



Григорьев Юрий Михайлович
Доктор физико-математических наук, действительный член Академии наук Республики Саха (Якутия), заведующий кафедрой теоретической физики Физико-технического института Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова (ФТИ ЯГУ), заместитель директора ФТИ ЯГУ по научной работе, председатель жюри Международной олимпиады школьников «Туймаада» по физике.



Чудновский Александр Витальевич
Аспирант и научный сотрудник Московского физико-технического института (МФТИ), преподаватель кафедры общей физики МФТИ, заместитель председателя жюри Международной олимпиады школьников «Туймаада» по физике.



Муравьёв Вячеслав Михайлович
Научный сотрудник Института физики твёрдого тела Российской академии наук, член жюри Международной олимпиады школьников «Туймаада» по физике.

Международная олимпиада «Туймаада» по физике. Задачи на применение законов сохранения в механике

В статье рассказано о принципах проведения физической части Международной олимпиады «Туймаада», перечислены все призёры олимпиады с момента её рождения и разобрана тематическая подборка задач «Туймаады» на использование законов сохранения в механике.

Организация олимпиады по физике

Олимпиада «Туймаада» возникла из одноимённой летней школы в прошлом тысячелетии, а точнее — в 1994 году. В первый год задачи предлагались в форме контрольной по пройденным темам и лишь со следующего года приобрели олимпиадные черты. В течение пары лет затвердился уровень сложности и тематика задач — в качестве ориентира была выбрана Международная олимпиада по физике. Вплоть до 1999 года участники всех классов решали общий комплект задач, а в 2000 году было принято решение разделить участников по возрасту на старшую и младшую лиги. Старшая лига унаследовала уже сложившиеся к тому времени принципы отбора задач, а задачи младшей лиги ограничили уровнем сложности задач 10 класса Всероссийской олимпиады школьников.

Сейчас участники соревнуются в двух турах: теоретическом и экспериментальном. На каждый тур отводится по 5 часов. В теоретическом туре предлагается решить по 4 задачи, а в экспериментальном — по 2. В некоторые годы давали одну экспериментальную задачу, по сложности эквивалентную двум. Традиционно задачи составляются в Москве членами жюри Всероссийских олимпиад, бывшими в своё время победителями Международной олимпиады по физике, что обеспечивает преемственность олимпиадных принципов.

В этом 2008 году у олимпиады «Туймаада» юбилей — она будет проходить в 15-й раз! В связи с этим нам бы хотелось привести полный список призёров по физике, которые сейчас учатся и двигают современную науку в самых престижных институтах мира. Ниже в списке римскими цифрами указан диплом, который участник завоевал на олимпиаде, а сокращение «РС (Я)» означает «Республика Саха (Якутия)».

1994 год, I «Туймаада»
Дину Валентин, **I**, Румыния
Тинаса Елена, **II**, Румыния
Сидельников Олег, **III**, РС (Я)
Чертов Максим, **IV**, Томск
Сереп Салдыс, **V**, Республика Тыва
Терешкин Григорий, **VI**, РС (Я)

1995 год, II «Туймаада»
Бозго Лилио, **I**, Румыния
Бурдан Минаи, **I**, Румыния
Сидельников Олег, **II**, РС (Я)
Захаров Анатолий, **III**, РС (Я)
Чертов Максим, **IV**, Томск
Кызыл-оол Айдар, **V**, Республика Тыва
Денисенко Антон, **V**, Братск

1996 год, III «Туймаада»
Бора Флорин, **I**, Румыния
Энкулеску Михаэла, **II**, Румыния
Заякин Андрей, **III**, РС (Я)

1997 год, IV «Туймаада»
Разуан Александр Попа, **I**, Румыния
Моника-Мария Гвика, **I**, Румыния
Заякин Андрей, **II**, РС (Я)
Соболев Николай, **II**, РС (Я)
Ильин Александр, **III**, РС (Я)
Дашицыренов Дугар, **III**, Республика Бурятия
Ке Лао, **III**, Китай
Бобков Алексей, **III**, РС (Я)
Стучебров Сергей, **III**, Томск

1998 год, V «Туймаада»
Чу Минг, **I**, Китай
Маринойу Богдан, **I**, Румыния
Заякин Андрей, **II**, РС (Я)
Андреа Цепойу, **II**, Румыния
Ильин Александр, **III**, РС (Я)
Бобков Алексей, **III**, Фонд «УФУК»
Яковлев Вадим, **III**, РС (Я)

1999 год, VI «Туймаада»
Шварц Осип, **I**, Новосибирск
Ротаев Михаил, **I**, Новосибирск
Тодер Евгений, **II**, Новосибирск
Ахметов Алексей, **II**, Томск
Хие Ю, **II**, Китай
Лукьянов Михаил, **II**, Барнаул
Кондаков Василий, **III**, РС (Я)
Попова Надежда, **III**, РС (Я)

2000 год, VII «Туймаада»

Старшая лига

Ахмеров Антон, **I**, Новосибирск
Дозморов Андрей, **I**, Иркутск
Андрейка Мугурел, **I**, Румыния
Геку Флорин, **I**, Румыния
Димитру Даниэль, **II**, Румыния
Кондаков Василий, **II**, РС (Я)
Давыдов Сергей, **III**, РС (Я)
Еремеев Пётр, **III**, РС (Я)

Младшая лига

Дружинин Андрей, **I**, Ноябрьск
Петров Андрей, **I**, Иркутск
Таллаев Егор, **I**, РС (Я)
Татаринов Айсен, **II**, РС (Я)
Гибински Андрей, **II**, Дубна
Журавлёв Михаил, **III**, Ноябрьск
Мохначевский Александр, **III**, РС (Я)
Егоров Юрий, **III**, РС (Я)
Ефремов Александр, **III**, РС (Я)

2001 год, VIII «Туймаада»

Старшая лига

Идрисов Георгий, **I**, Бийск
Егоров Юрий, **II**, РС (Я)
Киданов Вадим, **II**, Бийск
Изотов Виталий, **II**, Владивосток
Ахмеров Антон, **III**, Новосибирск
Чередджи Виорел, **III**, Румыния
Унгурену Сержиу, **III**, Румыния

Младшая лига

Татаринов Айсен, **I**, РС (Я)
Егоров Николай, **I**, РС (Я)
Фёдоров Андрей, **II**, Владивосток
Мохначевский Александр, **II**, РС (Я)
Аполонская Инна, **III**, Бийск
Ильин Алексей, **III**, Владивосток
Чжун Хао, **III**, Китай
Акимов Фёдор, **III**, РС (Я)

2002 год, IX «Туймаада»

Старшая лига

Татаринов Айсен, **I**, РС (Я)
Мохначевский Александр, **II**, РС (Я)
Ефремов Александр, **II**, РС (Я)
Хенинг Александру, **III**, Румыния
Денисов Андрей, **III**, Владивосток
Константин Андрей, **III**, Румыния

Младшая лига

Шавлюгин Евгений, **I**, Владивосток
Харбанов Михаил, **II**, РС (Я)
Ожегов Александр, **II**, Иркутск
Сыромятников Николай, **III**, РС (Я)
Антипин Василий, **III**, РС (Я)
Гуляев Алексей, **III**, РС (Я)

2003 год, X «Туймаада»

Старшая лига

Молдован Михай, **I**, Румыния
Татаринов Айсен, **I**, РС (Я)
Мохначевский Александр, **II**, РС (Я)
Проистосеску Кристиан, **II**, Румыния
Карп Александру-Михай, **III**, Румыния
Харбанов Михаил, **III**, РС (Я)

Младшая лига

Флегонтова Екатерина, **I**, РС (Я)
Гизатулин Денис, **II**, Владивосток
Кириллов Василий, **III**, Иркутск
Богач Максим, **III**, Иркутск
Дайнеко Артём, **III**, Красноярский край
Григорьев Тимур, **III**, РС (Я)
Готовцев Михаил, **III**, РС (Я)

2004 год, XI «Туймаада»

Старшая лига

Харбанов Михаил, **I**, РС (Я)
Дзябура Евгений, **II**, Сборная России
Ангел Андрей, **II**, Румыния
Станческу Траян, **III**, Румыния
Богословский Никита, **III**, Сборная России
Григорьев Тимур, **III**, РС (Я)
Моржаков Василий, **III**, Сборная России
Григорьев Алексей, **III**, РС (Я)
Иванов Виктор, **III**, РС (Я)
Стойка Богдан, **III**, Румыния
Рамазанов Болат, **III**, Казахстан
Гизатулин Денис, **III**, Владивосток

Младшая лига

Кузин Денис, **I**, Мордовия
Ретивых Владимир, **II**, Иркутск
Попов Айсен, **II**, РС (Я)
Ефремов Александр, **II**, РС (Я)
Васильева Сахаяна, **III**, РС (Я)
Жуплев Антон, **III**, Владивосток
Габышев Анатолий, **III**, РС (Я)
Готовцев Михаил, **III**, РС (Я)
Афанасьев Александр, **III**, Владивосток

2005 год, XII «Туймаада»

Старшая лига

Тимофеев Олег, **I**, Сборная России
Гусихин Павел, **I**, Сборная России
Иванов Виктор, **II**, РС (Я)
Гизатулин Денис, **II**, Владивосток
Михайлеску Ион Габриэль, **III**, Румыния
Сидоров Степан, **III**, РС (Я)
Рындин Максим, **III**, Березники
Томозеу Михай-Мариан, **III**, Румыния
Григорьев Тимур, **III**, РС (Я)
Мокану Лаура Моника, **III**, Румыния
Истомин Роман, **III**, Пермь

Младшая лига

Сметнёв Денис, **I**, Саров
Соловьёва Ксения, **II**, Пермь
Сивцев Пётр, **II**, РС (Я)
Попов Айсен, **II**, РС (Я)
Афанасьев Александр, **II**, Владивосток
Кузин Денис, **III**, Мордовия
Урозаев Диас, **III**, Казахстан

2006 год, XIII «Туймаада»

Старшая лига

Федянин Дмитрий, **I**, Саратов
Марковцев Вадим, **II**, Сергиев Посад
Попа Кристина Джорджета, **II**, Румыния
Афанасьев Александр, **III**, Владивосток
Рындин Максим, **III**, Березники
Мемет Эдвин, **III**, Румыния
Янус Андрада, **III**, Румыния

Младшая лига

Семёнов Станислав, **I**, Саров
Сексембаев Жандос, **I**, Казахстан
Степанов Сергей, **II**, РС (Я)
Васильева Сахаяна, **II**, РС (Я)
Федотов Игорь, **II**, Дубна
Микелов Артём, **II**, Дубна
Таинов Ринат, **III**, Казахстан
Емельянов Борис, **III**, РС (Я)
Плешаков Руслан, **III**, Владивосток
Карпов Иван, **III**, Иркутск
Мосунова Дарья, **III**, Саров
Нашаров Аскар, **III**, Казахстан
Цой Пётр, **III**, РС (Я)

2007 год, XIV «Туймаада»

Старшая лига

Кулиев Виталий, **I**, Сборная России
Проскурин Михаил, **I**, Сборная России
Сметнёв Денис, **I**, Саров
Попов Айсен, **II**, РС (Я)
Суханов Илья, **II**, Сборная России
Сивцев Пётр, **II**, РС (Я)
Плешаков Руслан, **II**, Владивосток
Янус Андрада, **III**, Румыния
Степанов Сергей, **III**, РС (Я)
Петрика Габриэль, **III**, Румыния

Младшая лига

Буслаев Павел, **I**, Санкт-Петербург
Цой Пётр, **I**, РС (Я)
Бердибек Шапагат, **II**, Казахстан
Худайбергенов Абиш, **II**, Казахстан
Сапожник Алексей, **II**, Иркутск
Сарсенов Ержан, **II**, Казахстан
Урбан Анатолий, **III**, Казань
Майхиев Нуразиз, **III**, Казахстан
Попов Тимофей, **III**, РС (Я)
Горностаев Дмитрий, **III**, Мордовия
Юдин Анатолий, **III**, Саров
Казарин Александр, **III**, Саров
Смолейчук Роман, **III**, Владивосток
Чириков Александр, **III**, РС (Я)
Максимов Игорь, **III**, РС (Я)

Применение законов сохранения на примере задач олимпиады «Туймаада»

Одна из проблем, возникающих у многих школьников при решении задач, — это корректное использование законов сохранения. В большинстве случаев учащиеся хорошо помнят общие формулировки, но могут затрудняться применить их в конкретных условиях. Ниже на примере ряда задач по механике показано, как правильно использовать в решении законы сохранения энергии и импульса. Одна (последняя) задача иллюстрирует применение закона сохранения момента импульса, который выходит за рамки школьной программы. Все приведённые задачи в разные годы предлагались участникам Международной олимпиады «Туймаада».

Задача 1. Канал. На гладком горизонтальном столе покоится брусок массой M. В бруске проточен сквозной криволинейный канал. Все изгибы канала плавные, а стенки — гладкие. Вход и выход канала находятся на одинаковых расстояниях от стола. В отверстие канала влетает шарик массой m с горизонтальной скоростью v_0 и, пролетев канал, вылетает с другой стороны. Векторы скоростей шарика в точках входа и выхода из канала сонаправлены и лежат на одной прямой. С какой скоростью u будет двигаться брусок после вылета шарика?



Решение. Обозначим через v скорость шарика в точке выхода из канала и направим ось x вдоль скоростей v_0 и v, а ось y — перпендикулярно оси x в горизонтальной плоскости. Для системы брусок–шарик запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси и закон сохранения энергии:

$$x: \qquad mv_0 = mv + Mu_x, \qquad (1)$$

$$y: \qquad 0 = 0 + Mu_y, \qquad (2)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \qquad (3)$$

где u_x и u_y — проекции искомой скорости u бруска. Из (2) сразу видно, что $u_y = 0$, значит, $u = u_x$. Перепишем уравнения (1) и (3) в виде:

$$m(v_0 - v) = Mu, \qquad (4)$$

$$m(v_0^2 - v^2) = Mu^2. \qquad (5)$$

Одно из решений полученной системы очевидно:

$$v_0 - v = 0, \qquad u = 0. \qquad (6)$$

Другое решение находим, поделив (5) на (4), что можно сделать, если не выполняется (6):

$$v_0 + v = u, \qquad v_0 - v = \frac{M}{m}u,$$

откуда

$$u = \frac{2m}{M+m}v_0, \qquad v = \frac{m-M}{M+m}v_0. \qquad (7)$$

Однако (7) не удовлетворяет условию задачи, так как даёт $v < 0$, если $m < M$, и $v < u$, если $m > M$, что в обоих случаях означает, что шарик вылетает из канала в обратном направлении.

Таким образом, ответ задачи выражается соотношением (6). Странный результат, не правда ли? Неужели шарик не оказывает никакого воздействия на брусок? Оказывает. В процессе движения шарика в канале скорость шарика и скорость бруска изменяются как по модулю, так и по направлению в зависимости от формы канала. Однако после взаимодействия их скорости принимают исходные значения.

Задача 2. Космический корабль. Космический корабль летел издалека с выключенными двигателями по направлению к астероиду, расположенному на большом расстоянии от всех других космических тел. Пролетев вблизи астероида, корабль потерял

$k = 40\%$ своей скорости и отклонился от первоначального направления движения на угол $\varphi = 120^\circ$ в системе отсчёта, относительно которой астероид покоился. Найдите отношение массы M астероида к массе m корабля.

Решение. Качественный вид траектории космического корабля в системе отсчёта, относительно которой удалённый астероид покоился, показан на рис. 1, где v_0 и v — скорости корабля до и после взаимодействия с астероидом, u — скорость астероида, вызванная притяжением к кораблю. Поскольку по условию влияние других космических тел мало, то для системы корабль–астероид справедливы законы сохранения импульса и энергии:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{u}, \qquad (8)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \qquad (9)$$

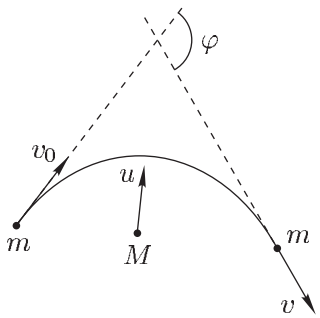


Рис. 1

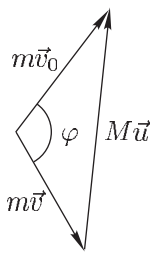


Рис. 2

Применяя к треугольнику (рис. 2), иллюстрирующему векторное равенство (8), теорему косинусов, получим

$$(Mu)^2 = (mv_0)^2 + (mv)^2 - $$

$$-2(mv_0)(mv)\cos\varphi. \qquad (10)$$

Решая (9) и (10) совместно, исключим u и подставим $v = v_0(1-k)$, после чего выразим

$$\frac{M}{m} = \frac{1 + (1-k)^2 - 2(1-k)\cos\varphi}{1 - (1-k)^2} =$$

$$= 3{,}0625 \approx 3.$$

Задача 3. Два бруска. Два бруска массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г находятся на гладкой горизонтальной поверхности, соединены пружиной, сжатой на величину $\Delta L = 2$ см, и связаны нитью (рис. 3). Один брусок касается стены. Найдите, на какую максимальную величину x растянется пружина, если пережечь нить.

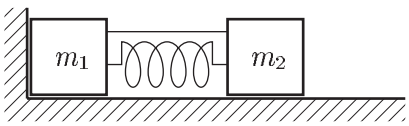


Рис. 3



Решение. После пережигания нити брусок m_2 начинает двигаться под действием силы упругости, а брусок m_1 остаётся в покое, так как сила упругости компенсируется реакцией стенки. Брусок m_1 начнёт двигаться только тогда, когда сила сжатия пружины сменится силой растяжения, то есть при

обращении в нуль деформации пружины. Обозначим через v скорость бруска m_2 в этот момент времени и применим закон сохранения механической энергии:

$$\frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{m_2 v^2}{2},$$

откуда

$$v = \Delta L\sqrt{\frac{k}{m_2}}. \qquad (11)$$

При максимальном растяжении пружины скорости брусков сравняются, поэтому обозначим их одной буквой u. Запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе растяжения пружины:

$$m_2 v = (m_1 + m_2)u, \qquad (12)$$

$$\frac{m_2 v^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \qquad (13)$$

Решая уравнения (11), (12) и (13), получаем ответ:

$$x = \frac{\Delta L}{\sqrt{1 + m_2/m_1}} = 1 \text{ см}.$$

Задача 4. Сосуд. На шероховатой поверхности стола покоится пустой сосуд массой M с площадью основания S. В боковой стене у самого дна сосуда имеется закрытое пробкой небольшое отверстие сечением σ. Когда в сосуд налили воду до уровня H, пробка выскользнула из отверстия и сосуд пришёл в движение с ускорением a. Найдите коэффициент трения μ между дном сосуда и поверхностью стола. При каких коэффициентах трения μ_0 сосуд останется на месте после выскальзывания пробки? Плотность воды ρ известна. Различие между коэффициентами трения покоя и скольжения не учитывайте.

Решение. Применим к сосуду с водой закон изменения импульса в течение небольшого промежутка времени Δt после выскальзывания пробки (рис. 4):

$$v\Delta m - (M + m)\Delta u = F_{\text{тр}}\Delta t, \qquad (14)$$

где v — скорость вытекающей воды, $\Delta m = \rho\sigma v\Delta t$ — масса воды, вытекшей за время Δt, $m = \rho SH$ — начальная масса воды, Δu — приращение скорости сосуда с водой за время Δt, $F_{\text{тр}} = \mu(M + m)g$ — сила трения, действующая на сосуд. Отметим, что в силу малости Δt мы пренебрегли изменением массы воды в сосуде при расчёте импульса сосуда с водой и силы трения. Подставив в (14) выражения для Δm, m и $F_{\text{тр}}$, получаем

$$\rho\sigma v^2\Delta t - (M + \rho SH)\Delta u = \mu(M + \rho SH)g\Delta t,$$

откуда после сокращения на Δt и замены $a = \Delta u/\Delta t$ находим

$$\mu = \frac{\rho\sigma v^2 - (M + \rho SH)a}{(M + \rho SH)g}. \qquad (15)$$

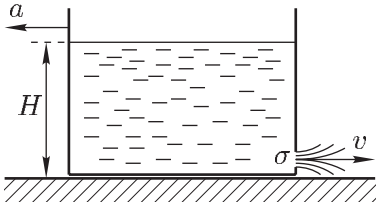


Рис. 4



Для нахождения v применим закон изменения энергии к вытекающей воде, то есть приравняем изменение её кинетической энергии работе сил гидростатического давления:

$$\frac{\Delta m}{2}v^2 - 0 = P\sigma v\Delta t,$$

откуда после подстановки Δm и $P = \rho gH$ получаем $v^2 = 2gH$. Подставив последнее соотношение в (15), находим

$$\mu = \frac{2\rho\sigma H}{m + \rho SH} - \frac{a}{g}.$$

Из ответа видно, что чем меньше ускорение a сосуда, тем больше коэффициент трения μ. Максимальное значение коэффициента трения, при котором сосуд ещё может начать движение, достигается при $a = 0$, следовательно,

$$\mu_0 \geqslant \frac{2\rho\sigma H}{m + \rho SH}.$$

Задача 5. Маятник Максвелла. Маятник Максвелла массой m, состоящий из тонкого стержня радиусом r, на котором посередине жёстко закреплён маховик радиусом R, подвешен к потолку на двух одинаковых нитях. Аккуратно вращая стержень, нить намотали на него так, что маятник поднялся на высоту h. Найдите суммарную силу F натяжения нитей в момент прохождения свободно отпущенным маятником нижней точки своей траектории. Всю массу маятника считайте сосредоточенной в ободе маховика. Заданные величины удовлетворяют условиям $r \ll R \ll h$.

Решение. На рис. 5 и 6 изображён маятник Максвелла перед и при прохождении нижней точки своей траектории. В силу $r \ll h$ можно пренебречь отклонением нити от вертикали, а также опусканием оси маятника при её повороте вокруг самой нижней точки нити A, то есть считать, что ось O маятника движется с некоторой постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом r вокруг точки A.

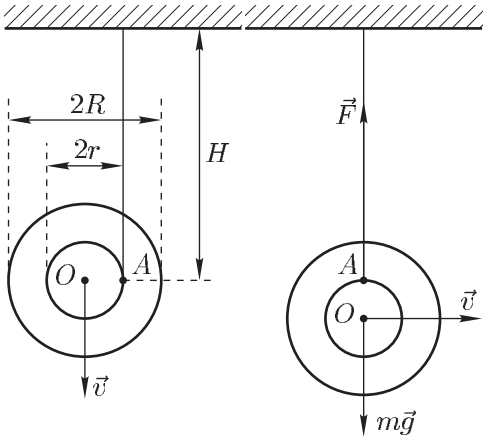


Рис. 5

Рис. 6

Запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось при прохождении маятником нижней точки:

$$m\frac{v^2}{r} = F - mg. \qquad (16)$$

Скорость v центра масс маятника найдём из закона сохранения энергии:

$$mgh = E_{\text{кин}} = E_c + E', \qquad (17)$$

где кинетическая энергия выражена с помощью теоремы Кёнига как сумма кинетической энергии центра масс $E_c = mv^2/2$ и кинетической энергии в системе центра масс $E' = m(\omega R)^2/2$ (в последнем выражении учтено, что все точки обода маятника вращаются относительно центра масс с некоторой угловой скоростью ω). Точка A движется относительно оси со скоростью $v = \omega r$, откуда $\omega = v/r$. Следовательно, уравнение (17) можно записать в виде

$$mgh = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right). \qquad (18)$$

Выразив mv^2 из (18) и подставив это выражение в (16), получаем

$$F = mg\left(1 + \frac{2h}{r(1 + R^2/r^2)}\right) \approx$$

$$\approx mg\left(1 + \frac{2hr}{R^2}\right).$$

Раскрутившись при опускании вниз, маховик по инерции будет продолжать вращение, закручивая нить на стержень и поднимаясь вследствие этого вверх. Такие периодические перемещения вращающегося маятника вверх и вниз могут продолжаться достаточно долго, оправдывая название устройства — маятник Максвелла.

Задача 6. За пределами третьей космической скорости. Космический корабль стартует с поверхности Земли со скоростью v_0, превышающей третью космическую. Стартовая скорость перпендикулярна прямой, соединяющей Землю с Солнцем, и направлена в сторону вращения Земли вокруг Солнца. Далее корабль летит с выключенными двигателями. Какую скорость v будет иметь корабль на большом расстоянии от Солнечной системы? Известны масса Земли M_e, масса Солнца M_s, радиус Земли R_e, радиус орбиты Земли R_s, гравитационная постоянная γ.

Решение. Поскольку начальная скорость задана в системе отсчёта Земли, то для дальнейших вычислений потребуется скорость v_e движения Земли по орбите. Центростремительное ускорение Земли создаётся гравитационной силой притяжения Солнца, поэтому из второго закона Ньютона

$$M_e \frac{v_e^2}{R_s} = \gamma \frac{M_s M_e}{R_s^2}$$

находим $v_e = \sqrt{\gamma M_s / R_s}$.

Сразу отметим, что применять закон сохранения энергии для спутника массой m «по-простому» в виде

$$\frac{m(v_e + v_0)^2}{2} - \gamma \frac{mM_e}{R_e} - \gamma \frac{mM_s}{R_s} = \frac{mv^2}{2}$$

неправильно, так как при такой записи не учитывается изменение энергии Земли вследствие взаимодействия с кораблём, а это изменение оказывается существенным. Изменением энергии большого тела (в данном случае Земли) можно пренебрегать только в системе отсчёта, в которой это тело покоилось. Данный факт известен в литературе как «Парадокс большого тела».



Разобъём процесс удаления корабля от Земли на два этапа:

1) процесс удаления корабля от Земли вдоль орбиты Земли (то есть без изменения расстояния до Солнца) на расстояние, большое по сравнению с радиусом Земли;

2) процесс удаления корабля из точки на орбите Земли, расположенной далеко от Земли (то есть уже без взаимодействия с Землёй), на расстояние, большое по сравнению с размерами Солнечной системы.

То, что мы рассмотрели умозрительную траекторию корабля, не совпадающую с фактической, не повлияет на результат, так как гравитационное поле потенциально, то есть работа силы тяжести зависит только от начального и конечного положений, а не от траектории тела.

1. Первый процесс будем рассматривать в системе отсчёта Земли, тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{M_e m}{R_e} = \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда скорость корабля на большом расстоянии от Земли

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\gamma\frac{M_e}{R_e}}.$$

В системе отсчёта Солнца скорость корабля в этот момент

$$v_2 = v_e + v_1 =$$

$$= \sqrt{\gamma\frac{M_s}{R_s}} + \sqrt{v_0^2 - 2\gamma\frac{M_e}{R_e}}.$$

2. Второй процесс будем рассматривать в системе отсчёта Солнца, тогда закон сохранения энергии будет иметь вид

$$\frac{mv_2^2}{2} - \gamma\frac{M_s m}{R_s} = \frac{mv^2}{2},$$

откуда искомая скорость корабля на большом расстоянии от Солнца

$$v = \sqrt{v_2^2 - 2\gamma\frac{M_s}{R_s}} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2\gamma\frac{M_e}{R_e} - \gamma\frac{M_s}{R_s} + 2\sqrt{\gamma\frac{M_s}{R_s}}\sqrt{v_0^2 - 2\gamma\frac{M_e}{R_e}}}.$$

Задача 7. Катушка. На цилиндрическую катушку радиусом R намотана однородная тонкая нить линейной плотностью ρ и длиной $L \gg R$. Катушка имеет момент инерции I относительно своей оси симметрии, расположенной горизонтально, и может вращаться вокруг этой оси без трения. В начальный момент катушка покоилась, а длина свисающей части нити была пренебрежимо мала. Найдите зависимость ускорения a и скорости v свисающей части нити от её длины x. Ускорение свободного падения g известно.

Решение. Пусть T — сила натяжения нити в крайней правой точке катушки (рис. 7), $m = \rho x$ — масса свисающей части нити, $I_0 = \rho(L - x)R^2$ — момент инерции нити, намотанной на катушку, ε — угловое ускорение катушки, тогда уравнения движения системы имеют вид:

$$ma = mg - T, \qquad (19)$$

$$(I + I_0)\varepsilon = TR, \qquad (20)$$

$$a = \varepsilon R. \qquad (21)$$

Уравнение (19) — это второй закон Ньютона для свисающей части нити, (20) — уравнение вращательного движения катушки с намотанной на неё нитью, (21) — кинематическая связь. Решая записанную систему, находим

$$a = \frac{\rho g R^2 x}{I + \rho L R^2}.$$

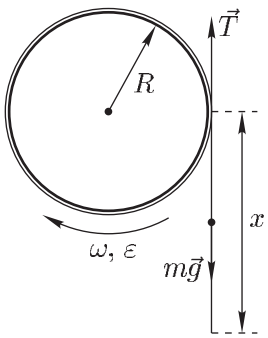


Рис. 7

Угловая скорость вращения катушки $\omega = v/R$. Приравнивая изменение потенциальной энергии свисающей части нити и кинетическую энергию системы

$$mg \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(I + I_0)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

находим

$$v = Rx\sqrt{\frac{\rho g}{I + \rho L R^2}}.$$

Таким образом, и ускорение a, и скорость v пропорциональны x.