OAB имеем:

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\sin(\beta(1 + R/r))},$$

или

$$OB = \frac{r \sin \beta}{\sin(\beta(R/r + 1))}. \quad (1)$$

Игрушка возвратится в исходное положение, если $OC > OB$, т. е.

$$OC > \frac{r \sin \beta}{\sin(\beta(R/r + 1))}.$$

С учётом соотношений $R/r \approx 3$ и

$$\frac{r}{OC} = \frac{5,4}{1,9} \approx 2,8 \text{ получим:}$$

$$\sin 4\beta > 2,8 \sin \beta.$$

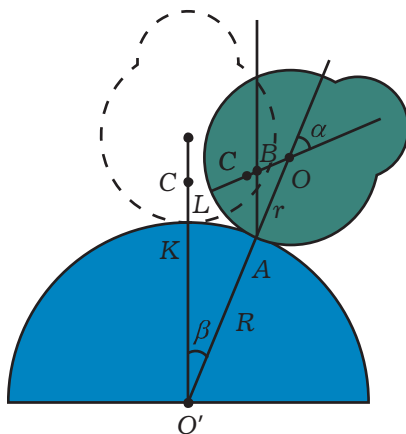


Рис. 1

Чтобы найти предельный угол $\beta_{\max}$, нам предстоит решить тригонометрическое уравнение

$$\sin 4\beta_{\max} = 2,8 \sin \beta_{\max}. \quad (2)$$

Это уравнение не имеет аналитического решения, т. е. его можно отнести к классу *трансцендентных уравнений*.

Первый метод решения уравнения (2) – *графический*.

Для этого построим графики функций $y = \sin 4\beta$ и $y = 2,8 \sin \beta$ посредством прикладной программы Mathcad 14, и из пересечения этих графиков (рис. 2) найдём:

$$\beta_{\max} \approx 0,36 \text{ рад} \approx 20,5^\circ.$$

Значит, при $-20,5^\circ < \beta < 20,5^\circ$ игрушка возвращается в начальное положение.

Второй метод – *численный анализ*. Используем итерационный метод в среде Microsoft Excel. Используя данные графического метода, решение задачи будем искать в интервале $\beta \in (0,3; 0,4)$. Пусть шаг итерации будет равен 0,005.

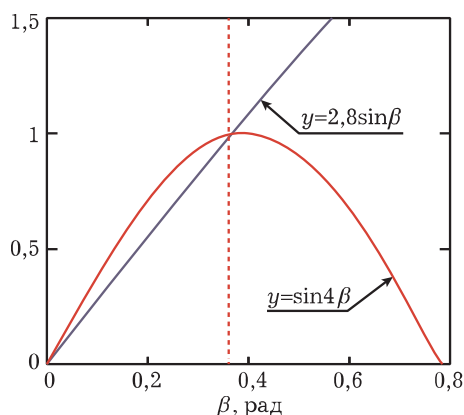


Рис. 2

1. В ячейку B5 введём первое значение аргумента 0,3, а в ячейку N1 – шаг итерации 0,005.

2. В ячейку B6 введём уравнение $=B5 + \$N\1 . Выделив ячейку B6 и

удерживая нажатой кнопку мыши, перемещаем указатель до ячейки B25. Тогда выделяется диапазон B6:B25. В результате значение каждой ячейки данного диапазона будем вычислять по текущей формуле. Например, значение B7 будет вычисляться по формуле $B7 = B6 + \$N\1 , а $B8 = B7 + \$N\1 , и т. д.

3. В ячейку C5 введём формулу $= \text{SIN}(4*B5)$, а в D5 $= 2.8*\text{SIN}(B5)$.

4. Выделив ячейки C5 и D5, удерживая нажатой кнопку мыши, перемещаем указатель до ячеек C25 и соответственно D25. В результате значения ячеек диапазонов C5:C25 и D5:D25 будут вычисляться по текущим формулам.

5. Из полученной таблицы (рис. 3) находим решение задачи. Таким образом, $\beta_{\max} \approx 0,36$ рад.

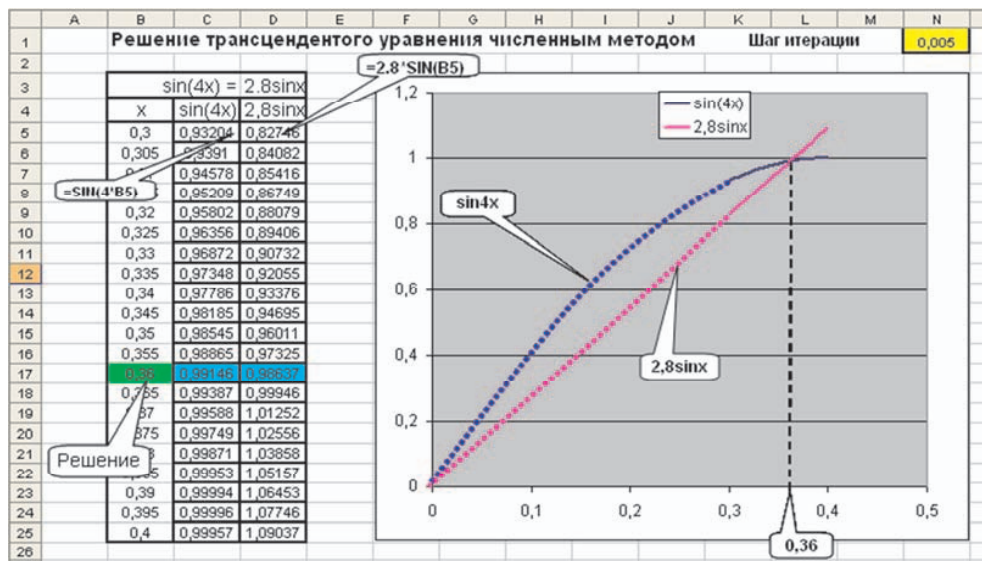


Рис. 3

Третий метод – компьютерный. В качестве компьютерного метода решения уравнения могут использоваться программы на языках Microsoft Excel, Matlab, Mathematica, Mathcad, Pascal, C++ и

др. Ниже предлагается решение уравнения (2) на языке программирования Pascal в среде Delphi. При этом был использован один из методов численного анализа – метод Ньютона (метод хорд).

```

Program Nuton;
uses crt; var x,x1,eps,pf:extended;
i:integer; function f(x:real):real;
begin
  f:=sin(4*x)-2.8*sin(x);
end;
function df(x:real):real;
begin
  df:=4*cos(4*x)-2.8*cos(x);
end;
begin
  clrscr; write('pribligennye znach kornя = '); readln(x1);
  write('neobhodima tosnost = ');
  readln(eps); x:=x1;
  pf:=f(x)/df(x);
  i:=0;
  while abs(pf)>eps do
begin
  x:=x-pf; pf:=f(x)/df(x); inc(i);
  {writeln(x:1:4, pf:10:4);}
end;
writeln('tosnoe znach kornaя = ',x:1:4);
writeln('kolichect iterazi = ',i);
readln;
end.

```

Результаты вычисления: значение корня с заданной приближённое значение корня – 1, точностью 0,3624 радиан, число необходимая точность – 0,0001, итераций – 6.

C:\DOCUMENT-1\1\0016-1\180C-1\DD49-1.EXE

```

pribligennye znach korn = 1
neobhodima tosnost = 0.0001
tosnoe znach korna = 0.3624
kolichect iterazi = 6

```

Четвёртый метод – физический эксперимент. Эксперимент широко используется в естественных науках в качестве метода исследования. Общеизвестно, что в некоторых случаях в физике, химии и биологии те или другие законы и закономерности природы устанавливаются на основе теоретического анализа. Потом эти законы и закономерности перепроверяются посредством всевоз-

можных экспериментов, и они получают как бы «разрешение» на дальнейшее применение в других исследованиях.

В математике дело обстоит иначе. Математические законы или уравнения не перепроверяются посредством эксперимента, а напрямую используются в качестве метода или инструмента в самой математике или в других науках.

Мы далее рассмотрим несколько примеров, в которых покажем пути использования эксперимента в качестве метода решения трансцендентных уравнений. Включение эксперимента в анализ трансцендентных уравнений в физических задачах раскрывает роль и место трансцендентных уравнений в описании природных объектов и явлений, а также обогащает теорию уравнений в математике.

Решение задачи 1 методом физического эксперимента.

1. На основе эксперимента



Оборудование: штангенциркуль, полусфера с транспортиром, «неваляшка».

Решение. С помощью штангенциркуля замеры радиусы полусферы и нижней части игрушки и получили следующие значения: $R = 16$ см, $r = 4$ см. Проведём опыт, как изложено в пункте 1. С помощью транспортира фиксируем точку падения «неваляшки» и находим предельный угол: $\beta_{\max} \approx 10^\circ \approx 0,18$ рад. Из уравнения (1) (задача 1):

$$OB = OC = \frac{r \sin \beta}{\sin(\beta(R/r + 1))}.$$

убедимся, что Ванька-встанька упадёт в условиях отклонения на 20° от вершины полусферы (рис. 4).

2. Используя оборудование, приведённое на рис. 5, нужно найти центр масс «неваляшки».



Рис. 4



Рис. 5

Таким образом, $OC = \frac{4 \cdot \sin 10^\circ}{\sin 5 \cdot 10^\circ} \approx 0,9$ см.

Задача 2. На неподвижном круглом полуцилиндре радиусом R (рис. 6) лежит доска. Толщина доски h , длина l , $\frac{R}{h} = 0,6$.

1) До какого предельного угла $\varphi_{\text{пр}}$ можно отклонить доску от горизонтального положения, чтобы она возвратилась в начальное состояние? Трение велико.

2) При каких значениях $\frac{R}{h}$ доска будет находиться в состоянии устойчивого равновесия?

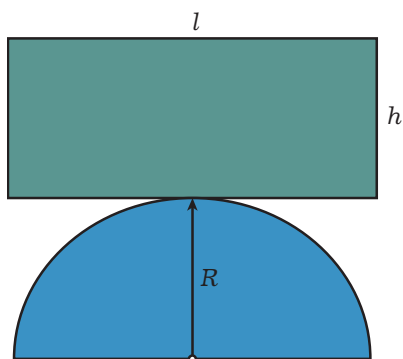


Рис. 6

3) Считая, что полуцилиндр находится на бесконечной горизонтальной плоскости и при этом $\frac{l}{R} =$

$= 5$, $\frac{R}{h} = 0,6$, выясните, возвратится ли доска в начальное состояние при максимальном отклонении от горизонтального положения, когда доска коснётся поверхности стола.

Решение.

1) На первый взгляд может показаться, что равновесие доски вообще неустойчиво, так как центр массы доски лежит выше оси, вокруг которой она может поворачиваться. Однако здесь положение оси вращения не остаётся неизменным, поэтому этот случай требует специального исследования.

Поскольку доска уравновешена в горизонтальном положении, центр полуцилиндра O_1 и центр тяжести доски O_2 лежат на одной вертикали (рис. 7).

Отклоним доску на некоторый угол φ от горизонтали. При отсутствии трения покоя она немедленно соскользнула бы вниз. Чтобы соскальзывание не происходило, мы на поверхность полуцилиндра наклеили наждачную бумагу (шкурку). В этом случае доска «прокатывается» по полуцилиндру без проскальзывания. Точка опоры из

положения A перемещается в новое положение C , а та точка, которой доска до отклонения опиралась о полуцилиндр, переходит в новое положение B .

Поскольку проскальзывание отсутствует, длина дуги AC равна длине отрезка BC : $\overset{\frown}{AC} = BC = R\varphi$. Центр тяжести доски O_2 переходит в положение O_3 . Если вертикаль, проведенная через O_3 , проходит левее новой точки опоры C , то сила тяжести стремится вернуть доску в положение равновесия. Выразим это условие на языке математики. Проведя вертикаль через точку B , видим, что должно быть выполнено условие:

$$BE \leq DC.$$

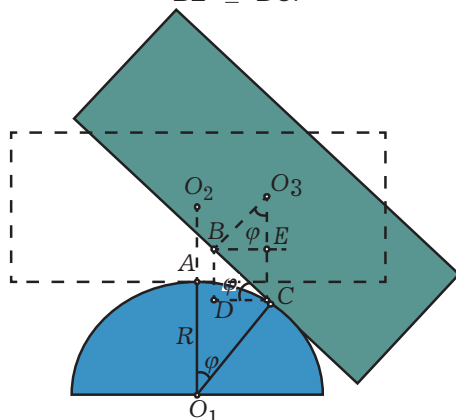


Рис. 7

Так как $BE = O_3B \sin \varphi = \frac{h}{2} \sin \varphi$, а $DC = BC \cos \varphi = R\varphi \cos \varphi$, то из вышеизложенного условия

$$\frac{h}{2} \sin \varphi \leq R\varphi \cos \varphi,$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{2R}{h} \varphi. \quad (3)$$

Подставив $\frac{h}{R} = 0,6$, получим выражение $\operatorname{tg} \varphi \leq 1,2\varphi$. Нам следует решать уравнение $\operatorname{tg} \varphi = 1,2\varphi$. Данное

уравнение *трансцендентное*. При помощи прикладной программы Mathcad 14 изобразив графики функций $y = \operatorname{tg} \varphi$ и $y = 1,2\varphi$, находим решение (рис. 8). Значит, $\varphi_{\text{пр}} \approx 0,70 \text{ рад} \approx 39,9^\circ$.

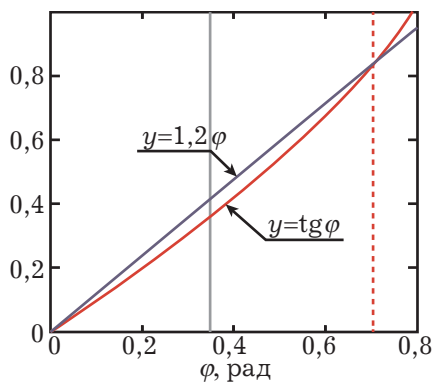


Рис. 8

2) Исследуя неравенство (3), находим: чтобы доска находилась в состоянии устойчивого равновесия, должно выполняться условие $\frac{2R}{h} > 1$.

Следовательно, при $\frac{2R}{h} \leq 1$ доска будет находиться в неустойчивом равновесии: даже при малом отклонении она упадет. Таким образом, под линией $y = \varphi$ расположена область неустойчивого равновесия (рис. 9).

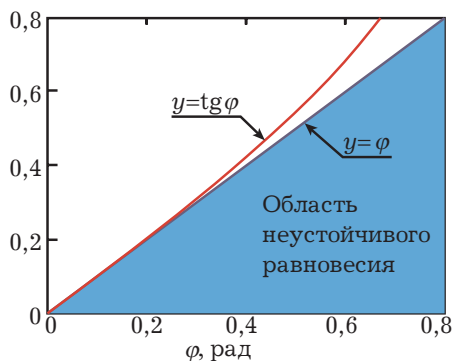


Рис. 9

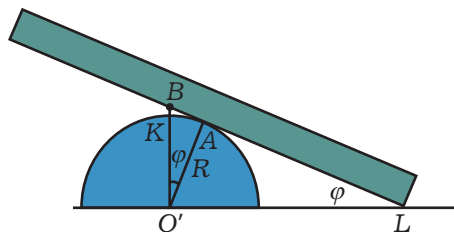


Рис. 10

3) Из рис. 10 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{O'A}{AL} = \frac{O'A}{BL - BA}$;
 $BL = 2,5 R$; $BA = \cup KA = R \varphi$, или
 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{2,5R - R \varphi}$.

Отсюда трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2,5 - \varphi}. \quad (4)$$

Для решения (4) построим графики функций (рис. 11):

$$y = \operatorname{tg} \varphi; \quad y = \frac{1}{2.5 - \varphi}.$$

Значение абсциссы пересечения этих графиков является решением данного трансцендентного уравнения: $\varphi_{\max} \approx 0,46 \text{ рад} \approx 26^\circ < \varphi_{\text{пр}} = 39,9^\circ$, поэтому доска возвратится в начальное положение.

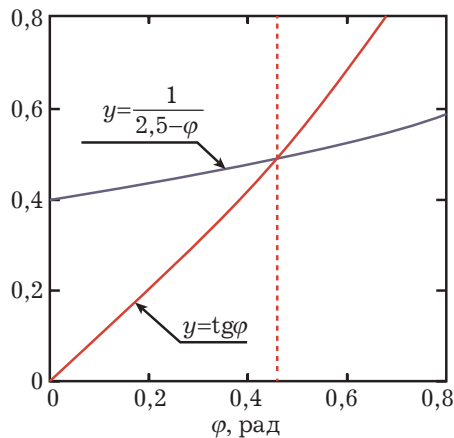


Рис. 11

Задача 3. На покоящийся на гладкой поверхности кубик массой m , соединённый со стенкой пружи-

ной, налетает справа второй кубик массой M (рис. 12). Происходит абсолютно упругий удар, после чего первый кубик начинает колебаться. Какая часть периода колебаний пройдёт до момента второго столкновения кубиков, если а) $m/M = 1/2$, б) $m/M \ll 1$? При каких значениях параметра $\gamma = m/M$ второе столкновение не произойдёт вовсе?

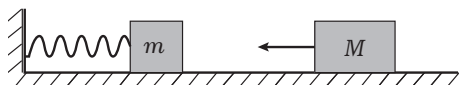


Рис. 12

Решение. Пусть v_0 – начальная скорость второго кубика, v_1 и v_2 – скорости кубиков после первого соударения, причём оба кубика движутся влево. Из законов сохранения импульса и энергии получаем:

$$Mv_0 = mv_1 + Mv_2,$$

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = v_0 \frac{2}{1+\gamma}, \quad v_2 = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

После соударения второй кубик будет двигаться равномерно, и его координата со временем будет изменяться по закону

$$x_2 = v_2 t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t.$$

Первый же кубик начнёт колебаться по закону

$$x_1 = x_m \sin \omega t.$$

Частота гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где k – жёсткость пружины. Амплитуду колебаний x_m найдём из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} \Rightarrow x_m = \frac{v_1}{\omega} = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega}.$$

Таким образом:

$$x_1 = \frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t.$$

Второе соударение кубиков произойдёт при условии $x_1 = x_2$, т. е.

$$\frac{2v_0}{(1+\gamma)\omega} \sin \omega t = v_0 \frac{1-\gamma}{1+\gamma} t.$$

Отсюда

$$2 \sin \omega t = (1-\gamma) \omega t,$$

или

$$2 \sin(2\pi \frac{t}{T}) = (1-\gamma) \omega t,$$

где T – период колебаний, t/T – искомая часть периода.

Обозначим $\pi t/T = z$. Тогда предыдущее уравнение приобретёт вид:

$$2 \sin 2z = (1-\gamma) \omega t.$$

При $\gamma = 1/2$ получаем:

$$\sin 2z = \frac{z}{2}.$$

Начертим графики функций $y = \sin 2z$ и $y = z/2$ (рис. 13) и из их пересечения найдём:

$$z \approx 1,24 \text{ рад}, \quad \pi/T \approx 1,24, \quad \frac{t}{T} \approx 0,39.$$

Если $m \ll M$, т. е. $\gamma \rightarrow 0$, то получаем уравнение

$$\sin 2z = z.$$

Его решением будет (см. рис. 13)

$$z \approx 0,95 \text{ рад}, \quad \text{или} \quad \frac{t}{T} \approx 0,30.$$

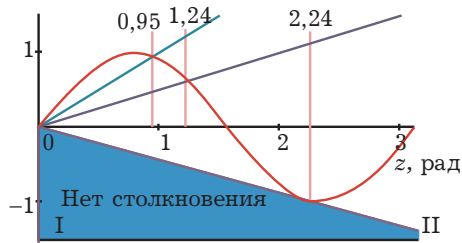


Рис. 13

Второго соударения кубиков не произойдёт, если их координаты больше не совпадут, т. е., говоря на языке графиков, если прямая, выражающая график зависимости ко-

ординаты второго кубика от времени, не пересечёт второй раз синусоиду. Этому соответствуют все прямые линии, выходящие из точки O и находящиеся в закрашенной области между линиями I и II. Линия I соответствует случаю $m/M \rightarrow \infty$ (масса налетающего кубика очень мала). Осталось найти γ для линии II – касательной к синусоиде. Как видно из рисунка 13, этой линии соответствует значение $z \approx 2,24$ рад. Отсюда

$$\gamma = 1 - \frac{\sin 2z}{z} \approx 1,44.$$

Итак, чтобы не произошло второго столкновения, должно выполняться условие

$$1,44 < \gamma < \infty.$$

Задача 4. Нить, обёрнутая вокруг неподвижного диска радиусом r , образует полуокружность (рис. 14). Один конец нити закреплён в точке A , ко второму концу нити привязан грузик, который удерживается в точке B (точки A и B находятся на одной вертикали). В некоторый момент грузик отпускается. Какая часть нити останется в соприкосновении с диском, когда грузик достигнет наивысшего положения? Трением пренебречь.

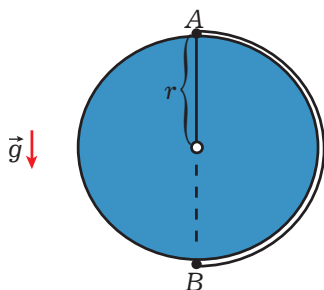


Рис. 14

Решение. По закону сохранения энергии точка B и точка C (точка достижения наивысшего положения грузика) находятся на одной горизонтали (рис. 15). Далее находим

$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{CD}{r}$. С другой стороны, длина дуги BD равна длине отрезка CD : $\cup BD = CD = r\theta$. Итак, $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \theta$.

Графическое решение данного трансцендентного уравнения (рис. 16) даёт значение $\theta = 2,32$ радиан.

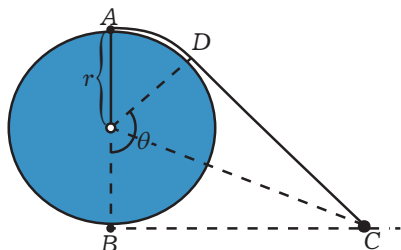


Рис. 15

Таким образом, $\frac{\cup AD}{\cup AB} = \frac{\pi - \theta}{\pi} \approx 0,26$.

Задача 5. Используя данные задачи 1, найдите условие устойчивости игрушки Ванька-встанька в зависимости от положения центра масс.

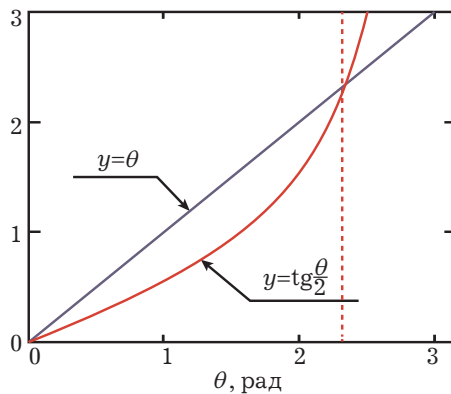


Рис. 16

Решение. Если $\frac{r}{OC} = 4$, то мы

получим следующее неравенство: $\sin 4\beta \leq 4\sin\beta$. Когда $\beta = 0$, выполняется равенство. Если β будет расти, тогда выполняется неравенство $\sin 4\beta < 4\sin\beta$ (рис. 17).

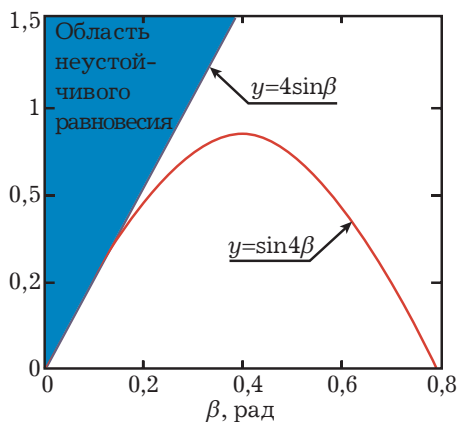


Рис. 17

При $\frac{r}{OC} \geq 4$, или $OC \leq \frac{r}{4} = 1,4$ см,

игрушка будет находиться в неустойчивом положении. Чтобы игрушка находилась в состоянии устойчивого равновесия, должно выполняться условие $OC \geq \frac{r}{4} = 1,4$ см.

Задача 6. На полуцилиндре с радиусом R покоится обруч, его радиус r . В нижней точке обруча прикреплен массивный маленький шарик. Массу обруча считать равной нулю. До какого предельного угла β можно отклонить обруч, чтобы он возвратился в начальное положение? $R = 1,8r$.

Решение. При предельном повороте маленький массивный шарик приходит в положение В. При дальнейшем отклонении обруч может упасть (рис. 18). Обозначим α – угол поворота обруча, β – угол поворота радиуса R . Как в решении задачи 1, напомним $\alpha r = \beta R$ (нет проскальзывания), откуда

$$\alpha = \beta \frac{R}{r}.$$

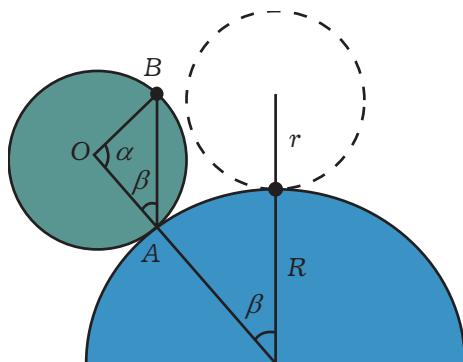


Рис. 18

Из треугольника OAB имеем:

$$\begin{aligned} \frac{OB}{\sin \beta} &= \frac{AO}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{r}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{r}{\sin(\beta(1 + R/r))} \end{aligned}$$

Принимая во внимание $R = 1,8r$ и $OB = AO = r$, получим уравнение $\sin 2,8\beta = \sin \beta$. Графическое решение данного уравнения отражено на рис. 19: $\beta \approx 0,83$ радиан.

Эту задачу можно решить и аналитически.

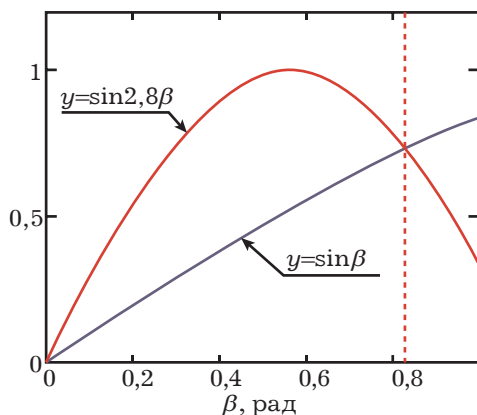


Рис. 19

Литература

1. Мукушев Б.А. Метод графических оценок // Квант. – 1989, №12.