

Мукушев Базарбек Агзашулы
 Доктор педагогических наук,
 профессор кафедры физики
 Государственного университета
 им. Шакарима г. Семей,
 обладатель государственного гранта
 Республики Казахстан
 «Лучший преподаватель вуза-2012».



Параболическое движение тела Часть 2

Вторая часть статьи посвящена изучению параболического движения тела и заряженной частицы на основе закона сохранения энергии.

Закон сохранения энергии

Задача 8. Небольшое тело соскальзывает с горки без начальной скорости и попадает в «мёртвую петлю» (рис. 1). Нужно найти:

а) Место отрыва тела от петли, точку удара о неё и время его свободного падения, если $h = 2R = 2$ м. Трением пренебречь.

б) Точку удара о горизонтальную поверхность стола, если после отрыва тела петля убирается.

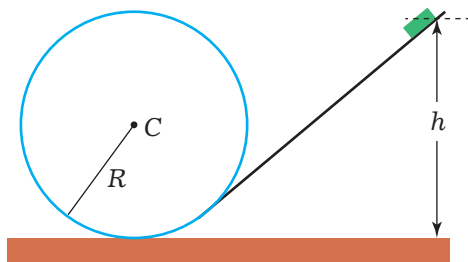


Рис. 1

Решение. В момент отрыва тела от поверхности петли на него действует только сила тяжести. Далее оно движется по траектории параболы с ускорением свободного паде-

ния (рис. 2), где $\vec{v}_A$ – скорость тела в момент отрыва.

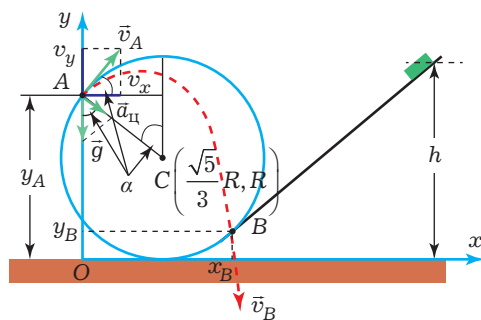


Рис. 2

а) Проекции скорости $\vec{v}_A$ на оси x и y соответственно равны

$$v_x = v_A \cos \alpha, \quad v_y = v_A \sin \alpha.$$

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$mgh = mgy_A + \frac{mv_A^2}{2},$$

$$2mgh = mgy_A + \frac{mv_A^2}{2}.$$

В точке A тело переходит из движения по окружности в состоя-

ние падения, в ней его центростремительное ускорение равно

$$a_{ц} = \frac{v_A^2}{R} = g \cos \alpha.$$

Следовательно $v_A^2 = gR \cos \alpha$, а $\cos \alpha = \frac{y_A - R}{R}$, т. е. $v_A^2 = gR \frac{y_A - R}{R}$.

Подставив последние выражения в уравнение закона сохранения энергии тела, получим:

$$y_A = \frac{5}{3}R, \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad v_A^2 = \frac{2}{3}gR.$$

Поскольку

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Принимая во внимание закономерности движения тела под углом к горизонту и формулу окружности в декартовой системе координат, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = v_A (\cos \alpha) t, \\ y = y_A + v_A (\sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}, \\ \left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}R\right)^2 + (y - R)^2 = R^2. \end{cases}$$

Таким образом, есть три уравнения с тремя неизвестными: t , x , y .

Исключив время из первого уравнения и найдя y из формулы окружности, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = y_A + (\operatorname{tg} \alpha)x - \frac{g}{2v_A^2 \cos^2 \alpha} x^2, \\ y = R \pm \sqrt{R^2 - \left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}R\right)^2}. \end{cases}$$

Подставим численные значения и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{27}{16}x^2, \\ y = 1 \pm \sqrt{1 - \left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}. \end{cases}$$

Систему уравнений удобно решать графически. Для этого используем пакет прикладной программы Matchad. Графическое решение представлено на рис. 3. Парабола пересекается с окружностью в двух точках: A и B – в точке отрыва тела от петли $A(0; 5/3)$ и точке удара о петлю $B(1,33; 0,19)$.

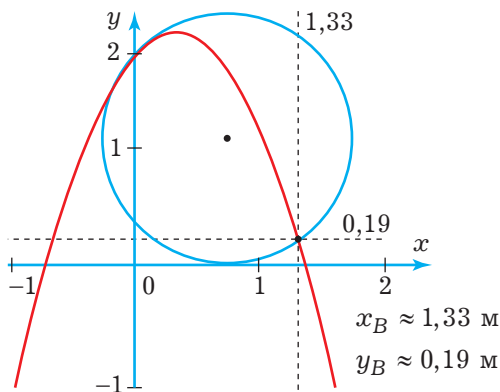


Рис. 3

Из уравнения

$$x = v_A (\cos \alpha) t$$

находим время падения тела:

$$t = \frac{x}{v_A \cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$t = \frac{1,33}{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g} \approx 0,78 \text{ с.}$$

б) Координату точки удара тела о стол при отсутствии петли обозначим через $x_{\max}$. Её значение вычислить нетрудно, поскольку известны необходимые для этого параметры (y_A , v_A , α , R), но сначала найдём время полёта тела T , используя формулу

$$T = \frac{v_A \sin \alpha + \sqrt{v_A^2 \sin^2 \alpha + 2gy_A}}{g} \approx 0,81 \text{ с.}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} x_{\max} &= v_x T = v_A (\cos \alpha) T, \\ x_{\max} &\approx 1,38 \text{ м.} \end{aligned}$$

Дальность полёта тела при отсутствии петли ($x_{\max} \approx 1,38$ м) не-

много больше дальности его удара о петлю ($x_B \approx 1,33$ м).

Электростатика

Задача 9. Положительно заряженная частица массой m с зарядом q , имея начальную скорость v_0 , влетает в область однородного электростатического поля между двумя металлическими сетками (плоский конденсатор), на которых поддерживается постоянная разность потенциалов U_0 (рис. 4). Расстояние между сетками равно d . Угол между скоростью частицы и плоскостью первой обкладки конденсатора равен α . Каким будет дальнейшее движение частицы?

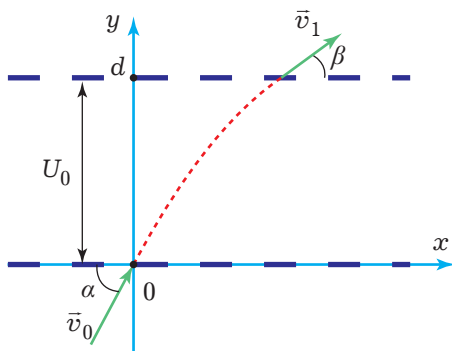


Рис. 4

Решение. Рассмотрим движение частицы в области $0 \leq y \leq d$ в направлении осей x и y . По горизонтали никакие силы на неё не действуют, поэтому её движение вдоль оси x будет равномерным:

$$x(t) = v_0(\cos \alpha)t.$$

В вертикальном направлении на частицу действует электрическая сила, равная $\frac{qU_0}{d}$, направленная вниз. Следовательно, вдоль оси y частица будет двигаться равнозамедленно:

$$y(t) = v_0(\sin \alpha)t - \frac{qU_0}{md} \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Исключая из выражений для $x(t)$ и $y(t)$ время, получим уравнение траектории движения частицы:

$$y = (\operatorname{tg} \alpha)x - \frac{qU_0}{2mv_0^2 d \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1)$$

Это – уравнение параболы. Значит, в общем случае заряженная частица в однородном электрическом поле движется по параболе. В зависимости от её начальной скорости v_0 возможны три случая:

1) Частица выходит за пределы верхней сетки ($y > d$). Там электрическое поле отсутствует, краевые эффекты поля незначительны. Частица будет двигаться равномерно и прямолинейно с некоторой новой скоростью v_1 , направленной под углом β к плоскости этой обкладки конденсатора (рис. 5). Значения v_1 и β можно найти, применяя закон сохранения полной энергии частицы в электрическом поле конденсатора. Читатель может вычислить эти параметры самостоятельно.

2) Частица движется внутри конденсатора ($y < d$) и не доходит до верхней сетки. С энергетической точки зрения это значит, что начальной «вертикальной» кинетической энергии не хватает для преодоления тормозящего действия электрического поля:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \alpha < qU_0.$$

В этом случае частица будет двигаться по параболе 1 (рис. 5) и вернётся к нижней сетке, приобретая ту же скорость (равную v_0) и под тем же углом α к этой сетке. Координаты (x_B , y_B) вершины параболы будут (согласно выражениям (5) и

(6) в I части статьи – см. №6 журнала):

$$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{2qU_0} d,$$

$$y_B = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2qU_0} d.$$

3) Вершина параболы (парабола 2 на рис. 5) касается верхней сетки ($y = d$).

В этом случае проекция скорости частицы на ось y , т. е. её вертикальная составляющая, равна нулю. На основании закона сохранения энергии системы «частица – электрическое поле» напомним:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \alpha = qU_0.$$

Упражнения

1. С вершины гладкой неподвижной полусферы радиуса R начинает соскальзывать небольшое тело без трения (рис. 6).

а) На какой высоте относительно горизонтальной плоскости (оси x) тело оторвётся от полусферы?

б) Какова дальность падения тела от края полусферы?

Решение. а) В момент отрыва тела реакция сферы становится равной нулю, и оно начинает двигаться только под действием силы тяжести по параболической траектории.

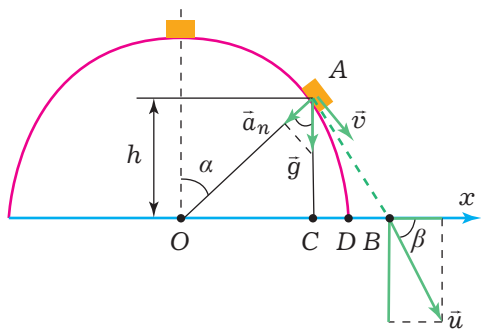


Рис. 6

В точке отрыва A (рис. 6) центростремительное ускорение тела

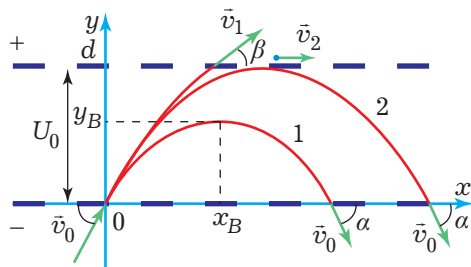


Рис. 5

Поскольку горизонтальная составляющая начальной скорости не меняется при этом, частица движется параллельно сеткам с постоянной скоростью $v_2 = v_0 \cos \alpha$, если окажется чуть-чуть за пределами пространства между сетками, и по параболе 2, если внутри этого пространства.

$$a_{ц} = \frac{v^2}{R}$$

является составляющей ускорения свободного падения. Значит,

$$\frac{v^2}{R} = g \cos \alpha.$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \alpha).$$

Из этих соотношений получаем:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Поскольку $h = R \cos \alpha$, $h = \frac{2}{3}R$.

б) Дальность падения тела от края полусферы равна

$$DB = OC + CB - OD.$$

Здесь

$$OC = \frac{\sqrt{5}}{3}R, \quad OD = R, \quad CB = v(\cos \alpha)t,$$

где v – скорость тела в точке отрыва, t – время его падения. Найдём скорость тела в момент отрыва от поверхности сферы:

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{2}{3}}gR.$$

Очевидно, что

$$u \sin \beta - v \sin \alpha = gt,$$

$$t = \frac{u \sin \beta - v \sin \alpha}{g},$$

где u – скорость приземления тела, которую можно найти на основе закона сохранения энергии:

$$u = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{2gR}.$$

Известно, что

$$v \cos \alpha = u \cos \beta, \quad \cos \beta = \frac{2v}{3u} = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{\frac{23}{27}}.$$

Вертикальная составляющая начальной скорости равна

$$v \sin \alpha = \sqrt{\frac{10}{27}} gR,$$

а конечной скорости:

$$u \sin \beta = \sqrt{\frac{46}{27}} gR.$$

Таким образом,

$$t = \frac{u \sin \beta - v \sin \alpha}{g} =$$

$$= \sqrt{\frac{R}{27g}} \cdot (\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

Итак,

$$CB = v(\cos \alpha)t = \frac{2R\sqrt{2}}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

Окончательно

$$DB = \frac{\sqrt{5}}{3} R + \frac{2R\sqrt{2}}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}) - R =$$

$$= R \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{27}(\sqrt{46} - \sqrt{10}) - 1 \right) \approx 0,125R.$$

2. Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту, если он ударится о потолок (рис. 7). Высота потолка $h = 3$ м, удар упругий, $g = 9,8$ м/с², сопротивлением воздуха пренебечь.

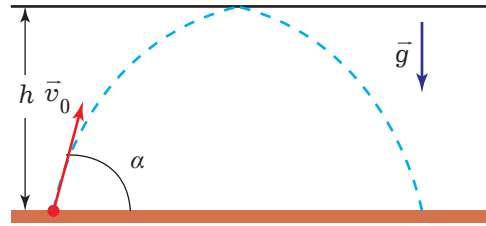


Рис. 7

Решение. Известно, что траектории движения мяча до удара о потолок и после него симметричны. Поэтому, сначала вычислим дальность L (рис. 8) его горизонтального смещения до удара.

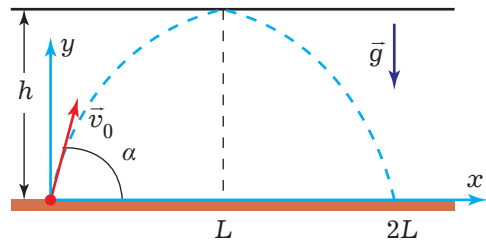


Рис. 8

Уравнение траектории мяча:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha)x.$$

Эта траектория проходит через точку с координатами L и h . Поэтому

$$h = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} L^2 + (\operatorname{tg} \alpha)L.$$

В этом уравнении неизвестна величина L . Решим его:

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} L^2 - (\operatorname{tg} \alpha)L + h = 0,$$

$$L = 2v_0^2 \cos^2 \alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2gh}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}}{g} \approx$$

$$\approx \frac{1,732 \pm 0,805}{0,3923},$$

$$L_1 \approx 6,467 \text{ м и } L_2 \approx 2,363 \text{ м.}$$

Физический смысл в данном случае имеет корень $L_2 \approx 2,363$ м, а

L_1 имеет смысл, когда отсутствует потолок. Таким образом,

$$2L = 4,72 \text{ м.}$$

(Второй способ решения этой задачи представлен в задачнике Г.В. Меледина «Физика в задачах» (М.: Наука, 1985. – С. 9).

3. Проволока изогнута по дуге окружности радиусом R (рис. 9). На проволоку надета бусинка, которая может без трения по ней перемещаться. В начальный момент времени бусинка находилась в точке O . Какую горизонтальную скорость v надо ей сообщить, чтобы, пройдя часть пути от точки A в воздухе, она в точке B попала бы вновь на проволоку?

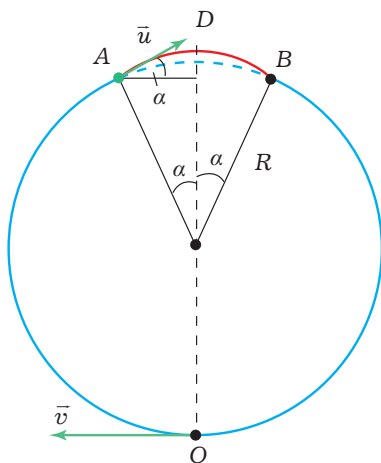


Рис. 9

Решение. На участке ADB бусинка движется под действием силы тяжести по параболической траектории. Для того чтобы она, покинув проволоку в точке A , попала в точку B , необходимо, чтобы перемещение бусинки из точки A в точку B равнялось $2R \sin \alpha$. А для этого скорость бусинки в точке A должна удовлетворять условию:

$$\frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2R \sin \alpha,$$

полученному в части I статьи – см. формулу (8). Отсюда

$$u^2 = gR / \cos \alpha.$$

Бусинка будет иметь в точке A эту скорость u , если в точке O ей сообщена скорость v , равная по закону сохранения механической энергии

$$v = \sqrt{u^2 + 2gR(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{gR \left(2 + 2 \cos \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}.$$

4. Из миномёта ведут обстрел объекта, расположенного на склоне горы (рис. 10). На каком расстоянии l ($l = OB$) будут падать мины, если их начальная скорость v_0 , угол наклона горы β и угол стрельбы по отношению к горизонту α ($\alpha = 2\beta$)?

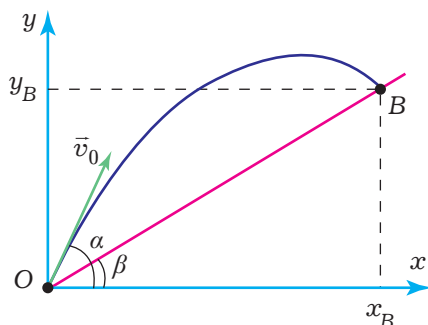


Рис. 10

Решение. Криволинейное движение мины по параболе можно разложить на два прямолинейных – по горизонтали и вертикали, отсчитывая их от точки A . Начальные скорости движения мины по горизонтали: $v_1 = v_0 \cos \alpha$, по вертикали $v_2 = v_0 \sin \alpha$. Уравнение её движения по горизонтали:

$$x = v_0 (\cos \alpha) t,$$

по вертикали

$$y = v_0 (\sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}.$$

Расстояние по горизонтали x_B и высота y_B точки падения мины связаны с длиной OB соотношениями:

$$x_B = l \cos \beta,$$

$$y_B = l \sin \beta.$$

Решая совместно последние четыре уравнения, находим искомое расстояние:

$$l = \frac{2v_0^2(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}.$$

Поскольку $\alpha = 2\beta$, имеем:

$$l = \frac{2v_0^2 \sin \beta \cos 2\beta}{g \cos^2 \beta}.$$

5. Между плоскими параллельными пластинами длиной L , расстояние между которыми d , создано электрическое поле напряжённостью E . В него влетает пучок электронов со скоростью v_0 под углом α к оси x , параллельной пластинам. При этом углы скоростей влёта и вылета с осью x равны (рис. 11). Какую длину L должны иметь пластины для осуществления такого движения? Силой тяжести пренебречь.

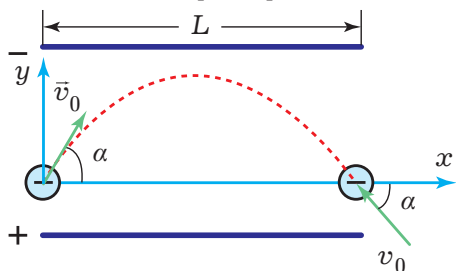


Рис. 11

Решение. В данной системе координат траектория движения электронов (см. формулу (1))

$$y = -\frac{eE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha)x.$$

По условию задачи $y = 0$, при $x = L$:

$$0 = -\frac{eE}{2mv_0^2 \cos^2 \alpha} L - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot L.$$

Отсюда:

$$L = \frac{2mv_0^2}{eE} \sin 2\alpha.$$

6. Маленькая капля масла массой 1г, имеющая отрицательный за-

ряд 10^{-8} Кл, влетает в точке O под углом $\varphi = 82^\circ$ к горизонту в область однородного электрического поля плоского конденсатора, расположенного вертикально (рис. 12). Между его пластинами поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 40$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 10$ см, их длина достаточно большая. Какую скорость v нужно сообщить капле, чтобы она оказалась в точке A противоположной пластины конденсатора на том же уровне, что и точка O ?

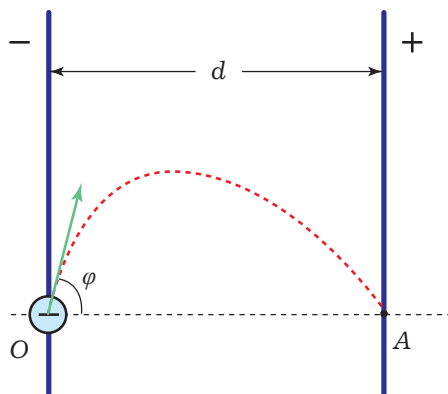


Рис. 12

Решение. Заряженная капля движется в пространстве, где существуют два потенциальных поля – гравитационное и электростатическое. В результате она испытывает силу тяжести, направленную вертикально вниз, и электрическую силу направленную направо – горизонтально. Эти силы создают ускорения g_0 и g' . Результирующее ускорение равно

$$g = \sqrt{g_0^2 + g'^2}.$$

Так как $g_0 = 9,8$ м/с²,

$$g' = \frac{qU}{md} = \frac{10^{-8} \cdot 40000}{10^{-3} \cdot 0,1} = 4 \text{ м/с}^2,$$

то $g = \sqrt{9,8^2 + 4^2} \approx 10,6$ м/с².

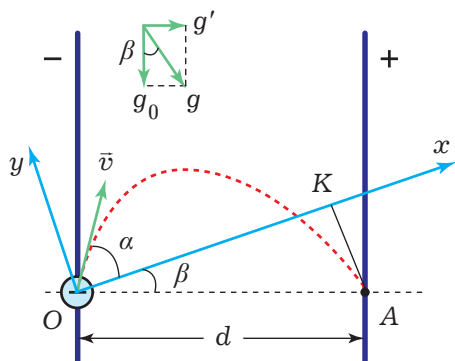


Рис. 13

Рассмотрим движение капли в потенциальном поле, которому соответствует ускорение g' , используя координатную систему (x, y) , в которой угол между осью x и линией OA равен β .

В этой системе

$$\text{tg} \beta = \frac{g'}{g_0} = \frac{qU}{mdg_0} = 0,41, \beta \approx 22^\circ.$$

Угол между осью x и скоростью капли $\alpha = \varphi - \beta = 60^\circ$.

Уравнение траектории в этой координатной системе:

$$y = (\text{tg} \alpha)x - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

где $x = OK$, а $y = AK$. Тогда

$$\begin{aligned} AK &= \text{tg} \alpha \cdot OK - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} OK^2 = \\ &= \text{tg} \alpha \cdot OK - \frac{g}{2v^2} (1 + \text{tg}^2 \alpha) OK^2, \end{aligned}$$

$$-d \sin \beta = d \cos \beta \cdot \text{tg} \alpha -$$

$$-\frac{g}{2v^2} (1 + \text{tg}^2 \alpha) d^2 \cos^2 \beta.$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{\frac{g(1 + \text{tg}^2 \alpha) d \cos^2 \beta}{2(\cos \beta \text{tg} \alpha + \sin \beta)}},$$

где $\sin 22^\circ \approx 0,3746$, $\cos 22^\circ \approx 0,9272$,
 $v \approx 9,96$ м/с.

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп

«Морская» музыка

Посмотрите на помещённый здесь рисунок. У вас, наверное, сразу возникнет вопрос: что же это такое? А ответ удивит: это музыкальный инструмент, особый («приливной») орган, на котором «играет» море.

Он был сооружён в Англии на морском берегу и снабжён 18 вертикальными трубами разной длины, нижняя часть которых открыта и размещена у поверхности воды.

Во время прилива в отверстия труб поступает морская вода, а воздушные столбы в них той или иной высоты вступают в резонансные колебания воздуха, вызванными волнами морского прибоя, – возникают разнообразные сочетания усиленных резонансом и слабых звуков. Оригинальные мелодии, создаваемые таким органом, меняются в зависимости от подъёма уровня воды в трубах и волнения на море.

