

Курносов Валерий Михайлович
Учитель физики СОШ № 33
г. Петропавловск-Камчатский



Принцип эквивалентности и решение задач школьного курса физики

Рассказано о принципе эквивалентности Эйнштейна, связывающем поле сил инерции в неинерциальной системе отсчёта с гравитационным полем. На примерах решения конкретных задач показано, как можно в ускоренно движущейся системе отсчёта ввести эквивалентное гравитационное поле и решить задачу с учётом этого поля.

В природе существуют два вида массы: гравитационная и инертная. Гравитационная масса входит в выражение для силы в законе всемирного тяготения. Инертная масса входит в уравнение второго закона Ньютона. Как известно, обе эти массы равны друг другу с огромной точностью (в 1971 году В.Б. Брагинский и В.И. Панов экспериментально подтвердили этот факт с относительной точностью 10^{-12}). Закон эквивалентности масс А. Эйнштейн положил в основу общей теории относительности и сформулировал принцип эквивалентности. Согласно этому принципу *гравитационное поле в небольшой области (где поле можно считать однородным и постоянным во времени) эквивалентно полю сил инерции в некоторой ускоренно движущейся системе отсчёта.*

Принцип эквивалентности позволяет в школьном курсе физики ре-

шать многие задачи сравнительно простыми способами. Рассмотрим подробнее суть принципа эквивалентности и возможности его применения.

Пусть на некоторой планете с ускорением свободного падения $\vec{g}$ (будем условно его называть *гравитационным*, т.к. оно создается гравитационным взаимодействием тел) в кабине неподвижной ракеты находится наблюдатель А. Он исследует свободное падение шарика с некоторой высоты и видит, как шарик с ускорением $\vec{g}$ приближается к полу.

Пусть в такой же кабине другой ракеты, удалённой значительно от планеты и других тел, находится наблюдатель В. Он тоже исследует движение такого же шарика. Пусть вторая ракета движется с ускорением $\vec{a}$ (относительно какой-либо инерциальной системы отсчёта) и *по модулю* ускорение $\vec{a}$ равно ускорению свободного падения на планете $\vec{g}$.

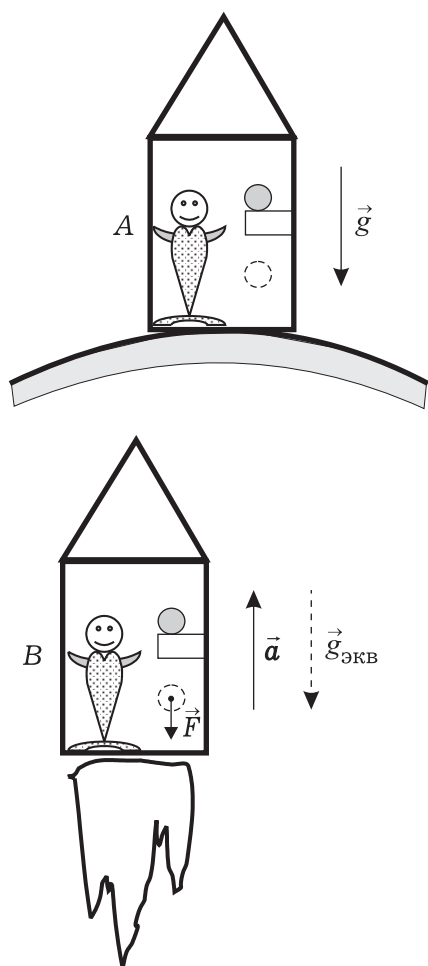


Рис. 1

В момент освобождения шарика ракета и шарик двигались с некоторой скоростью $\vec{v}_0$. Далее шарик продолжает двигаться равномерно и прямолинейно, т.к. на него теперь не действуют другие тела. Кабина (а значит и пол) продолжает двигаться с ускорением, и скорость ее возрастает. Пол кабины будет приближаться к шарiku и двигаться с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчёта. Визуально наблюдатель В, находясь в неинерциальной системе отсчёта, увидит «падение» шарика на

пол кабины с ускорением $-\vec{a}$ относительно кабины. Наблюдатель В может сказать, что ускорение шарика относительно кабины вызвано силой $\vec{F} = -m\vec{a}$. Эта сила называется силой инерции, а ускорение, которое вызывает эта сила, назовём *эквивалентным гравитационным ускорением* $\vec{g}_{\text{ЭКВ}}$. Итак, $\vec{g}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\vec{F}}{m} = -\vec{a}$. Отме-

тим, что силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчёта и появляются не в результате взаимодействия тел, а из-за свойств самих неинерциальных систем отсчёта.

Опыт показывает, что никаким экспериментом невозможно различить движения шариков в кабинах. Данное утверждение носит название «сильного принципа эквивалентности». Оно отличается от «слабого» тем, что распространено с механических на все физические процессы, и позволяет использовать для поиска различий любые способы.

Следует сделать существенное замечание: принцип эквивалентности справедлив только для однородного (одинакового для всех точек кабины) и стационарного (неизменного во времени) гравитационного поля. Другими словами, размеры кабины должны быть достаточно малыми, чтобы гравитационное центрально-симметричное поле планеты можно было принять однородным.

Результатом всех выше приведённых рассуждений является утверждение: *в неинерциальной системе отсчёта для каждой точки этой системы, движущейся с ускорением $\vec{a}$ (относительно инерциальной системы отсчёта), можно ввести эквивалентное*

гравитационное ускорение $\vec{g}_{\text{ЭКВ}}$, причём $\vec{g}_{\text{ЭКВ}} = -\vec{a}$.

Введение эквивалентного гравитационного ускорения полезно тем, что если какое-либо тело движется с ускорением в гравитационном поле, то можно ввести эквивалентное гравитационное ускорение. Теперь гравитационное ускорение, вызванное силой гравитации, и эквивалентное гравитационное ускорение складываем как векторы (эта процедура справедлива только для однородных величин). В результате получаем одно так называемое *эффективное ускорение свободного падения*.

Рассмотрим несколько примеров применения принципа эквивалентности.

Пример 1. Вагон движется по горизонтальному участку дороги с постоянным ускорением $\vec{a}$ (рис. 2). В вагоне на нити подвешен груз. Найдите эффективное ускорение свободного падения в системе отсчёта, связанной с вагоном, и направление «новой вертикали» по отношению к прежней (земной). Найдите угол отклонения нити отвеса от земной вертикали. В вагоне закрепили подвес с математическим маятником длиной L . Каков период колебаний маятника? В вагоне поставили аквариум с водой. Как расположится уровень свободной поверхности воды, налитой в аквариум?

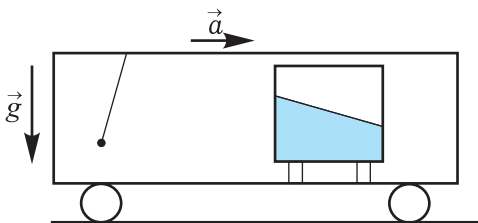


Рис. 2

Решение. Применим принцип эквивалентности. Из-за ускоренного движения вагона появится в системе отсчёта «вагон» (система отсчёта, связанная с вагоном) эквивалентное гравитационное ускорение $\vec{g}_{\text{ЭКВ}} = -\vec{a}$.

В системе отсчёта «вагон» имеем два гравитационных ускорения, т.е. две однородные величины $\vec{g}$ и $\vec{g}_{\text{ЭКВ}} = -\vec{a}$, которые можно складывать векторно (рис. 3). Полученное эффективное ускорение свободного

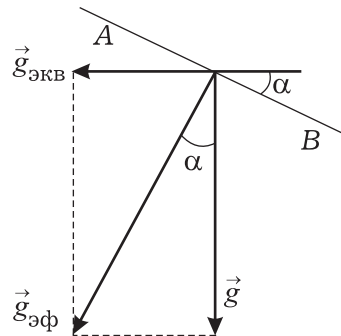


Рис. 3

падения имеет новое направление. Отклонение от земной вертикали составляет угол α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g_{\text{ЭКВ}}}{g} = \frac{a}{g}.$$

Абсолютная величина эффективного ускорения

$$g_{\text{эф}} = \sqrt{a^2 + g^2}.$$

Так как отвес располагается вдоль ускорения свободного падения, то отвес в системе отсчёта «вагон» будет располагаться вдоль направления эффективного ускорения.

Период колебаний математического маятника можно найти по известной формуле, только теперь вместо земного ускорения свободного падения g нужно взять эффективное:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{эф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

Рассмотрим, как расположится свободная поверхность жидкости в аквариуме. Известно, что поверхность жидкости всегда перпендикулярна ускорению свободного падения. На рисунке 3 поверхность воды АВ перпендикулярна эффективному ускорению свободного падения. Очевидно, что АВ и есть свободная поверхность жидкости в движущемся с ускорением вагоне. Ясно, что угол наклона этой поверхности к горизонту равен $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$.

Пример 2. С наклонной плоскости с углом при основании α скатывается тележка с ускорением $\vec{a}$ (рис. 4). Каково эффективное ускорение свободного падения на этой тележке? Как направлено это ускорение относительно земной вертикали? На тележку поставили аквариум с водой. С каким ускорением должна скатываться тележка, чтобы уровень воды в аквариуме располагался параллельно наклонной плоскости? На тележку поставили подвес с математическим маятником длиной L . Каков период колебаний маятника?

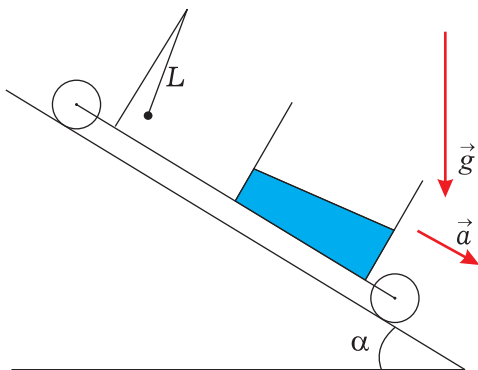


Рис. 4

Решение. В системе отсчёта «тележка» из-за ускоренного движения тележки появится эквивалентное гравитационное ускорение $\vec{g}_{\text{эКВ}} = -\vec{a}$ (рис. 5). В системе отсчёта «тележка» имеем два гравитационных ускорения $\vec{g}$ и $\vec{g}_{\text{эКВ}}$, которые можно складывать векторно. Полученное эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}}$ отклонено от вертикали на угол β . Найдём $\vec{g}_{\text{эф}}$ и β . По теореме косинусов для треугольника, построенного на векторах $\vec{g}$ и $\vec{g}_{\text{эКВ}}$,

$$g_{\text{эф}}^2 = g^2 + a^2 - 2ga \cdot \cos \gamma = g^2 + a^2 -$$

$$-2ga \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = g^2 + a^2 - 2ga \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Отсюда } g_{\text{эф}} = [g^2 + a^2 - 2ga \cdot \sin \alpha]^{1/2}.$$

По теореме синусов для этого же треугольника $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{a}{g_{\text{эф}}}$. С учётом выражения для $g_{\text{эф}}$ и того, что $\gamma = 90^\circ - \alpha$, получаем

$$\sin \beta = \frac{a \cdot \cos \alpha}{[g^2 + a^2 - 2ga \cdot \sin \alpha]^{1/2}}.$$

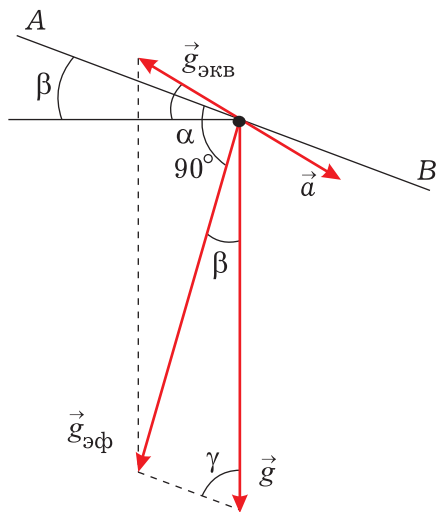


Рис. 5

Для ответа на следующий вопрос, касающийся расположения жидкости относительно наклонной плоскости, вспомним, что поверхность жидкости всегда располагается перпендикулярно ускорению свободного падения. В нашем случае поверхность жидкости АВ перпендикулярна эффективному ускорению $\vec{g}_{\text{эф}}$. Поверхность жидкости будет параллельна наклонной плоскости, т.е. вектору $\vec{a}$, если вектор $\vec{g}_{\text{эф}}$ будет перпендикулярен $\vec{a}$, т.е. при $\beta = \alpha$. Тогда $a = g \sin \alpha$. Итак, поверхность воды будет параллельна наклонной плоскости при $a = g \sin \alpha$.

Уместно вспомнить, что с таким ускорением движется тело по наклонной плоскости при отсутствии силы трения.

Ответ на последний вопрос уже

очевиден: $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_{\text{эф}}}}$ или

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2 - 2ag \cdot \sin \alpha}}}.$$

Пример 3. Стол движется с горизонтальным ускорением $\vec{a}_0$. Груз массой m_1 находится на горизонтальной поверхности стола (рис. 6). К грузу присоединена нить, перекинутая через блок. К другому концу нити подвешен второй груз массой m_2 . Найти силу натяжения нити, если коэффициент трения груза массой m_1 о стол равен μ . Массой блока и трением в его оси пренебречь. Известно, что груз массой m_1 скользит по столу.

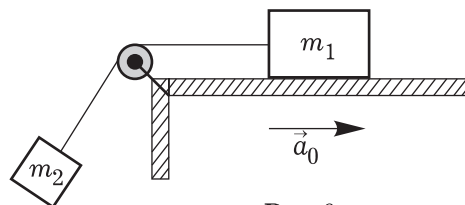


Рис. 6

Решение. Найдём сначала эффективное ускорение свободного падения, используя принцип эквивалентности. В системе отсчёта, связанной со столом, из-за ускоренного движения стола появится эквивалентное гравитационное ускорение $\vec{g}_{\text{эkv}} = -\vec{a}_0$. Эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}}$ равно векторной сумме гравитационного ускорения $\vec{g}$ и эквивалентного гравитационного ускорения $\vec{g}_{\text{эkv}}$ (рис. 7):

$$\vec{g}_{\text{эф}} \approx \vec{g} + \vec{g}_{\text{эkv}}.$$

Теперь можно считать, что в системе отсчёта, связанной со столом, есть гравитационное поле с ускорением свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}}$, и грузы находятся в этом поле, двигаясь относительно стола с ускорением a (рис. 8). Очевидно, что нить с грузом массой m_2 будет располагаться вдоль новой вертикали под углом α к прежней.

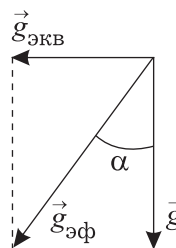


Рис. 7

Новая сила тяжести тоже будет направлена вдоль новой вертикали.

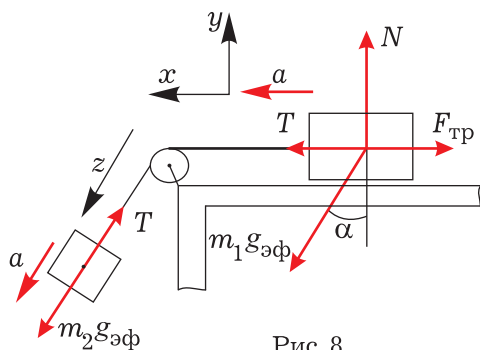


Рис. 8

На груз массой m_1 действуют сила тяжести $m_1 g_{эф}$, сила натяжения нити T , сила трения $F_{тр}$ и сила нормального давления N . На груз массой m_2 действуют сила натяжения нити T и сила тяжести $m_2 g_{эф}$. Запишем уравнения движения для груза массой m_1 в проекциях на оси x и y , а для груза массой m_2 – на ось z :

$$T - F_{тр} + m_1 g_{эф} \sin \alpha = m_1 a,$$

$$N - m_1 g_{эф} \cos \alpha = 0,$$

$$m_2 g_{эф} - T = m_2 a.$$

Учитывая, что

$$F_{тр} = \mu N, \quad g_{эф} \sin \alpha = g_{экр} = a_0,$$

$$g_{эф} \cos \alpha = g, \quad g_{эф} = \sqrt{g^2 + a_0^2},$$

находим из записанных уравнений силу натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\sqrt{g^2 + a_0^2} + \mu g - a_0 \right).$$

Пример 4. Из-за суточного вращения Земли ускорение свободного падения (относительно Земли) на её поверхности $\vec{g}_{эф}$ немного отличается от ускорения свободного падения $\vec{g}_{гр}$, которое было бы при отсутствии вращения. Найти угол α между направлениями этих ускорений и разность Δg их модулей для широты $\varphi_1 = 90^\circ$

(полнос), широты $\varphi_2 = 60^\circ$ и широты $\varphi_3 = 0^\circ$ (экватор). Землю считать шаром радиусом $R = 6380$ км со сферически-симметричным распределением массы. Период вращения принять $T = 24$ часа.

Решение. Пусть тело В находится вблизи поверхности Земли на широте φ (рис. 9). По закону всемирного тяготения на тело действует сила тяготения, направленная к центру O Земли. Эта сила вызывает у тела гравитационное ускорение $\vec{g}_{гр}$, причём

$$g_{гр} \approx 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Такое ускорение будет у любого свободно падающего тела при отсутствии вращения Земли. При вращении Земли (относительно некоторой инерциальной системы отсчёта) тело В движется по окружности с центром в точке O_1 и радиусом $r = O_1 B = R \cos \varphi$. Ускорение тела

$$a = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos \varphi.$$

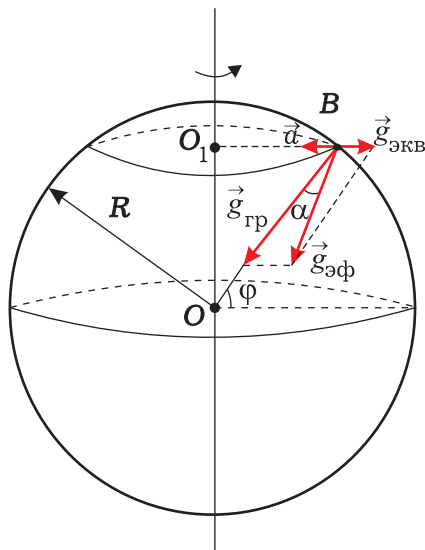


Рис. 9



По принципу эквивалентности можно считать, что в неинерциальной системе отсчёта, связанной с вращающейся Землёй, есть эквивалентное гравитационное ускорение $\vec{g}_{\text{эКВ}} = -\vec{a}$, причём

$$g_{\text{эКВ}} = a = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R \cos \varphi.$$

С учётом значений R и T находим, что на полюсе $g_{\text{эКВ}} = 0$, на широте $\varphi_2 = 60^\circ$ $g_{\text{эКВ}} \approx 0,017 \text{ м/с}^2$, на экваторе $g_{\text{эКВ}} \approx 0,034 \text{ м/с}^2$. Заметим, что $g_{\text{эКВ}}$ для любой широты значительно меньше $g_{\text{Гр}}$.

Эффективное гравитационное ускорение

$$\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g}_{\text{Гр}} + \vec{g}_{\text{эКВ}}.$$

Видим (рис. 9), что эффективное гравитационное ускорение отклонено на небольшой угол α от направления на центр Земли, $g_{\text{Гр}} \approx g_{\text{эф}} \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ и разность $\Delta g = g_{\text{Гр}} - g_{\text{эф}}$ мала по сравнению с $g_{\text{Гр}}$. Вдоль направления $\vec{g}_{\text{эф}}$ располагаются нить отвеса и местная вертикаль. С ускорением $\vec{g}_{\text{эф}}$ будет происходить свободное падение тела на широте φ . Правда, вследствие неоднородности гравитационного поля только в начале свободного падения ускорение свободного падения относительно Земли будет равно $\vec{g}_{\text{эф}}$. Для тела массой m величину $m\vec{g}_{\text{эф}}$ называют силой тяжести, которую не надо путать с силой тяготения, хотя они близки по модулю и направлению.

Найдём α и Δg .

По теореме синусов для треугольника, построенного на векторах $\vec{g}_{\text{Гр}}$ и

$$\vec{g}_{\text{эф}}, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{g_{\text{эКВ}}}{g_{\text{эф}}}.$$

Отсюда, с учётом малости α

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{g_{\text{эКВ}}}{g_{\text{эф}}} \sin \varphi.$$

На широте $\varphi_2 = 60^\circ$ $\alpha \approx 0,0015$, что составляет всего несколько угловых минут. На полюсе и экваторе эффективное и гравитационное ускорения сонаправлены и $\alpha = 0$.

Для нахождения Δg запишем равенство $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g}_{\text{Гр}} + \vec{g}_{\text{эКВ}}$ в проекциях на направление $\vec{g}_{\text{Гр}}$:

$$g_{\text{эф}} \cos \alpha = g_{\text{Гр}} - g_{\text{эКВ}} \cos \varphi.$$

Поскольку α мал, то $\cos \alpha \approx 1$ и

$$\Delta g = g_{\text{Гр}} - g_{\text{эф}} \approx g_{\text{эКВ}} \cos \varphi.$$

Используя полученные выше значения $g_{\text{эКВ}}$, находим, что на полюсе

$$\Delta g = 0, \text{ на широте } \varphi_2 = 60^\circ$$

$$\Delta g \approx 0,0084 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{на экваторе } \Delta g \approx 0,034 \text{ м/с}^2.$$

Эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}}$ обычно называют ускорением свободного падения и обозначают $\vec{g}$. Наши расчёты показывают, что на экваторе ускорение свободного падения на $0,034 \text{ м/с}^2$ меньше, чем на полюсе. Непосредственные измерения дают, что на экваторе ускорение свободного падения на $0,052 \text{ м/с}^2$ меньше, чем на полюсе. Добавочная величина $0,018 \text{ м/с}^2$ вызвана тем, что Земля сплюснута вдоль оси вращения.