



Подлесный Дмитрий Владимирович
Заместитель директора по развитию, научный руководитель ГБОУ РМ «Республиканский лицей», кандидат педагогических наук, доцент, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, народный учитель Республики Мордовия.

Расчёт электростатических полей методом изображений

В статье рассматриваются классические вопросы, связанные с расчётом напряжённости результирующего электрического поля, создаваемого точечным зарядом и наведёнными (индуцированными или поляризационными) зарядами, возникающими на находящихся рядом телах (проводниках или диэлектриках). В основу расчётов положен метод электростатических изображений. При этом авторский подход к задачам несколько отличается от подхода классиков (см., например, [1, §§23-24] и [2, §2.5]), в первую очередь, при рассмотрении однородного изотропного диэлектрика, где учёт поляризационных зарядов проводится аналогично учёту индуцированных зарядов проводника.

1. О методе электростатических изображений

Представим себе ситуацию, когда рядом с точечным зарядом q находится проводящее тело или тело из диэлектрика. Сразу оговорим, что мы рассматриваем только однородные и изотропные диэлектрики, значит, вправе пользоваться соотношением $\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ в каждой его точке, где $\vec{D}$ – вектор электрической индукции, $\vec{E}$ – вектор напряжённости электрического поля, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, а ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, одинаковая во всех его точках (для вакуума $\varepsilon=1$).

Для определённости заряд q считаем положительным. Тогда на по-

верхности тела, находящегося рядом с нашим зарядом (рис. 1), появятся так называемые наведённые (индуцированные или поляризационные) электрические заряды. В случае, если тело представляет собой неоднородный диэлектрик, поляризационные заряды будут появляться не только на его поверхности, но и внутри, как-то распределяясь по его объёму. Однако, как уже было сказано выше, такая ситуация выходит за рамки нашего рассмотрения.

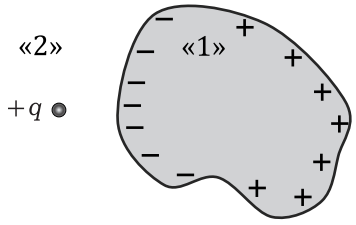
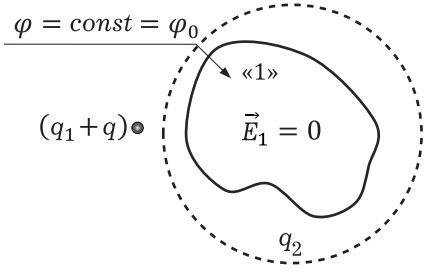


Рис. 1

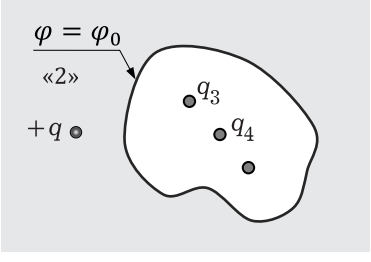
В соответствии с принципом суперпозиции напряжённость результирующего электрического поля во всех областях пространства, отмеченных на рисунке 1, то есть в областях «1» и «2» («1» – область пространства внутри тела; «2» – вне тела), находится как векторная сумма напряжённостей полей, создаваемых как нашим точечным зарядом q, так и наведёнными на теле зарядами.

В общем случае, нахождение результирующего поля во всех областях пространства представляет собой математически сложную задачу, однако в ряде простых ситуаций эта задача решается при помощи метода электростатических изображений. Суть этого метода основана на теореме единственности (см. [1, §22 и §29, п.6]; [2, §2.5] и заключается, в некотором смысле, в угадывании системы точечных зарядов q_i, которые создают точно такое же электрическое поле, как и наведённые на теле заряды, причём часть из этих зарядов q_i «работает» (создаёт электрическое поле) в области «1» пространства, а другая часть – в области «2». Эти заряды q_i и называют электростатическими изображениями нашего заряда q. При этом алгебраическая сумма зарядов, работающих в области «1», как и алгебраическая сумма зарядов, работающих в области «2», равняется нулю.

В случае проводящего тела напряжённость поля в области «1», то есть внутри проводника, равна нулю, и, следовательно, индуцированные на поверхности проводника заряды в этой области работают как точечный заряд $q_1 = -q$, помещённый в ту же самую точку, где находится заряд q! (рис. 2а).



а)



б)

Рис. 2

Но как же быть с потенциалом тела φ_0, в общем случае отличным от нуля, спросите Вы? А с алгебраической суммой зарядов, работающих в области «1»? Эта проблема решается просто! К заряду $q_1 = -q$ добавляется заряд $q_2 = +q$, равномерно распределённый по поверхности сферы такого радиуса R_0, чтобы имело место быть равенство: $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_0}$. Введение заряда q_2 описанным образом снимает обозначенные вопросы. Не нарушая равенства нулю напряжённости электрического поля внутри проводника, мы добиваемся, что потенциал внутри тела становится равным заданному значению φ_0, причём

$$q_1 + q_2 = 0.$$

Остальные заряды $q_i (i \neq 1;\ 2)$ создают поле в области «2», то есть вне проводника (рис. 2б). Их количество может оказаться равным одному, двум, трём, одним словом, конечному числу, а может быть и бесконечно большим, но всегда их алгебраическая сумма будет равна нулю: $q_3 + q_4 + ... = 0$. В основу нахождения этих зарядов положено, как правило, обеспечение на поверхности проводника заведомо известного постоянного потенциала φ_0 и непрерывности потенциала φ при переходе через рассматриваемую поверхность. Этот потенциал либо задаётся, либо находится из каких-то соображений.

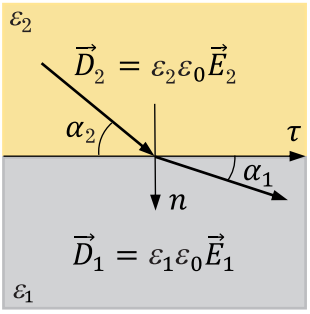


Рис. 3

В случае диэлектрического тела значение зарядов q_i и их расположение подбирают так, чтобы удовлетворить граничным условиям для векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$, являющимся следствием теоремы о циркуляции электростатического поля и теоремы Гаусса (см., например, [1, §14] и [2, §3.5]). Суть этих условий заключается в постоянстве касательной составляющей вектора напряжённости $\vec{E}$ и нормальной составляющей вектора индукции $\vec{D}$ при переходе через границу диэлектриков (рис.3):

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \rightarrow E_1 \cos\alpha_1 = E_2 \cos\alpha_2; \quad (1)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \varepsilon_1 E_1 \sin\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2 \sin\alpha_2. \quad (2)$$

Метод электростатических изображений позволяет лишь в немногих случаях, к сожалению, рассчитывать электрическое поле. Рассмотрим ряд из них и начнём с самого простого примера.

2. Точечный заряд и проводящее полупространство

Точечный заряд $+q$ находится в вакууме на расстоянии h от проводящей среды, занимающей всё нижнее полупространство (рис. 4). Требуется получить выражение для напряжённости электрического поля в произвольной точке A, находящейся в вакууме, а также найти силу F, действующую на этот заряд.

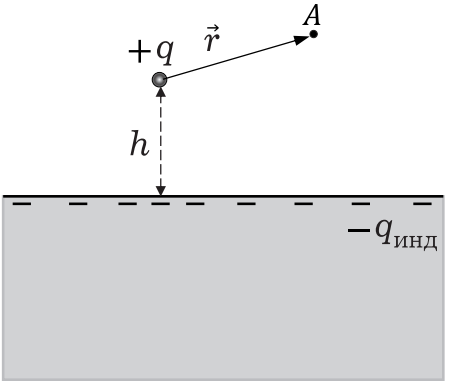


Рис. 4

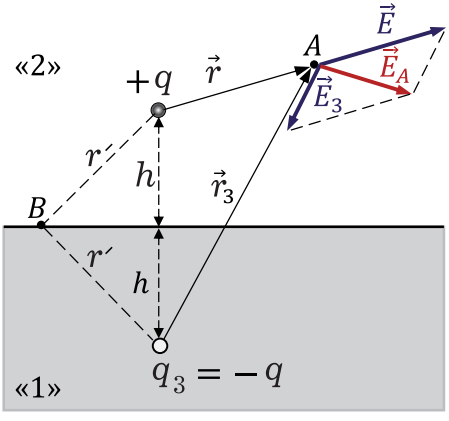


Рис. 5

Электрическое поле во всех точках пространства будет создаваться нашим точечным зарядом $+q$ и индуцированным зарядом $-q_{\text{инд}}$, который распределится по поверхности проводника так, чтобы напряжённость результирующего электрического поля в проводнике стала равной нулю. Что же касается потенциала проводника, уходящего в бесконечность, то он также должен принять нулевое значение (разумеется, если мы полагаем, что потенциал бесконечно удалённой точки принимается за ноль). Такое возможно, если внутри проводника (в области «1») индуцированный заряд работает как точечный заряд $q_1 = -q$, помещённый в ту же самую точку, где находится заряд q, как уже отмечалось в предыдущем пункте 1 нашего изложения. В то же время, руководствуясь соображением симметрии, мы вправе сделать вывод, что в вакууме (в области «2») индуцированный заряд работает как такой же по величине точечный заряд q_3 $(q_3 = q_1 = -q)$, симметрично расположенный относительно поверхности (рис. 5). При этом нетрудно убедиться, что потенциал электрического поля в произвольной точке B, находящейся в непосредственной близости к поверхности проводника, также обращается в ноль:

$$\varphi_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_3}{r'} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r'} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r'} = 0.$$

С учётом вышеизложенного и на основании принципа суперпозиции нетрудно записать выражение для напряжённости поля в точке A (см. рис. 5):

$$\vec{E}_A = \vec{E} + \vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_3}{r_3^3}\vec{r}_3 =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}_3}{r_3^3}\right).$$

Принимая во внимание, что взаимодействие точечного заряда q с индуцированным зарядом проводника эквивалентно его взаимодействию с зарядом-изображением q_3, на основании закона Кулона находим искомую силу:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2h)^2}.$$

В случае, если мы имеем дело не с проводящим полупространством, а с проводящей тонкой плоской бесконечной пластиной, то полученные результаты останутся в силе. В самом деле, мысленно удалим из рассмотренного нами проводящего полупространства всю проводящую среду за исключением тонкого слоя у поверхности. В итоге мы придём к тонкой пластине, причём никаких изменений электрического поля при этом не произойдёт, поскольку мы удаляем области проводника, не несущие электрических зарядов.

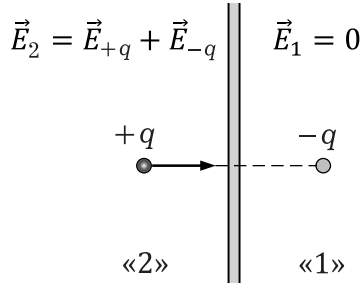


Рис. 6

Таким образом, если точечный заряд $+q$ находится рядом с проводящей тонкой плоской бесконечной пластиной (рис. 6), то по другую сторону пластины напряжённость электрического поля равна нулю, а заряд будет взаимодействовать с индуцированным зарядом точно так же, как с точечным зарядом-изображением $q_3 = -q$.

Если по разные стороны от рассматриваемой пластины поместить точечные заряды q и Q на расстояниях h и H от неё соответственно (рис. 7), то заряды не будут «чувствовать» друг друга. Каждый из них будет взаимодействовать только со своим изображением, при этом силы, действующие на заряды, находятся на основании закона Кулона:

$$F_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{(2h)^2};\quad F_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{(2H)^2}.$$

Полученными результатами можно пользоваться и в случае проводящей пластины конечных размеров. Важно при этом, чтобы заряды находились от пластины на расстояниях много меньших её размеров и располагались далеко от её краёв.

В заключение данного пункта нашего изложения предлагаем читателю самостоятельно найти работу, которую необходимо совершить, чтобы заряды q и Q, описанные выше (рис. 7), удалить от пластины на бесконечно большие расстояния. Важно учесть при этом, что при перемещении зарядов перемещаются и их изображения. Приведём ответ на поставленный вопрос:

$$A = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q^2}{h}+\frac{Q^2}{H}\right).$$

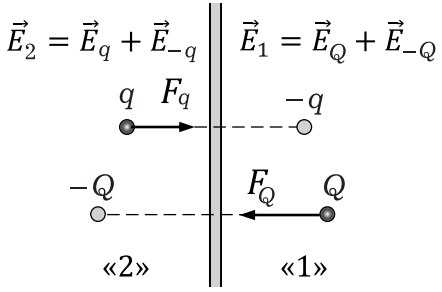


Рис. 7

Отметим, что ответ может получиться в два раза больший, если неправильно подойти к решению с позиций изменения энергий взаимодействия зарядов и их изображений.

Дело в том, что, записывая начальную энергию взаимодействия, например, заряда q с его изображением $-q$, можно формально записать $W_q = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{2h}$, что будет неверно! Так можно записывать, если заряд $-q$ реальный, а электрическое поле этих зарядов существует во всём пространстве. В нашем же случае поле пары зарядов q и $-q$ существует только в полупространстве, поэтому энергия взаимодействия будет в два раза меньше по модулю и равна:

$$W_q = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{2h}.$$

3. Точечный заряд и диэлектрическое полупространство

3.1. Заряд находится в вакууме

Точечный заряд $+q$ находится в вакууме на расстоянии h от диэлектрической среды с диэлектрической проницаемостью ε, занимающей всё нижнее полупространство (рис. 8). Требуется получить выражение для напряжённости электрического поля в произвольной точке A, находящейся в вакууме, и в произвольной точке C в диэлектрике, а также найти силу F, действующую на заряд q.

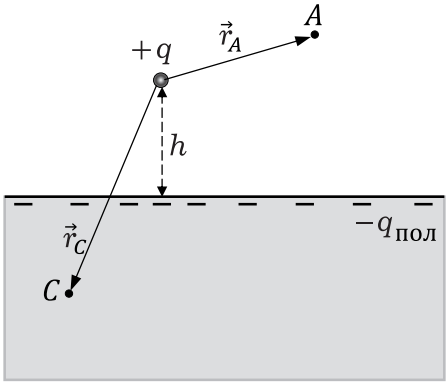


Рис. 8

Электрическое поле во всех точках пространства будет создаваться нашим точечным зарядом $+q$ и поляризационным зарядом $-q_{\text{пол}}$, который как-то распределится по поверхности диэлектрика. Мы фактически имеем аналогичную картину, как и с проводящей средой. Поэтому попробуем заменить поляризационный заряд двумя точечными заря-

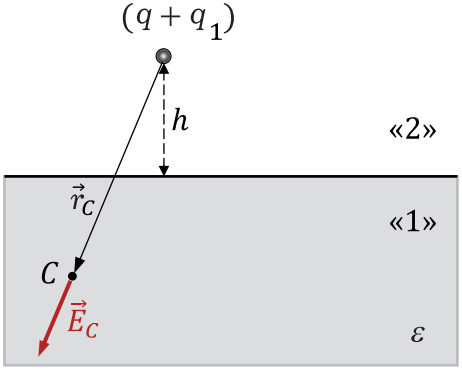


Рис. 9

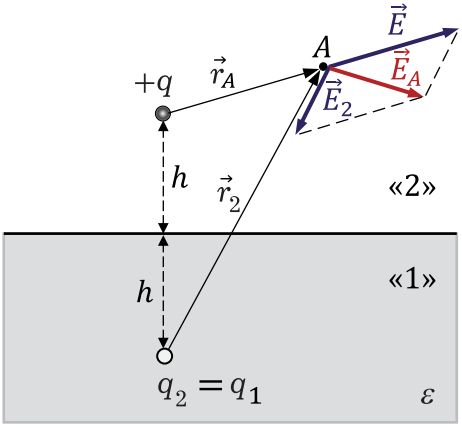


Рис. 10

дами $q_1 (q_1 < 0)$ и $q_2 (q_2 = q_1$ в силу симметрии), разместив их как и в ситуации с проводником (рис. 9 и рис. 10).

Если нам удастся при этом выполнить граничные условия (1) и (2) и найти величину заряда q_1 (а, значит, и $q_2 = q_1$), то задача будет решена. Выражения для напряжённостей полей будут иметь вид:

$$\vec{E}_C = \vec{E} + \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q + q_1}{r_C^3} \vec{r}_C; \qquad (3)$$

$$\vec{E}_A = \vec{E} + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r_A^3} \vec{r}_A + \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 \right). \qquad (4)$$

Осталось дело за малым – записать граничные условия в произвольной точке границы G (рис. 11) и найти заряды q_1 и q_2.

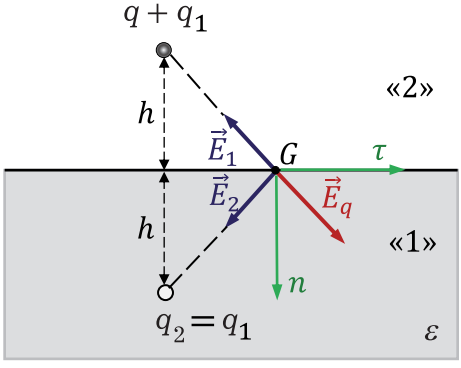


Рис. 11

Напомним, что поле $\vec{E}_1$ существует только в области «1» (в диэлектрике), поле $\vec{E}_2$ – в области «2» (в вакууме), а поле $\vec{E}_q$ существует и в области «1», и в области «2».

Нетрудно заметить, что граничное условие (1) приводит к равенству: $q_2 = q_1$, что собственно и предполагалось ранее. Второе граничное условие (2) после несложных сокращений приводит нас к уравнению:

$$(q_1 + q_2)\varepsilon = q - q_2.$$

С учётом этого находим искомые заряды:

$$q_2 = q_1 = -q \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Подставляя найденные заряды q_1 и q_2 в выражения (3) и (4), окончательно имеем:

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{r_C^3} \vec{r}_C;$$

$$\vec{E}_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\vec{r}_A}{r_A^3} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right).$$

Силу, действующую на заряд q, найдём в соответствии с законом Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q^2}{(2h)^2}.$$

Заметим, что в предельном переходе при $\varepsilon \to \infty$ мы приходим к ранее полученному результату в случае с проводящим полупространством.

Обратим внимание также на часто встречающуюся ошибку. Почему-то многие ошибочно считают, что, как только появляется диэлектрик, то напряжённость электрического поля уменьшается именно в ε раз. Да, такое иногда случается, например, когда всё пространство заполняется однородным изотропным диэлектриком, а также в ряде случаев, обладающих симметрией (плоской, сферической, цилиндрической). Заметим, что в рассмотренном примере напряжённость электрического поля в диэлектрике, как это видно из выражения для $\vec{E}_C$, уменьшается в $\frac{\varepsilon + 1}{2}$ раз!

3.2. Заряд находится в диэлектрике

Рассмотрим теперь ситуацию, когда точечный положительный заряд q находится в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε, занимающем всё нижнее полупространство (рис. 12), и получим выражение для напряжённости электрического поля в произвольной точке A, находящейся в вакууме. Выражение для напряжённости электрического поля в самом диэлектрике предлагаем читателю получить самостоятельно.

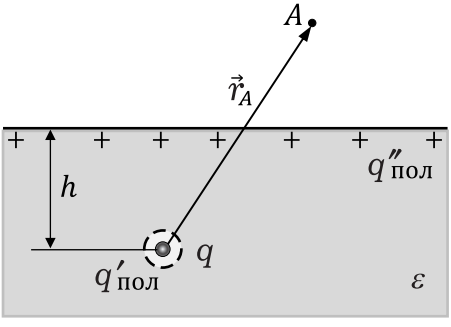


Рис. 12

Электрическое поле во всех точках пространства будет создаваться нашим точечным зарядом q, облаком поляризационного заряда $q'_{\text{пол}}$, окружающим наш заряд q, и поляризационным зарядом $q''_{\text{пол}}$, который как-то распределится по поверхности диэлектрика.

Поляризационный поверхностный заряд $q''_{\text{пол}}$ попробуем заменить двумя точечными зарядами q_1 и q_2 ($q_2 = q_1$ в силу симметрии), разместив их как и в предыдущем примере, то есть симметрично относительно поверхности диэлектрика (рис. 13).

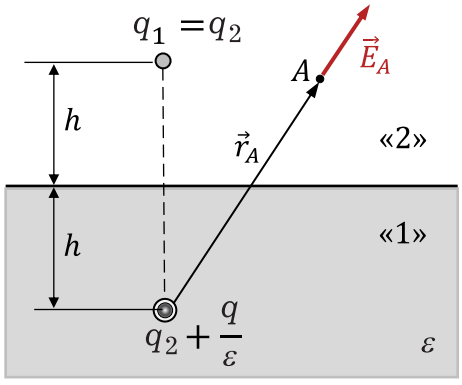


Рис. 13

Что же касается поляризационного заряда $q'_{\text{пол}}$, то он формируется в непосредственной близости с зарядом q, где превалирует его (заряда q) силовое воздействие над силовыми воздействиями других зарядов. Поэтому этот заряд является точно таким же, как и в ситуации, когда диэлектрик заполняет всё пространство и в сумме с нашим зарядом q равняется q/ε ($q'_{\text{пол}} + q = q/\varepsilon$). Именно поэтому, когда всё пространство заполняется диэлектриком, напряжённость электрического поля, создаваемого точечным зарядом, уменьшается в ε раз!

Таким образом, в области «1» (в диэлектрике) «работают» заряды q_1 и q/ε, а в области «2» (в вакууме) – заряды q_2 ($q_2 = q_1$) и q/ε, находящиеся в одной точке – в точке расположения нашего точечного заряда q.

Запишем граничные условия в произвольной точке границы G (рис. 14) и найдём заряды q_1 и q_2. Здесь, как и в предыдущем пункте 3.1, граничное условие (1) приводит к равенству:

$$q_2 = q_1,$$

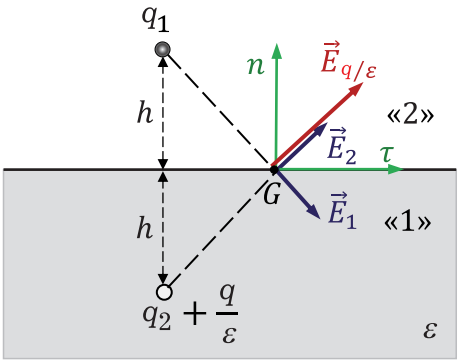


Рис. 14

что собственно и предполагалось ранее. Второе граничное условие (2) после несложных преобразований приводит нас к уравнению:

$$q_2 + \frac{q}{\varepsilon} = \varepsilon\left(\frac{q}{\varepsilon} - q_1\right).$$

С учётом этого находим заряды q_1 и q_2:

$$q_2 = q_1 = q \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

Для напряжённости электрического поля в точке A (рис. 13) окончательно имеем:

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2 + \frac{q}{\varepsilon}}{r_A^3}\vec{r}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{r_A^3}\vec{r}_A.$$

Удивительно, но и здесь оказалось, что поле в вакууме уменьшилось из-за диэлектрика в $\frac{\varepsilon + 1}{2}$ раз.

4. Точечный заряд и проводящий шар

Рассмотрим ситуацию, когда точечный заряд q находится на расстоянии r от центра незаряженного проводящего шара радиуса R ($r > R$), и найдём силу F, действующую на этот заряд (рис. 15).

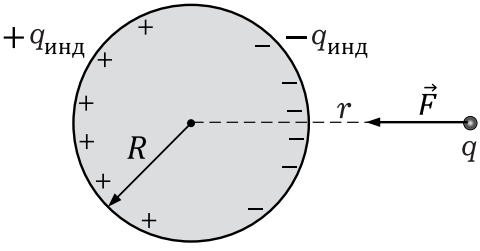


Рис. 15

Сила, действующая на наш точечный заряд q, который для определённости будем считать положительным, обусловлена индуцированными зарядами $-q_{\text{инд}}$ и $+q_{\text{инд}}$, возникающими на поверхности шара вследствие явления электростатической индукции. Заметим, что алгебраическая сумма этих зарядов равна нулю, так как шар не заряжен. Эти заряды распределяются по поверхности шара так, чтобы напряженность результирующего поля внутри шара стала равна нулю. При этом отрицательные индуцированные заряды будут находиться ближе к заряду q, чем положительные. В результате чего заряд q будет притягиваться к шару. Тоже самое произойдёт и в случае, если шар не сплошной, а представляет собой тонкостенную проводящую сферическую оболочку.

Как и раньше, для нахождения искомой силы постараемся заменить индуцированные заряды зарядами-изображениями. Забегая вперёд, скажем, что это удаётся сделать, причём этих зарядов-изображений у нас будет два.

Как уже отмечалось в разделе 1, в основу нахождения этих зарядов может быть положено обеспечение на поверхности проводника заведомо известного постоянного потенциала φ_0. Этот потенциал нам изначально не задан, однако может быть легко найден из следующих соображений.

Поскольку напряжённость электрического поля внутри шара равна нулю, то все точки шара, как внутри, так и на его поверхности будут иметь один и тот же потенциал. Легко найти при этом потенциал центра шара. На основании принципа суперпозиции этот потенциал равен сумме потенциалов, создаваемых нашим точечным зарядом q и точечными зарядами Δq_i, на которые мысленно можно разбить индуцированный на поверхности шара заряд:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r}+\sum_i\frac{\Delta q_i}{R}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r}+\frac{1}{R}\sum_i\Delta q_i\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}. \qquad (5)$$

Здесь мы учли, что $\sum_i \Delta q_i = 0$, так как шар не заряжен.

Таким образом, наша задача подобрать точечные заряды $(q_3, q_4, \ldots)$ и указать места их расположения, обеспечивающие вместе с зарядом q значение потенциала φ_0 на поверхности шара, определяемое выражением (5). Мы умышленно не используем здесь обозначение q_1 и q_2, подразумевая, что заряд $q_1 = -q$, помещаемый в точку расположения заряда q, заменяет своим полем поле индуцированного заряда во внутренней области шара, компенсирующее там поле заряда q, а заряд $q_2 = q$, равномерно распределён по поверхности сферы радиуса r и обеспечивает необходимое значение φ_0 потенциала во всех точках внутри шара, не нарушая там равенства нулю напряжённости результирующего поля.

Сначала подберём заряд q_3, который своим потенциалом компенсирует потенциал заряда q в произвольной точке P поверхности шара. Разместим этот заряд так, как показано на рис. 16. Почему так, спросите Вы? А потому, что кто-то когда-то до этого додумался. И было это сделано ещё задолго до выхода в свет прекрасной книги [1], где эта методика применяется при аналогичном рассмотрении в §23.

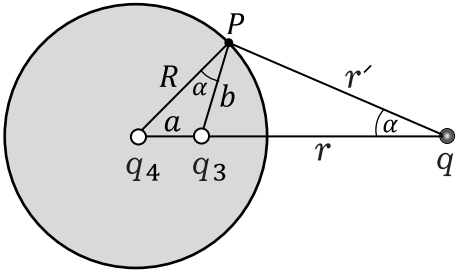


Рис. 16

Итак, заряд q_3 помещаем на расстоянии a от центра шара (рис. 16). Это расстояние найдём из подобия треугольников ($\triangle Pqq_4 \sim \triangle q_3Pq_4$):

$$\frac{a}{R}=\frac{R}{r},\rightarrow a=\frac{R^2}{r}.$$

Видим, что значение расстояния a не зависит от положения точки P.

Заметим, что отношение расстояний b и r', показанных на рис. 16, можно также найти из подобия треугольников:

$$\frac{b}{r'}=\frac{R}{r}.$$

Теперь выразим в точке P суммарный потенциал φ, создаваемый зарядами q и q_3, и приравняем его к нулю:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r'}+\frac{q_3}{b}\right)=0.$$

С учётом предварительных замечаний из последнего уравнения находим:

$$q_3 = -q\frac{b}{r'} = -q\frac{R}{r}.$$

Если теперь в центр шара поместить заряд

$$q_4 = +q\frac{R}{r},$$

то потенциал точки P поверхности шара примет необходимое значение φ_0:

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r'}+\frac{q_3}{b}+\frac{q_4}{R}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}=\varphi_0.$$

Таким образом, нам удалось найти заряды-изображения и свести задачу о взаимодействии точечного заряда с индуцированными на сфере зарядами к задаче о взаимодействии точечного заряда с электрическим диполем (рис. 17).

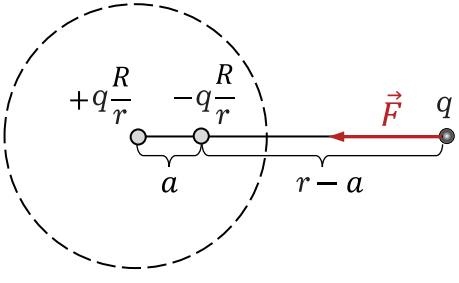


Рис. 17

Теперь без особых затруднений находим искомую силу, действующую на наш точечный заряд:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q^2\frac{R}{r}\left(\frac{1}{(r-a)^2}-\frac{1}{r^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q^2\left(\frac{R}{r}\right)^3\cdot\frac{2r^2-R^2}{(r^2-R^2)^2}.$$

Мы рассмотрели взаимодействие точечного заряда с незаряженным проводящим шаром. В случае, если проводящий шар имеет заряд Q, то наши рассуждения останутся прежними. Правда, потенциал шара изменится и станет равным:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r}+\sum_i\frac{\Delta q_i}{R}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r}+\frac{1}{R}\sum_i\Delta q_i\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{q}{r}+\frac{Q}{R}\right).$$

Это никак не отразится на значении заряда q_3, а вот к заряду q_4 надо добавить заряд шара Q. В итоге, в центр шара необходимо поместить заряд q_4' :

$$q_4' = q_4+Q = q\frac{R}{r}+Q.$$

С учётом этого для силы взаимодействия имеем:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\left(\frac{q\frac{R}{r}}{(r-a)^2}-\frac{q\frac{R}{r}+Q}{r^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\left(\frac{qRr}{(r^2-R^2)^2}-\frac{qR+Qr}{r^3}\right).$$

Заметим, что сила взаимодействия, рассчитанная по этой формуле, может оказаться и отрицательной. Ничего страшного в этом нет. Просто при определённом положительном значении заряда Q притяжение переходит в отталкивание. Не сомневаемся, читатель без особого труда сможет найти это значение.

В заключение предлагаем читателю самостоятельно найти силу, действующую на точечный заряда q, находящийся на расстоянии r от центра тонкостенной проводящей сферической оболочки внутреннего радиуса R $(R > r)$, несущей на себе электрический заряд Q (рис. 18).

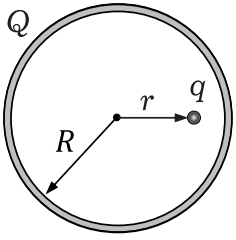


Рис. 18

[Ответ: $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 R r}{(R^2 - r^2)^2}$.]

Рекомендуем читателю познакомиться также с задачами №4 и №6 к §23 учебного пособия [1]. В первой из них, точечный заряд находится внутри двугранного угла, образованного плоскими проводящими бесконечными пластинами (рис. 19), а во второй – точечный заряд находится над полусферическим бугром, имеющемся на бесконечной плоской поверхности проводника (рис. 20).

И последнее замечание. Оно касается взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром. К сожалению, поляризационные заряды такого шара не удаётся заменить конечным числом зарядов-изображений, как это было сделано для индуцированных зарядов шара проводящего. Решение задачи с шаром из диэлектрика приведено в задачнике [3] (задача №171). Кстати, в задачнике [3] много интересных задач на рассмотренную в статье тему, правда, решение их требует от читателя специального физико-математического образования, существенно выходящего за рамки школьной программы.

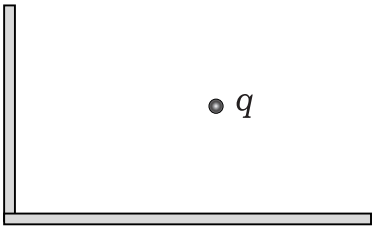


Рис. 19

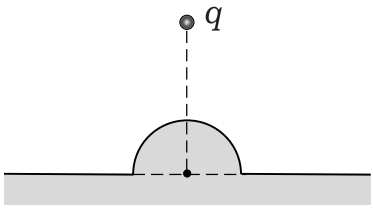


Рис. 20

* * *

Автор искренне благодарен учителям физики ГБОУ РМ «Республиканский лицей» А.А. Кирееву и Т.В. Саушкиной, за внимательное прочтение рукописи статьи и ряд ценных замечаний.

Литература

1. *Д.В. Сивухин*. Общий курс физики. Учебное пособие: Для вузов. В 5 т. Т. 3. Электричество. – 5-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 656 с. – ISBN 5-9221-0673-3.

2. *И.Е. Иродов*. Электромагнетизм. Основные законы. – 3-е изд., испр. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 352 с.: ил. – ISBN 5-93208-001-9.

3. *В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин*. Сборник задач по электродинамике. – Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 640 стр. – ISBN 5-93972-155-9.