

Иво Вольф
Профессор Университета Градец Кралове, Чешская Республика.

Помощник в решении задач – график

Автор статьи показывает, как использование графиков функциональных зависимостей между физическими величинами облегчает решение задач, а в некоторых случаях, дополняя и поясняя их условие, помогает найти решение.

Некоторые сведения о графиках

Решение физических задач, конечно же, облегчается, если пользоваться различными средствами вычислительной техники – калькуляторами, персональными компьютерами. Однако они не могут помочь в мысленном поиске способов их решения. Ведь надо понять содержание сформулированной в задаче проблемы, проанализировать её условие, найти путь решения, убедиться в его правильности, получить результат. В этом помогают математические формулы, при помощи которых выражены функциональные зависимости между величинами. Но не только они. Очень наглядно графическое представление этих зависимостей, особенно простых: зависимостей пути, скорости или ускорения от времени, силы упругости от деформации и т.п. График – отличное средство не только для понимания функциональной зависимости величин и поиска пути решения, но и получения числового результата.

Чтобы графики действительно помогали решать физические задачи, необходимо напомнить следующее.

Зависимость скорости движения v от времени t при равномерном движении изображается прямой линией или (при ограничительных условиях, например, при рассмотрении интервала времени $t_2 - t_1$) отрезком AB этой линии (рис. 1). Параллельность линии (или её отрезка) оси времени t свиде-

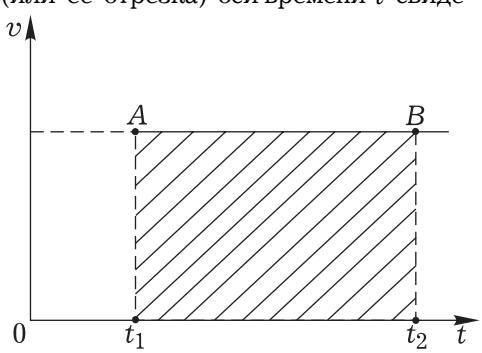


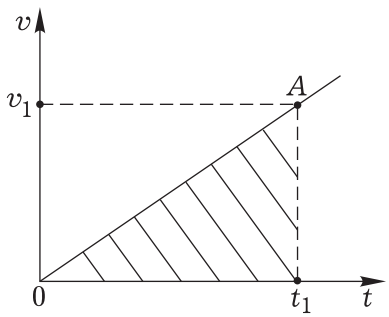
Рис. 1

тельствует о равномерности движения (постоянстве скорости).

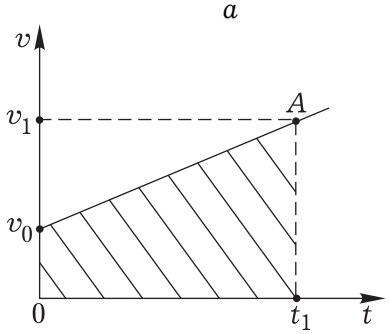
Площадь прямоугольника со сторонами v_0 и $\Delta t = t_2 - t_1$ численно равна пути s, пройденному движущимся телом за интервал времени $t_2 - t_1$, т.е.

$$s = v(t_2 - t_1).$$

Если тело движется прямолинейно и равноускоренно или равнозамедленно, график его скорости $v = v(t)$ представляет собой прямую линию (её отрезок), составляющую определённый угол с осью времени. В этом случае фигура, ограниченная графиком и осью времени, представляет собой треугольник или трапецию. Площадь этих фигур и равна численно пути.



а



б

Рис. 2

На рис. 2 *а* показан график зависимости скорости от времени для равноускоренного движения из состояния покоя. Путь за время t_1 равен площади треугольника OAt_1:

$$s = \frac{1}{2} v_1 t_1.$$

На рис. 2 *б* приведён график зависимости скорости от времени для равноускоренного движения с начальной скоростью v_0. Путь за время t_1 равен площади трапеции $0v_0At_1$:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)t_1.$$

Аналогичным образом, пользуясь графиками, удобно выполнять расчёты при вычислении работы, которая совершается при движении тела под действием постоянной силы F_0 (рис. 3) или при растяжении (сжатии) пружины (рис. 4), т.е. когда сила пропорциональна смещению: $F = kx$. Здесь x – координата тела при движении вдоль оси x.

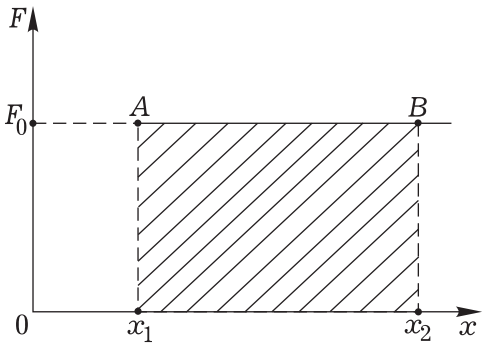


Рис. 3

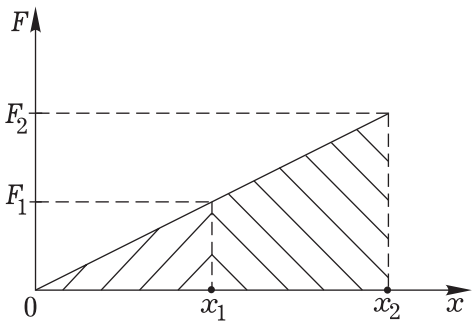


Рис. 4

В первом случае $A = F_0(x_2 - x_1)$, где $(x_2 - x_1)$ – расстояние, пройденное телом. Во втором случае работа при растяжении пружины из ненапряжённого состояния на x_1 равна

$$A_1 = \frac{1}{2}F_1 x_1 = \frac{1}{2}kx_1 x_1 = \frac{1}{2}kx_1^2,$$

а при дальнейшем растяжении из состояния с удлинением x_1 до состояния с удлинением x_2

$$A_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Велосипедист на треке. При соревнованиях велосипедистов в быстроте движения по треку, в конце которого происходит «полёт» и приземление велосипеда, молодой спортсмен проехал трек протяжённостью $s_1 = 1000$ м с постоянной скоростью v_1 за время t_1, а после приземления, равномерно замедляя движение, проехал до финиша (до остановки) 240 м за 40 с. Какова была его скорость на треке и сколько времени он двигался по нему? Каковы были бы его скорость v_1' и время движения на треке t_1', если бы равнозамедленное движение длилось 36 с?

Решение. Чтобы лучше представить ход решения задачи, построим график зависимости скорости движения спортсмена от времени (рис. 5).

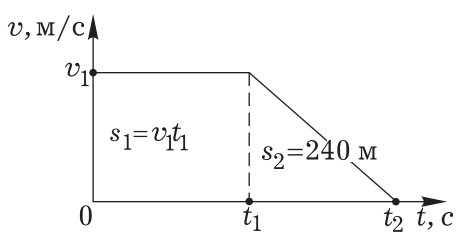


Рис. 5

О равномерном движении по треку известно только, каков пройденный по нему путь, поэтому рассмотрим сначала вторую часть движения – равнозамедленного до остановки, которому соответствует путь s_2, равный площади треугольника:

$$s_2 = \frac{1}{2}v_1(t_2 - t_1),$$

где $t_2 - t_1 = 40$ с. Отсюда

$$v_1 = \frac{2s_2}{t_2 - t_1} = 2 \cdot \frac{240 \text{ м}}{40 \text{ с}} = 12 \text{ м/с}.$$

Время t_1 движения по треку находим из формулы $s_1 = v_1 t_1$:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1000 \text{ м}}{12 \text{ м/с}} \approx 83{,}3 \text{ с}.$$

Если бы спортсмен затормозил за 36 с, то это означало бы, что его скорость $v_1' = \frac{2 \cdot 240 \text{ м}}{36 \text{ с}} \approx 13{,}3$ м/с, и чтобы достичь конца трека, ему потребовалось бы меньше времени:

$$t_1' = \frac{s_1}{v_1'} = 75 \text{ с}.$$

Задача 2. Спринтер. Спринтер на короткой дистанции длиной 100 м пробежал первые 32 м равноускоренно за 5 с, а потом двигался до финиша с постоянной скоростью. За какое время он преодолел эту дистанцию и каково было ускорение на начальном этапе движения?

Решение. Построим график зависимости скорости спринтера от времени (рис. 6), что упростит все расчёты.

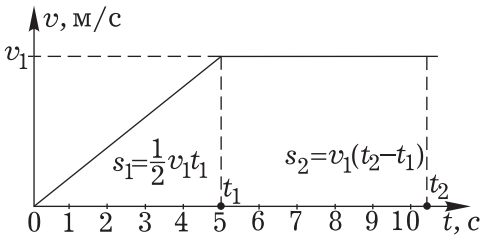


Рис. 6

Здесь $t_1 = 5$ с, t_2 надо найти, $s = s_1 + s_2$, где $s = 100$ м, $s_1 = 32$ м, $s_2 = 100$ м $- 32$ м $= 68$ м, v_1 – скорость при равномерном движении. Так как путь численно равен площади фигур, расположенных под графиком, можно записать: $s_1 = \frac{1}{2} v_1 t_1$, $s_2 = v_1 (t_2 - t_1)$. Отсюда скорость, которую приобрёл спринтер за 5 с равноускоренного движения:

$$v_1 = \frac{2s_1}{t_1} = \frac{2 \cdot 32 \text{ м}}{5 \text{ с}} = 12{,}8 \text{ м/с}.$$

Время движения

$$t_2 = \frac{s_2 + v_1 t_1}{v_1} = \frac{68 \text{ м} + 12{,}8 \text{ м/с} \cdot 5 \text{ с}}{12{,}8 \text{ м/с}} \approx 10{,}3 \text{ с}.$$

Поскольку $v_1 = at_1$, ускорение

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{12{,}8 \text{ м/с}}{5 \text{ с}} = 2{,}56 \text{ м/с}^2.$$

Задача 3. Дорожная авария. В немецком детективном сериале «Кобра-11» происходит несколько массовых аварий. Попробуйте оценить, как опасны такие аварии для тех, кто едет в направлении к месту происшествия, определив время, необходимое для остановки автомобиля, и путь, пройденный им при этом. Пусть начальная скорость автомашины у осторожного водителя 126 км/ч, а у азартного 162 км/ч, и тормозят они так, что скорости уменьшаются на 10 м/с за 2 с. Учтите, что от обнаружения водителем аварии до включения им тормозной системы проходит обычно 1,2 с.

Решение. Начальные скорости автомашин $v_{01} = 126$ км/ч $= 35$ м/с и $v_{02} = 162$ км/ч $= 45$ м/с. Ускорение $a = -\Delta v / t = \frac{-10 \text{ м/с}}{2 \text{ с}} = -5 \text{ м/с}^2$. Помня о запаздывании начала торможения на $t_1 = 1{,}2$ с, строим графики зависимости скоростей этих машин от времени (рис. 7), принимая за начало отсчёта момент, когда водители заметили аварию, и учитывая, что их конечные скорости должны быть равны нулю. Для построения параллельных (ускорения одинаковы!) прямых выбираем точки A и B, соответствующие началу торможения, и C и D, где скорости через 4 с уменьшатся до 25 м/с и 15 м/с. Решим задачу графически.

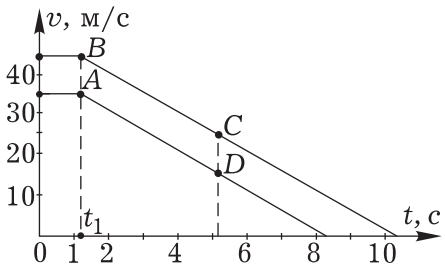


Рис. 7

По графику находим, что у осторожного водителя автомобиль остановится через 8,2 с после того, как он заметил аварию, и через 7 с, как он нажал на тормоз, а у азартного соответственно через 10,2 с и 9 с.

Путь первого автомобиля до начала торможения

$$s_1' = v_{01} t_1 = 35 \text{ м/с} \cdot 1{,}2 \text{ с} = 42 \text{ м},$$

его тормозной путь

$$s_2' = \frac{1}{2} v_{01} \cdot t_2' = \frac{1}{2} \cdot 35 \text{ м/с} \cdot 7 \text{ с} = 122{,}5 \text{ м}.$$

Значит, чтобы остановиться и не

стать ещё одним участником аварии, автомобилисту нужен свободный путь не менее

$$s' = 42\ \text{м} + 122{,}5\ \text{м} = 164{,}5\ \text{м}.$$

Аналогично для второго автомобилиста

$$s_1'' = v_{02} \cdot t_1 = 45\ \text{м/с} \cdot 1{,}2\ \text{с} = 54\ \text{м},$$

$$s_2'' = \frac{1}{2} v_{02} \cdot t_2'' = \frac{1}{2} \cdot 45\ \text{м/с} \cdot 9\ \text{с} = 202{,}5\ \text{м}.$$

Ему труднее избежать аварии, так как необходим свободный путь не менее

$$s'' = 54\ \text{м} + 202{,}5 = 256\ \text{м},$$

т.е. более четверти километра. Азарт на дороге опасен!



Задача 4. Хоккеист. Послав шайбу перпендикулярно борту катка с расстояния 40 м до него и начальной скоростью 24 м/с, хоккеист поехал вслед за ней. Постепенно замедляясь, шайба ударилась о борт со скоростью 16 м/с, а отразилась от него из-за неидеальной упругости со скоростью 12 м/с. Определите, через какой промежуток времени шайба ударилась о борт. С какой постоянной скоростью должен двигаться хоккеист, чтобы встретиться с шайбой в месте её остановки?

Решение. Задачу легче решить с помощью графика $v(t)$ – зависимости модуля скорости от времени (рис. 8). Построим график. Отложим на вертикальной оси начальную скорость шайбы $v_1 = 24$ м/с, её скорость $v_2 = 16$ м/с в момент удара о борт и скорость $v_3 = 12$ м/с, с которой она, отразившись от борта, стала двигаться навстречу хоккеисту. Заметим, что ускорение шайбы при движении к борту и от борта одинаково.

Так как скорость тела при равнозамедленном движении зависит от времени линейно, можно определить среднюю скорость шайбы

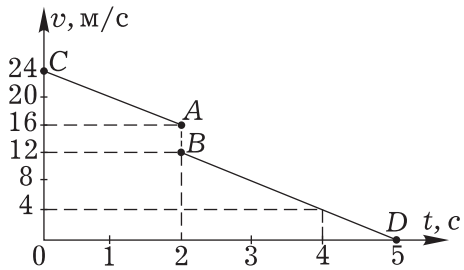


Рис. 8

при скольжении к борту

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{24\ \text{м/с} + 16\ \text{м/с}}{2} = 20\ \text{м/с}.$$

Следовательно, шайба достигает борта через $t_1 = \dfrac{40\ \text{м}}{20\ \text{м/с}} = 2\ \text{с}$. (Получаем точку A графика и его участок CA.) В момент отражения от борта скорость шайбы мгновенно уменьшается до 12 м/с (точка B графика.).

Поскольку условия движения шайбы после отражения не изменились (её замедление – модуль ускорения a – такое же, как до отражения), то

$$a=\frac{24\text{ м/с}-16\text{ м/с}}{2\text{ с}}=4\text{ м/с}^2,$$

время её движения до остановки

$$t_2=\frac{12\text{ м/с}-0\text{ м/с}}{4\text{ м/с}^2}=3\text{ с}.$$

Таким образом, на горизонтальной оси получаем точку D и участок графика BD.

Теперь можно определить искомую скорость хоккеиста. Время его движения, как и шайбы до остановки, равно 5 с, а пройденное расстояние равно $40\text{ м}-s$, где s – путь шайбы ему навстречу. Определяем площадь фигуры под участком графика BD:

$$s=\frac{1}{2}v_3t_2=\frac{1}{2}\cdot 12\text{ м/с}\cdot 3\text{ с}=18\text{ м}.$$



Итак, хоккеист проезжает расстояние $40\text{ м}-18\text{ м}=22\text{ м}$ и его скорость $v=\frac{22\text{ м}}{5\text{ с}}=4{,}4\text{ м/с}$.

Задача 5. Матрос с канатом. Находящийся на борту судна матрос, держа в руках конец вертикально висящего каната длиной 16 м, медленно вытягивает его на палубу. Какую работу он выполнит при этом, если масса 1 м каната 1,2 кг?

Решение. Масса каната $m=1{,}2\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}\cdot 16\text{ м}=19{,}2\text{ кг}$. Сила F_0, с которой матрос начинает вытягивать канат, равна его весу:

$$F_0=mg=19{,}2\text{ кг}\cdot 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\approx 188\text{ Н}.$$

По мере равномерного подъёма каната прилагаемая к нему сила F постепенно уменьшается. Строим график зависимости силы F от длины x висящей за бортом судна части каната (рис. 9) и определим работу матроса как площадь треугольника, ограниченного графиком. Итак,

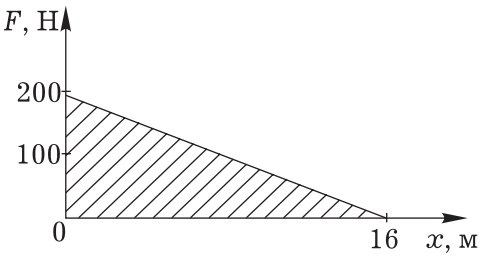


Рис. 9

$$A=\frac{1}{2}F_0\,l=\frac{188\text{ Н}\cdot 16\text{ м}}{2}=$$
$$=1504\text{ Дж}\approx 1{,}5\text{ кДж}.$$

Задача 6. Археологи. Археологи медленно вытаскивают из озера с помощью подъёмного крана колонну, которая стоит на дне, где глубина 8 м. Верхнее её основание расположено точно под поверхностью воды. Колонна состоит из песчаника $\left(\rho=2400\text{ кг/м}^3\right)$, площадь её сечения $S=0{,}4\text{ м}^2$, плотность воды $\rho_в=1000\text{ кг/м}^3$. С какой силой действует колонна на канат крана в первый момент подъёма? Какую работу совершает кран, если он поднимает колонну так, что её нижнее основание оказывается на высоте 2 м над уровнем воды? Считать, что между нижним основанием колонны

и дном в начальный момент есть прослойка воды.

Решение. Можно показать, что сила F, действующая на канат крана при вытаскивании колонны из воды, будет увеличиваться пропорционально увеличению высоты x её нижнего основания относительно дна озера.

Чтобы построить график этой зависимости, учтём, что в первый момент подъёма нижнее основание колонны ещё стоит на дне, т.е. $x = 0$, а максимальное значение x по условию задачи $x_м = h_1 + h_2$, где h_1 – высота колонны, h_2 – высота её нижнего основания над уровнем воды, т.е. $x_м = 8\text{ м} + 2\text{ м} = 10\text{ м}$.

При $x = 0$ на колонну действуют две силы: вниз сила тяжести mg и вверх архимедова сила $F_A = \rho_в V_к g$ ($V_к$ – объём колонны), так что действующая на канат сила F_1 будет равна их разности:

$$F_1 = mg - \rho_в V_к g = \rho V_к g - \rho_в V_к g =$$
$$= gV_к(\rho - \rho_в) =$$
$$= gSh_1(\rho - \rho_в) =$$
$$= 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0{,}4\ \text{м}^2 \cdot 8\ \text{м} \cdot 1400\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} =$$
$$= 43904\ \text{Н} \approx 44\ \text{кН}.$$

Как только колонна полностью выйдет из воды (это произойдёт при $x = 8$ м), действие архимедовой силы прекратится, и на канат будет действовать только вес колонны – постоянная сила F_2, равная силе тяжести:

$$F_2 = mg = \rho S h_1 g = 2400\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 0{,}4\ \text{м}^2 \times$$
$$\times 8\ \text{м} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 75\,264\ \text{Н} \approx 75{,}3\ \text{кН}.$$

Отмечаем на координатной плоскости соответствующие значения x, силы F_1, F_2 и строим график (рис. 10).



С помощью графика легко определить работу A, совершённую краном:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)h_1 + F_2 h_2 =$$
$$= \frac{1}{2}(44\ \text{кН} + 75{,}3\ \text{кН})\,8\ \text{м} + 75{,}3\ \text{кН} \cdot 2\ \text{м} \approx$$
$$\approx 477\ \text{кДж} + 150\ \text{кДж} = 627\ \text{кДж}.$$

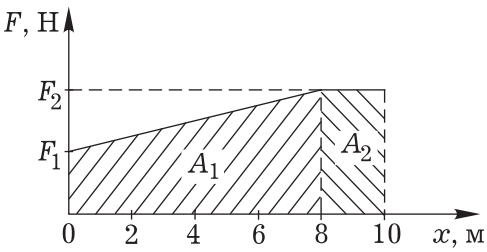


Рис. 10

Материал к публикации подготовили А.В. Чеботарёва и В.И. Чивилёв.