

Мукушев Базарбек Агзашулы
 Доктор педагогических наук,
 профессор кафедры физики
 Государственного университета
 им. Шакарима г. Семей,
 обладатель государственного гранта Республики
 Казахстан «Лучший преподаватель вуза-2012».



Параболическое движение тела Часть I

В статье рассматриваются задачи о различных явлениях механики и электростатики, объединяющим фактором для которых является параболическая траектория тела или заряженной частицы.

Введение

Для ясного понимания движения тел по траектории, которая представляет собой параболу, следует рассмотреть следующий классический пример из кинематики.

Пример. Тело в начальный момент времени находилось на высоте h . Ему сообщена скорость $\vec{v}_0$, направленная под углом α к горизонту (рис. 1). Нужно определить все кинематические характеристики его движения.

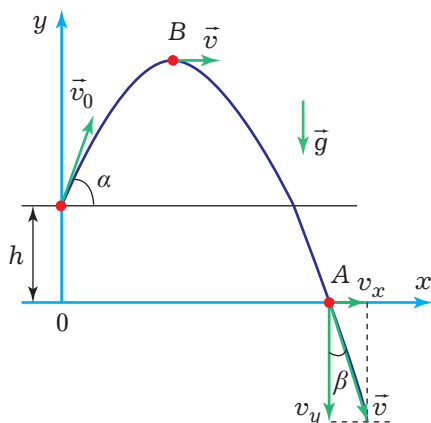


Рис. 1

Сначала уточним физическую модель, которая будет использована. Во-первых, примем скорость тела во много раз меньшей первой космической скорости; во-вторых, гравитационное поле вблизи Земли считаем однородным; в-третьих, не учитываем сопротивление воздуха.

Решение. Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при $t = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Кроме того, проекции ускорения тела на оси x и y равны $a_x = 0$, $a_y = -g$. Теперь формулы для проекций скорости и уравнения для координат примут вид:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (1)$$

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad (2)$$

$$y = h + v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Найдём уравнение траектории тела. Для этого из уравнений (1) исключим время:



$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим:

$$y = h + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3)$$

Из курса математики известно, что графиком функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

является парабола. В нашем случае

$$a = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (4)$$

$$b = \operatorname{tg} \alpha, \quad c = h.$$

Таким образом, траектория тела, брошенного под углом к горизонту, — парабола, проходящая через точку, из которой брошено тело. Её ветви направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. Очевидно, что вершина параболы находится в наивысшей точке подъёма тела (точка В). Определим координаты точки В.

Из математики известно, что вершина параболы имеет следующие координаты:

$$x_B = -\frac{b}{2a}, \quad y_B = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}. \quad (5)$$

Подставляя данные из (4) в (5), находим координаты наивысшей точки подъёма тела:

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_B = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (6)$$

Найдём теперь дальность L падения тела, т. е. длину отрезка ОА. Она равна

$$L = v_0(\cos \alpha)T,$$

где буквой T обозначено время движения до падения тела. В этот момент $y = 0$, т. е. согласно уравнению (2)

$$0 = h + v_0(\sin \alpha)T - \frac{gT^2}{2},$$

отсюда

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \quad (7)$$

Так как $T > 0$, следует взять знак плюс. Итак:

$$L = v_0(\cos \alpha)T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}.$$

При $h = 0$ дальность падения брошенного тела равна

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8)$$

Из последнего уравнения, определяющего дальность падения брошенного тела, сделаем следующие важные выводы. Преобразуя уравнение (8), получим равенство

$$\sin 2\alpha = \frac{Lg}{v_0^2}.$$

Отсюда имеем

$$\sin 2\alpha = \frac{Lg}{v_0^2} \leq 1,$$

или

$$v_0^2 \geq Lg.$$

Это неравенство определяет ограничение снизу на величину начальной скорости.

В случае, когда нестрогое неравенство обращается в равенство, т. е.

$$\sin 2\alpha = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad v_0 = \sqrt{Lg},$$

задача имеет единственное решение. Таким образом, максимальная

дальность $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$ достигается при

бросании тела под углом к горизонту 45° .

Если же имеет место строгое неравенство, то решений два:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{gL}{v_0^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{gL}{v_0^2}.$$

Эти ответы соответствуют настильной (1) и навесной (2) траекториям тела (рис. 2).

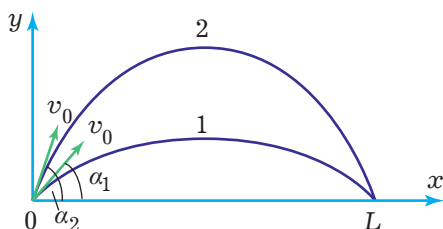


Рис. 2

Определим теперь конечную скорость тела, брошенного с высоты h . Проще всего это сделать с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2},$$

откуда

Кинематика

Задача 1. Необходимо с земли перебросить мяч через вертикальную стенку высотой H , находящуюся на расстоянии s (рис. 3) от человека, бросающего его. При какой наименьшей начальной скорости это возможно? Под каким углом α к горизонту должна быть в этом случае направлена скорость?

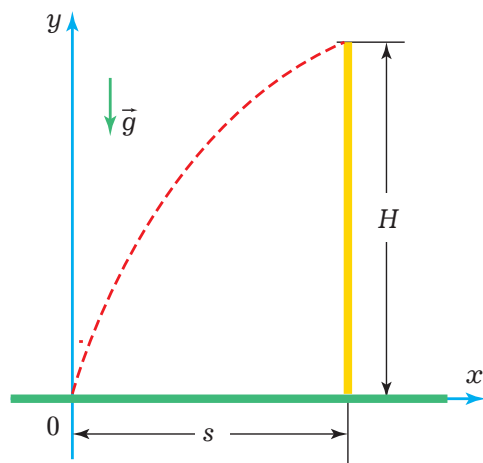


Рис. 3

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Скорость тела в любой момент времени равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где $v_x = v_0 \cos \alpha$, $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$,

отсюда скорость

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin \alpha}.$$

Она составляет с вертикалью угол β , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha - gt}.$$

Следовательно, угол между направлением скорости и вертикалью в точке A (см. рис. 1) равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha - gT}.$$

Решение. Используя формулу (3), напишем уравнение траектории мяча:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\operatorname{tg} \alpha)x.$$

Траектория мяча проходит через точку с координатами s и H . Поэтому

$$H = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} s^2 + (\operatorname{tg} \alpha)s.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v_0^2 &= gs^2 / 2 \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - H) = \\ &= gs^2 / (s \sin 2\alpha - H \cos 2\alpha - H). \end{aligned}$$

Воспользуемся тригонометрической формулой:

$$\begin{aligned} s \sin 2\alpha - H \cos 2\alpha &= \\ &= \sqrt{s^2 + H^2} \sin(2\alpha - \varphi), \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \varphi = H/s$. Тогда

$$v_0^2 = gs^2 / (\sqrt{s^2 + H^2} \sin(2\alpha - \varphi) - H).$$

Наименьшее значение

$$v_0 = \sqrt{gs^2 / (\sqrt{s^2 + H^2} - H)}$$

достигается при $\alpha = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Задача 2. Под каким углом к горизонту нужно бросить камень, чтобы он при движении всё время удалялся от бросающего его человека?

Решение. В системе координат, приведённой на рис. 4, движение камня описывается следующими уравнениями:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt,$$

$$x = v_0 (\cos \alpha) t, \quad y = v_0 (\sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}.$$

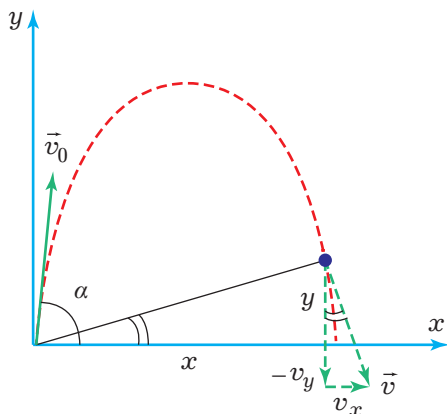


Рис. 4

Камень окажется на самом большом расстоянии от начального положения, когда скорость станет перпендикулярной его радиус-вектору. В этот момент

$$\frac{y}{x} = -\frac{v_x}{v_y}.$$

В результате получаем квадратное уравнение относительно момента времени t , когда это происходит:

$$g^2 t^2 - (3gv_0 \sin \alpha)t + 2v_0^2 = 0.$$

Для достижения максимального угла необходимо, чтобы дискриминант этого уравнения был равен нулю, т. е.

$$(3gv_0 \sin \alpha_{\text{макс}})^2 - 8g^2 v_0^2 = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{8}{9}},$$

а максимальный угол бросания

$$\alpha_{\text{макс}} = \arcsin 0,94 = 70,5^\circ.$$

Таким образом, для того чтобы камень постоянно удалялся от бросающего человека, угол бросания должен быть меньше $70,5^\circ$.

Задача 3. Мячику сообщена скорость v_0 в точке O под некоторым углом α к горизонту (рис. 5). Движение мячика происходит в пространстве, ограниченном двумя параллельными вертикально стоящими досками (стенками), расстояние между которыми равно L .

Под каким углом к горизонту нужно пустить мячик, чтобы он возвратился в точку O ?

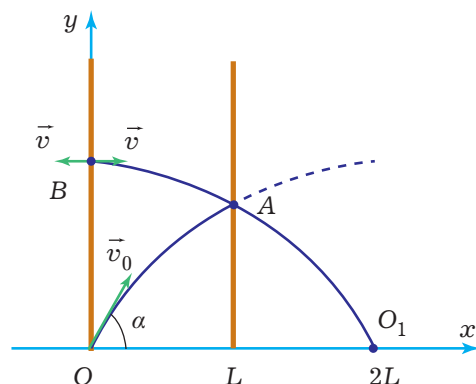


Рис. 5

Решение. При наличии второй стенки мячик в точке A испытывает упругое соударение. После него он начинает двигаться по зеркально симметричной траектории O_1AB . В точке B мячик испытывает упругое соударение с первой стенкой. Если в точке B вектор скорости мячика $\vec{v}$ перпендикулярен стенке, тогда мячик отскакивает от неё с такой же скоростью и он может возвратиться назад в точку O по траектории BAO . Итак, точка B должна быть вершиной параболы O_1AB . Половина величины дальности полёта в этих условиях равна $2L$.

Используя формулу (8), напомним:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 4L,$$

Откуда

$$\sin 2\alpha = \frac{4gL}{v_0^2}.$$

Окончательно

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{4gL}{v_0^2}.$$

Задача 4. Скорость течения реки возрастает пропорционально расстоянию от берега, достигая своего максимального значения v_0 на середине реки. У берегов она равна нулю. Лодка движется по реке таким образом, что её скорость u относительно воды постоянна и перпендикулярна течению.

а) Найти расстояние, на которое будет снесена течением лодка при переправе, если ширина реки L .

б) Определить траекторию лодки.

Решение. а) Точка O (начало координат на рис. 6) – место отправления лодки. Поскольку она движется перпендикулярно течению с постоянной скоростью u , то на расстоянии y от берега окажется через время

$$t = \frac{y}{u}.$$

Скорость течения на этом расстоянии при движении лодки до середины реки ($y \leq L/2$) равна

$$v = \frac{2v_0}{L} y.$$

Подставляя значение $y = ut$ в последнюю формулу, получим

$$v = \frac{2v_0 u t}{L}.$$

Из последнего соотношения следует, что движение лодки в направлении, параллельном берегам, происходит с постоянным ускорением

$$a = \frac{2v_0 u}{L}.$$

Обозначим время, за которое лодка достигнет середины реки, буквой T . Оно равно

$$T = \frac{L}{2u}.$$

За это время она будет снесена вниз по течению на расстояние

$$s = \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0 L}{4u}.$$

При движении от середины реки (точка D) до противоположного берега лодка будет снесена дополнительно ещё на расстояние s . Таким образом, искомое расстояние равно $v_0 L/2u$.

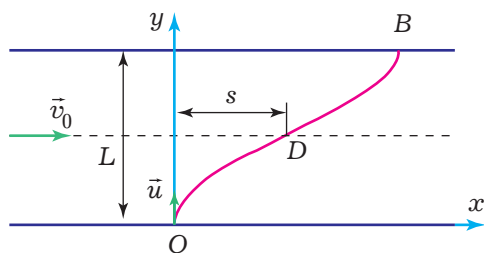


Рис. 6

б) При движении лодки до середины реки

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 u}{L} t^2, \quad y = ut.$$

Из этих соотношений определяем траекторию лодки от O до D :

$$y^2 = \frac{Lu}{v_0} x$$

(парабола). Вторая половина траектории (DB) имеет ту же закономерность, что и первая.

Задача 5. На реке на расстоянии $L = 60$ м от берега стоит на якоре плот. Скорость течения реки у самого берега $u_0 = 0$ и растёт пропорционально расстоянию от него. Скорость течения воды в месте, где находится плот, равна $u_L = 2$ м/с. Моторная лодка отправляется от берега к плоту. Относительно воды она развивает скорость $v = 7,2$ км/ч. Начальные места лодки и плота находятся на линии, перпендикулярной берегу. Опытный штурман, правильно сориентировав лодку перед отплытием и

не корректируя направление её скорости в дальнейшем, точно достиг плота (рис. 7).

а) Сколько времени лодка находилась в пути?

б) Найдите уравнение траектории лодки относительно берега.

в) Определите координаты места наибольшего удаления лодки от линии, соединяющей точку её старта и плот.

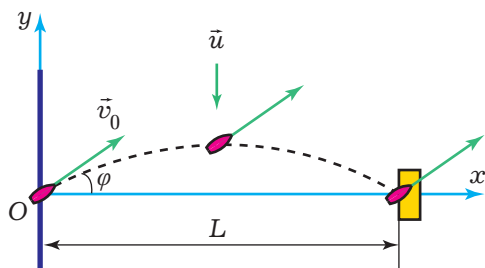


Рис. 7

Решение. Скорость течения реки на расстоянии x от берега

$$u = \frac{u_L x}{L}.$$

Составляющие скорости лодки относительно берега вдоль осей x и y будут:

$$v_x = v \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \varphi - u$$

(v – скорость лодки относительно воды); и так как $x = vt \cos \varphi$, то

$$v_y = v \sin \varphi - \frac{u_L}{L} vt \cos \varphi.$$

Введём следующие обозначения:

$$v \sin \varphi = v_0, \quad \frac{u_L}{L} v \cos \varphi = a.$$

Тогда скорость лодки вдоль оси y

$$v_y = v_0 - at.$$

Таким образом, движение лодки вдоль оси x – равномерное, вдоль y – равнозамедленное. Принимая во внимание законы движения тела, движущегося вверх по наклонной

плоскости $\left(y = v_0 t - \frac{at^2}{2} \right)$, получим

формулы для его координат x и y , причём в данном случае

$$x = vt \cos \varphi,$$

$$y = vt \sin \varphi - \frac{u_L}{2L} vt^2 \cos \varphi.$$

а) В момент встречи лодки с плотом $t = T$ координаты $y = 0$, $x = L$. Следовательно,

$$L = vT \cos \varphi,$$

$$0 = vT \sin \varphi - \frac{u_L}{2L} vT^2 \cos \varphi.$$

Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{u_L}{2v} \quad \text{и} \quad T = \frac{L}{v \cos \varphi}.$$

Подставляя заданные значения величин, получим $\varphi = 30^\circ$, $T \approx 35$ с. Если $u_L \leq 2v$, то встреча с плотом невозможна.

б) Чтобы найти уравнение траектории движения лодки, из формулы координаты x определим время и подставим его в формулу координаты y . Таким образом, получим формулу параболы

$$y = \operatorname{tg} \varphi \cdot x - \frac{u_L}{2Lv} x^2.$$

в) Для нахождения координат наибольшего удаления лодки от линии, соединяющей место старта лодки и плот, используем математические формулы, определяющие

вершину параболы $\left(x_B = -\frac{b}{2a}, \right.$

$$\left. y_B = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right). \text{ В нашем случае}$$

$$a = -\frac{u_L}{2Lv \cos \varphi}, \quad b = \operatorname{tg} \varphi, \quad c = 0.$$

Итак, находим координаты точки максимального удаления лодки от оси $0x$:

$$x_B = \frac{L v \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi}{u_L} = 30 \text{ м},$$

$$y_B = \frac{L v \operatorname{tg}^2 \varphi \cos \varphi}{2u_L} = 5\sqrt{3} \text{ м}.$$

Динамика

Задача 6. Плоскость квадрата наклонена к горизонту под углом $\varphi = 30^\circ$. Маленький шарик начинает движение по ней вверх из точки A (рис. 8) с некоторой начальной скоростью. Трения нет.

а) Под каким углом к прямой OA нужно пустить шарик, чтобы он достиг прямой CB и вернулся в точку A ?

б) Какую скорость нужно ему сообщить? Площадь наклонной плоскости равна 1 м^2 .

Решение. а) При движении шарика на него действуют две силы: сила тяжести и сила реакции плоскости. Запишем второй закон Ньютона для этого случая:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

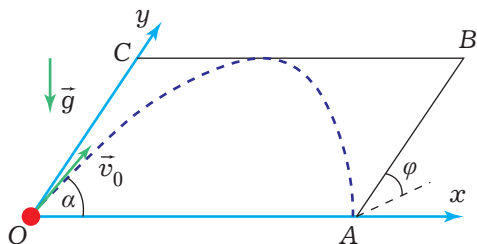


Рис. 8

Проецируем векторы ускорения и сил на оси x и y , которые расположены на наклонной плоскости. В результате получим:

$$a_x = 0, \quad a_y = -g \sin \varphi.$$

Становится ясно, что движение шарика по наклонной плоскости аналогично движению тела, брошенного под углом α к горизонту в поле тяжести с ускорением свободного падения

$$g' = g \sin \varphi.$$

Воспользуемся формулами для максимальной высоты брошенного тела под углом α к горизонту и дальности полёта вдоль оси x :

$$L_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g'},$$

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g'}.$$

Принимая во внимание, что в данном случае $L_{\max} = H_{\max}$, напомним:

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g'} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g'}.$$

Откуда

$$\alpha = \arctg 4 \approx 76^\circ.$$

б) Из условия задачи следует, что

$$L_{\max} = H_{\max} = 1,$$

$$g' = g \sin \varphi = g/2,$$

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g'} = 1$$

и

$$v_0 \approx 3,2 \text{ м/с}.$$

Задача 7. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рис. 9, выполненном в определённом масштабе, крестиками отмечены положения снаряда и одного из осколков через последовательные равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находится в точке B в тот момент, когда первый осколок проходит точку A .

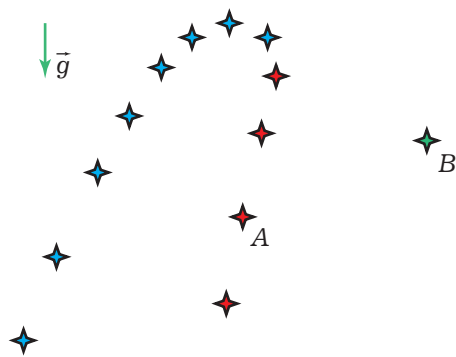


Рис. 9

Решение. Если массы осколков равны m_1 и m_2 , то их расстояния r_1 и r_2 до центра масс в любые моменты времени должны быть такими, чтобы

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Центр же масс системы движется так, как двигалась бы частица с массой $M = m_1 + m_2$ под действием сил, приложенных к её телам. В рассматриваемом случае центр масс системы продолжает двигаться по той же параболе, по которой он двигался до разрыва снаряда.

Нетрудно найти последовательные положения центра масс. На рис. 10 видно, что точка a – вершина параболы. Это означает, что предыдущая и последующая точки нахождения снаряда (b и b') лежат на одной горизонтали. Следовательно, центр масс системы после разрыва снаряда лежит на тех же горизонтальных прямых, что и точки c, d, e, f, g , причём расположены симметрично этим точкам относительно вертикали, проходящей через точку a .

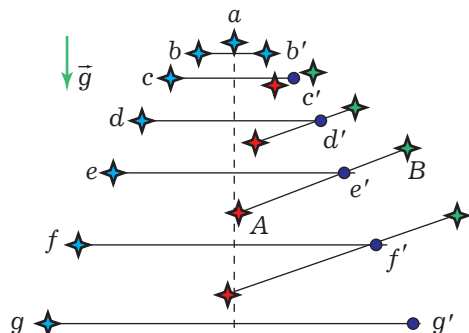


Рис. 10

Проведём теперь прямую AB ; она пройдёт через положение e' центра масс, которое делит её в отношении 1:2. Следовательно,

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}.$$

Для того чтобы найти другие положения второго осколка, надо провести прямые через последовательные точки, в которых находился первый осколок и соответствующие положения центра масс. Затем отложить на этих прямых от центра масс отрезки, равные половине расстояния между первым осколком и центром масс.

Продолжение следует.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Короче некуда

При создании атомной бомбы один из наших физиков сказал:

– Главное сейчас – не только догнать Соединённые Штаты. Нужно перегнать их. Эту задачу можно сформулировать коротко – двумя словами: «Перехаритоним Оппенгеймера!» (Ю.Б. Харитон и Р. Оппенгеймер – известные российский и американский разработчики атомного оружия.)

