

Физика



Иванов Анатолий Ефимович

Профессор Российской Академии Естествознания,
кандидат технических наук, доцент по кафедре физики,
доцент кафедры «Основы физики» МГТУ имени Н.Э. Баумана.



Пименова Людмила Владимировна

Преподаватель математики лицея
информационных технологий 1533.

Нахождение экстремума в задачах по физике

Конкурсные и олимпиадные задачи и задачи ЕГЭ раздела С, являющиеся задачами повышенной сложности, зачастую включают в себя задачи на нахождение экстремума (от лат. *extremum* – крайнее) – минимального или максимального значения какого-либо физического параметра, являющегося некоторой функцией $y = f(x)$.

Решение данных задач сводится к исследованию функции на экстремум с помощью производной.

Максимум и минимум функции

Если функция $y = f(x)$ изображена графиком – кривой в декартовых координатах, то производная этой функции

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол между осью Ox и касательной в данной точке, отсчитываемый от положительного направления этой функции.

Если производная функции в точке x_0 обращается в нуль, то на графике функции $y = f(x)$ угол между касательной и осью равен нулю.

В этой точке непрерывная функция достигает экстремума: минимума, если производная переходит от отрицательных значений к положительным, и максимума, если наоборот. Вторая производная в точке минимума – положительная величина, в точке максимума – отрицательная.

Итак, необходимые и достаточные условия

минимума: $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} > 0;$

максимума: $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$



Задачи

1. Конькобежец проходит путь $S = 450$ м с постоянной скоростью v , а затем тормозит до остановки с постоянным ускорением $a = 0,5 \text{ с/м}^2$. При некотором значении v общее время движения конькобежца будет минимальным. Чему равно это минимальное время $t_{\min}$?

Решение. Уравнение кинематики для пути конькобежца на первом этапе

$$S = vt_1, \quad (1)$$

где t_1 – время движения конькобежца на первом этапе.

Уравнение кинематики для скорости конькобежца на втором этапе с учётом начальных и граничных условий

$$0 = v - at_2, \quad (2)$$

где t_2 – время движения конькобежца на втором этапе.

Из уравнений (1) и (2) находим время движения конькобежца на двух этапах:

$$t = \frac{S}{v} + \frac{v}{a}. \quad (3)$$

Из уравнения (3) имеем:

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{S}{v^2} + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{aS}.$$

$$\frac{d^2t}{dv^2} = +2\frac{S}{v^3} > 0.$$

$$t_{\min} = \frac{S}{\sqrt{aS}} + \frac{\sqrt{aS}}{a} = 2\sqrt{\frac{S}{a}}.$$

Ответ. $t_{\min} = 2\sqrt{\frac{S}{a}} = 60 \text{ с}.$

2. Из пункта A , находящегося на шоссе (рис. 1), необходимо приехать на автомобиле в пункт D , расположенный в поле на расстоянии L от шоссе. Скорость автомобиля по полю в n раз меньше, чем по шоссе.

На каком расстоянии от точки C следует свернуть с шоссе, чтобы попасть в точку D за кратчайшее время?

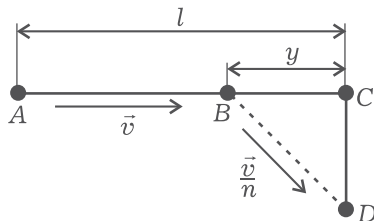


Рис. 1

Решение. Пусть $AC = l$, $BC = y$, тогда $AB = l - y$, $BD = \sqrt{L^2 + y^2}$. Время движения на пути ABD равно $t = t_1 + t_2$, где

$$t_1 = \frac{AB}{v}, \quad t_2 = \frac{BD}{(v/n)} = n \frac{BD}{v}.$$

Окончательно получаем зависимость $t = t(y)$:

$$t = \frac{l - y}{v} + \frac{n\sqrt{L^2 + y^2}}{v}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) имеем:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v} \left(-1 + \frac{n \cdot 2y}{2\sqrt{L^2 + y^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{dy^2} &= \frac{1}{v} \left(\frac{n\sqrt{L^2 + y^2} - \frac{ny \cdot 2y}{\sqrt{L^2 + y^2}}}{y^2 + L^2} \right) = \\ &= \frac{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 1}}{vLn^2} > 0, \text{ т.к. } n > 1. \end{aligned}$$

Ответ. Время t минимально при

$$y = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

3. Лодка движется относительно воды со скоростью, в $n=2$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом φ к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы когда она переплывёт на противоположный берег, её снесло течением как можно меньше (рис.4)?

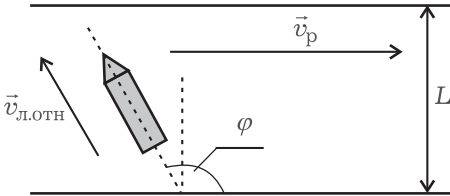


Рис. 2

Решение. В соответствии с законом сложения скоростей

$$\vec{v}_{\text{лабс}} = \vec{v}_{\text{л.отн}} + \vec{v}_p. \quad (1)$$

Это векторное уравнение построено на рис. 3.

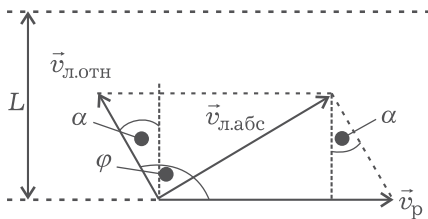


Рис. 3

Расстояние, на которое снесёт лодку, равно (рис. 3):

$$S = (v_p - v_{\text{л.отн}} \cdot \sin \alpha) \cdot t, \quad (2)$$

где t – время, необходимое для достижения противоположного берега, определяется из выражения

$$L = v_{\text{л.отн}} \cdot \cos \alpha \cdot t. \quad (3)$$

Условия минимума S :

$$\frac{dS}{d\varphi} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 S}{d\varphi^2} > 0. \quad (5)$$

Из рис. 3 следует:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha. \quad (6)$$

Из условия задачи следует:

$$v_{\text{л.отн}} = \frac{v_p}{n}. \quad (7)$$

Решаем систему уравнений (1) – (7) относительно φ .

Из (3) с учётом (7) следует:
 $t = \frac{Ln}{v_p \cdot \cos \alpha}$. Подставляя это значение t в (5), получаем:

$$S = L \left(\frac{n}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right).$$

$$\text{Далее } \frac{dS}{d\varphi} = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{L(n \sin \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

$$\text{Отсюда: } \sin \alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S}{d\alpha^2} &= \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{L(n \sin \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{L \left(n \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha (n \sin \alpha - 1) \right)}{\cos^4 \alpha} = \\ &= \frac{L \left(2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \right) \right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4} = 1,15L > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, S минимально при

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Учитывая (6), получаем $\varphi = 120^\circ$.

Ответ. $\varphi = 120^\circ$.

4. Автомобиль движется без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью $\vec{v}_0$. На какую максимальную высоту $h_{\text{макс}}$ над поверхностью дороги забрасываются капли грязи от колёс, радиус которых равен R (рис. 4)?

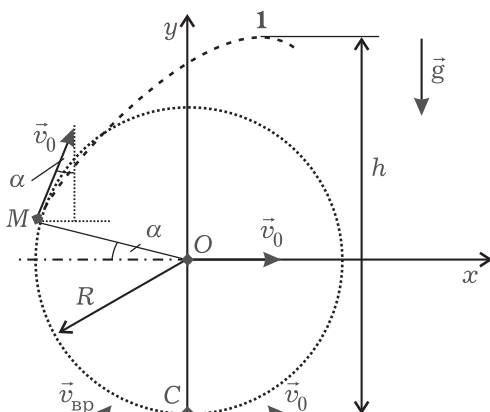


Рис. 4

Решение. Прежде всего следует доказать, что вращательная скорость точек обода вокруг центра колеса O (следовательно, и капли грязи, прилипшей к ободу) равна скорости автомобиля v_0 . По закону сложения скоростей для любой точки обода: $\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{вр} + \vec{v}_{пер}$. Здесь $\vec{v}_{abc}$ – скорость точки обода колеса относительно Земли, $\vec{v}_{вр}$ – скорость этой точки относительно движущейся системы отсчёта, связанной с центром колеса, $\vec{v}_{пер} = \vec{v}_0$ – скорость переносная – скорость автомобиля. По условию задачи (нет проскальзывания колёс) скорость нижней точки C $v_{abc} = 0$, следовательно, модули этих скоростей равны: $v_{вр} = v_0$. Систему отсчёта свяжем с автомобилем (точнее, с центром колеса). Она – инерциальная, т.к. скорость автомобиля постоянна по условию.

Проекции ускорения на оси координат для капли грязи (точка M)

$$a_x = 0, \quad (1)$$

$$a_y = -g. \quad (2)$$

Начальные условия для неё:

$$\left. \begin{aligned} t &= 0, \\ v_{0x} &= v_0 \sin \alpha \\ x_0 &= -R \cos \alpha, \\ v_{0y} &= v_0 \cos \alpha, \\ y_0 &= R \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения кинематики в проекциях на оси координат с учётом (1) – (3):

$$v_x = v_0 \sin \alpha = \text{const}, \quad (4)$$

$$x = -R \cos \alpha + v_0 t \sin \alpha, \quad (5)$$

$$v_y = v_0 \cos \alpha - gt, \quad (6)$$

$$y = R \sin \alpha + v_0 t \cos \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

Граничные условия (точка **1** траектории капли – высшая точка траектории):

$$\left. \begin{aligned} t &= t_h, \\ v_y &= 0, \\ y &= h - R. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{Из (6), (7) и (8) следует } t_h = \frac{v_0 \cos \alpha}{g}$$

и далее

$$h - R = R \sin \alpha + v_0 \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \cos \alpha - \frac{g v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g^2},$$

$$\text{откуда } h = R(1 + \sin \alpha) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}. \quad (9)$$

Высота подъёма капли грязи зависит от угла α (место отрыва капли). Условия максимума: первая производная $\frac{dh}{d\alpha} = 0$, вторая производная

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} < 0.$$

Первая производная h по α :

$$\frac{dh}{d\alpha} = R \cos \alpha - \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2g} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos \alpha = 0$ – это противоречит условию задачи, следовательно, решением будет

$$\sin \alpha = \frac{Rg}{v_0^2}. \quad (10)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} = -R \sin \alpha - \frac{v_0^2}{g} (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Подставляя сюда (10) и учитывая

$$\frac{d^2h}{d\alpha^2} < 0, \text{ получаем } v_0 > \sqrt{Rg}. \quad (11)$$

Если скорость автомобиля достаточно велика, т.е. выполняется условие (11), то при $\sin \alpha = \frac{Rg}{v_0^2}$ высота h

максимальна, и подставляя $\sin \alpha = \frac{Rg}{v_0^2}$ в (9), получаем:

$$\begin{aligned} h_{\text{макс}} &= R \left(1 + \frac{Rg}{v_0^2} \right) + \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{R^2 g^2}{v_0^4} \right) = \\ &= R + \frac{R^2 g}{v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{R^2 g}{2v_0^2} = R + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{R^2 g}{2v_0^2}. \end{aligned}$$

Ответ. $h_{\text{макс}} = R + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{R^2 g}{2v_0^2}$ м.

Примечание. Выражение (9) для высоты полёта каплей можно также получить, если применить закон сохранения механической энергии с учётом того, что в высшей точке траектории вертикальная составляющая скорости обращается в ноль

$$\begin{aligned} \frac{mv_0^2}{2} + mgR(1 + \sin \alpha) &= \frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + mgh \\ \Rightarrow h &= R(1 + \sin \alpha) + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}. \end{aligned}$$

5. Под каким углом φ к горизонту следует бросить камень с вершины горы с уклоном $\alpha = 45^\circ$, чтобы он упал на склон на максимальном расстоянии (рис. 5)?

Решение. Уравнения кинематики в проекциях на оси координат с учётом начальных условий:

$$x = v_0 \cos \beta \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}, \quad (1)$$

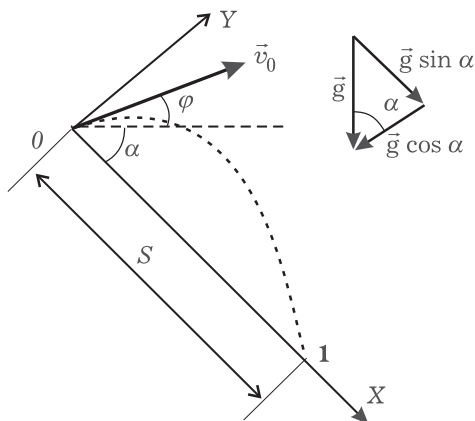


Рис. 5

$$y = v_0 \sin \beta \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}. \quad (2)$$

В этих уравнениях $\beta = \alpha + \varphi$.

Граничные условия 1:

$$t = t_1, \quad x = S, \quad y = 0.$$

Подставляя $y = 0$ в (2), находим время падения t_1 :

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), находим S :

$$S = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \left(\sin \beta \cdot \cos \beta + \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\cos \alpha} \right). \quad (4)$$

Для нахождения максимального значения S подставим в (4) значение $\alpha = 45^\circ$:

$$S = \frac{2\sqrt{2} \cdot v_0^2}{g} \left(\sin \beta \cdot \cos \beta + \sin^2 \beta \right).$$

Условия максимума S :

$$\frac{dS}{d\beta} = 0, \quad \frac{d^2 S}{d\beta^2} < 0.$$

Вычисления дают:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= \frac{2\sqrt{2} \cdot v_0^2}{g} (\cos 2\beta + \sin 2\beta) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} 2\beta = -1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{d^2 S}{d\beta^2} &= \frac{2\sqrt{2} \cdot v_0^2}{g} (-2\sin 2\beta + 2\cos 2\beta) = \\ &= \frac{2\sqrt{2} \cdot v_0^2}{g} (-2\sin 2\beta - 2\sin 2\beta) < 0.\end{aligned}$$

Следовательно, при

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg(-1) = 67,5^\circ \quad S \text{ максимальна.}$$

С учётом $\beta = \alpha + \varphi$

$$\varphi = 22,5^\circ.$$

Ответ. $\varphi = 22,5^\circ$.

6. Лыжник съезжает с горы высотой H , оканчивающейся горизонтальным трамплином. При какой высоте трамплина h лыжник пролетит наибольшее расстояние S по горизонтали и каково это расстояние? Трением лыж о поверхность горы и сопротивлением воздуха пренебречь (см. рис. 6).

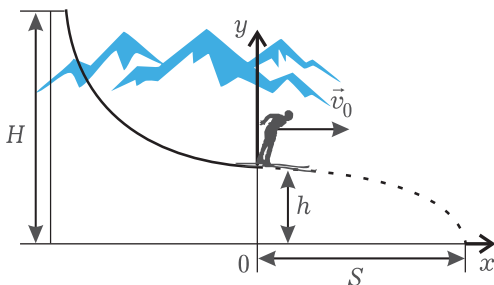


Рис. 6

Решение. По закону сохранения механической энергии

$$mgH = mgh + \frac{mv_0^2}{2}, \quad (1)$$

где v_0 – скорость лыжника на трамплине.

$$S = v_0 t, \quad (2)$$

$$h = \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (1) – (3) относительно S :

$$S = 2\sqrt{hH - h^2}. \quad (4)$$

Условия максимума функции $S = S(h)$: первая производная $\frac{dS}{dh}$ должна равняться нулю, вторая производная $\frac{d^2 S}{dh^2}$ должна быть отрицательна:

$$\frac{dS}{dh} = \frac{H - 2h}{\sqrt{hH - h^2}} = 0.$$

Отсюда

$$h = \frac{H}{2}. \quad (5)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2 S}{dh^2} = \frac{-2\sqrt{hH - h^2} - \frac{(H - 2h)^2}{2\sqrt{hH - h^2}}}{hH - h^2} = \frac{4}{H} < 0.$$

Подставляя значение (5) в (4), получаем

$$S = 2\sqrt{\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{4}} = H.$$

$$\text{Ответ. } h = \frac{H}{2}. \quad S = H.$$

9. Пружина жёсткостью k и длиной L стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на неё падает небольшой шарик массой m . Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своём движении вниз? Массой пружины и трением пренебречь.

Решение. Ось Oy связываем с верхним концом недеформированной пружины. Пусть при движении вниз в некоторый момент времени шарик сжал пружину на величину y .

Запишем закон сохранения энергии для положений 1 и 2 (см. рис. 7):

$$mg(H - L + y) = \frac{ky^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

$$\text{Отсюда } \frac{mv^2}{2} = mg(H - L + y) - \frac{ky^2}{2}. \quad (1)$$

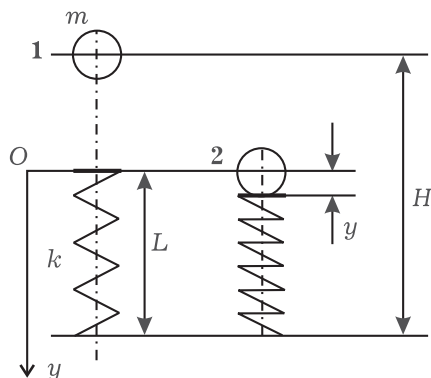


Рис. 7

Если скорость будет максимальной, то и кинетическая энергия

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \text{ также максимальна.}$$

Вычисления:

$$\frac{dE_k}{dy} = mg - ky = 0.$$

$$\text{Отсюда } y = y_0 = \frac{mg}{k}, \quad \frac{d^2 E_k}{dy^2} = -k < 0.$$

Следовательно, при $y = y_0 = \frac{mg}{k}$ скорость шарика максимальна.

Подставляя это значение y в (1), получаем

$$v_{max} = \sqrt{2g(H-L) + \frac{mg^2}{k}}.$$

$$\text{Ответ. } v_{max} = \sqrt{2g(H-L) + \frac{mg^2}{k}}.$$

10. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат (рис. 8). Как зависит от силы тока в цепи мощность $P_{ист}$, выделяемая источником, мощность $P_{вн}$, выделяемая во внешней цепи, и коэффициент полезного действия η источника тока? Постройте графики зависимостей $P_{ист}(I)$, $P_{вн}(I)$, $\eta(I)$. При какой силе тока $I = I_0$ мощность, выделяемая во внешней цепи, будет

наибольшей? Чему равна эта наибольшая мощность?

Решение. Ток в цепи определяется законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (1)$$

Полная мощность, развиваемая источником ЭДС, равна:

$$P_{ист} = I\mathcal{E}. \quad (2)$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи:

$$P_{вн} = I^2 R. \quad (3)$$

КПД источника ЭДС равен:

$$\eta = \frac{P_{вн}}{P_{ист}}. \quad (4)$$

Из (1) следует

$$IR = \mathcal{E} - Ir \Rightarrow P_{вн} = I^2 R = \mathcal{E}I - I^2 r.$$

С учётом этого выражение для КПД примет вид:

$$\eta = \frac{P_{вн}}{P_{ист}} = \frac{\mathcal{E}I - I^2 r}{\mathcal{E}I} = 1 - \frac{r}{\mathcal{E}} I.$$

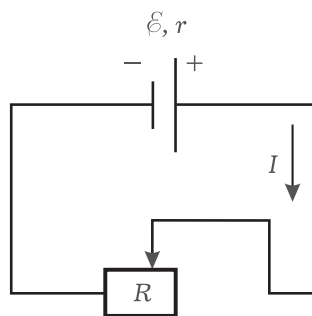


Рис. 8

Максимальная мощность, выделяемая во внешней цепи, находится путём исследования функции $P_{вн} = P_{вн}(I)$ на максимум (первая производная равна нулю, вторая отрицательна):

$$\frac{dP_{вн}}{dI} = \frac{d}{dI}(\mathcal{E}I - I^2 r) = \mathcal{E} - 2Ir = 0 \Rightarrow I = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2r}.$$

$$\frac{d^2 P_{вн}}{dI^2} = \frac{d}{dI}(\mathcal{E} - 2Ir) = -2r < 0.$$



Следовательно, при $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{2r}$ мощность $P_{\text{вн}}$ максимальна и равна:

$$P_{\text{вн max}} = \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{2r} - \frac{\mathcal{E}^2}{4r^2} r = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Графики $P_{\text{ист}}(I)$, $P_{\text{вн}}(I)$, $\eta(I)$ представлены на рис. 9.

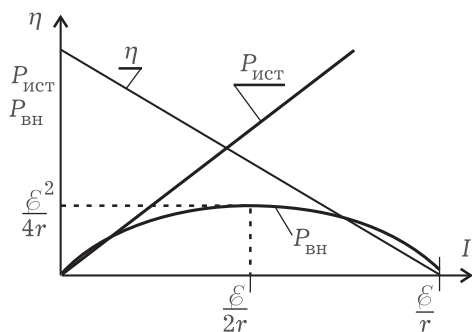


Рис. 9

11. Электродвигатель с независимым возбуждением подключён к источнику постоянного напряжения U . Сопротивление обмотки якоря и подводящих проводов равно R . Изобразите графики зависимостей ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, возникающей в обмотке якоря, силы тока I в цепи и механической мощности $P_{\text{м}}$ от угловой скорости ω вращения якоря. Определите максимальную механическую мощность P_{max} . Какому значению силы тока I_0 в цепи соответствует эта мощность?

Решение. При независимом возбуждении ЭДС индукции прямо пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω :

$$\mathcal{E}_i = k\omega, \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от индукции магнитного поля статора и от конструкции электромотора, т.е. от размеров и формы обмотки якоря. График зависимости $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i(\omega)$ представлен на рис. 10.

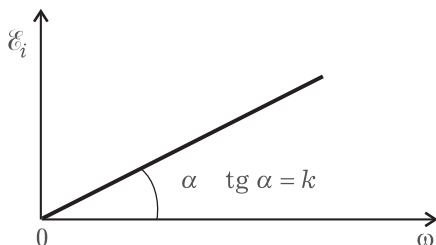


Рис. 10

Закон Ома для электродвигателя:

$$I = \frac{U - \mathcal{E}_i}{R} = \frac{U}{R} - \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{U}{R} - \frac{k\omega}{R}. \quad (2)$$

При $\omega = 0$ $I = \frac{U}{R}$.

$$I = 0 \Rightarrow \frac{U}{R} - \frac{k\omega_0}{R} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{U}{k}$$

(отсутствие внешней нагрузки (режим холостого хода)).

Закон сохранения энергии для электродвигателя:

$$IU = I^2 R + P_{\text{м}}, \quad P_{\text{м}} = IU - I^2 R. \quad (3)$$

Подставив $U - IR = \mathcal{E}_i = k\omega$ из (2) в (3), получим

$$P_{\text{м}} = I k \omega.$$

Подставив $I = \frac{U}{R} - \frac{k\omega}{R}$ из (2) в (4),

$$\text{получим } P_{\text{м}} = \frac{U}{R} k \omega - \frac{k^2}{R} \omega^2.$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз. Механическая мощность обращается в ноль при $\omega = 0$, когда якорь не вращается, и при $\omega_0 = \frac{U}{k}$ (холостой ход).

Определим P_{max} .

$$\frac{dP_{\text{м}}}{d\omega} = 0; \quad 0 = \frac{U}{R} k - \frac{k^2}{R} 2\omega^* \Rightarrow \omega^* = \frac{U}{2k}.$$

Вторая производная:

$$\frac{d^2 P_{\text{м}}}{d\omega^2} = -2 \frac{k^2}{R} < 0 - \text{действительно, при}$$

$\omega^* = \frac{U}{2k}$ мощность электродвигателя

P_M максимальна и равна

$$P_{\max} = \frac{U}{R} \cdot k \cdot \frac{U}{2k} - \frac{k^2}{R} \cdot \frac{U^2}{4k^2} = \frac{U^2}{4R}.$$

Какому значению силы тока I_0 в цепи соответствует эта мощность? Подставляя в (4) $\omega = \omega^*$, получаем:

$$P_{\max} = I_0 k \omega^* = I_0 k \frac{U}{2k} = I_0 \cdot \frac{U}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{2P_{\max}}{U} = \frac{2 \cdot \frac{U^2}{4R}}{U \cdot 4R} = \frac{U}{2R}.$$

Ответ. $\mathcal{E}_i = k\omega$, $I = \frac{U}{R} - \frac{k\omega}{R}$,

$$P_M = \frac{U}{R} k\omega - \frac{k^2}{R} \omega^2, P_{\max} = \frac{U^2}{4R}, I_0 = \frac{U}{2R}.$$

12. На каком расстоянии d от собирающей линзы с фокусным расстоянием F надо поместить предмет, чтобы расстояние от предмета до его действительного изображения было наименьшим?

Решение. Формула собирающей линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Расстояние от предмета до его действительного изображения:

$$x = a + a'. \quad (2)$$

Здесь a – расстояние от линзы до предмета, a' – расстояние от линзы до изображения, x – расстояние от предмета до его действительного изображения. Из (1) и (2) находим выражение для x :

$$x = \frac{a^2}{a - F}.$$

Вычисление производных.

$$\frac{d}{da} \left(\frac{a^2}{a - F} \right) = \frac{2a(a - F) - a^2}{(a - F)^2} = \frac{2a^2 - 2aF - a^2}{(a - F)^2} =$$

$$= \frac{a^2 - 2aF}{(a - F)^2} \cdot a^2 - 2aF = 0, \quad a_1 = 0 - \text{это не}$$

решение; $a_2 = a = 2F$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{da^2} &= \frac{d^2}{da^2} \left(\frac{a^2 - 2aF}{(a - F)^2} \right) = \\ &= \frac{(2a - 2F)(a - F)^2 - (a^2 - 2aF) \cdot 2(a - F)}{(a - F)^4} = \\ &= \frac{a - F}{(a - F)^4} \left[2(a - F)^2 - 2(a^2 - 2aF) \right] = \\ &= \frac{1}{(a - F)^3} (2a^2 + 2F^2 - 4aF) - 2a^2 + 4aF = \\ &= \frac{2F^2}{(a - F)^3} = \frac{2F^2}{(2F - F)^3} = \frac{2}{F} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $a_{\min} = 2F$.

Ответ. $a_{\min} = 2F$.

13. На какой высоте следует поместить лампу над центром круглого стола, радиус которого R , чтобы на краях стола получить наибольшую освещённость?

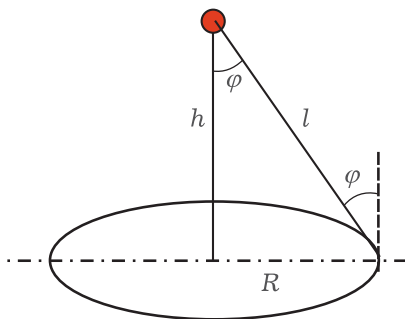


Рис. 11

Решение. Освещённость на краю стола равна (см. рис. 11)

$$E = \frac{I \cos \varphi}{l^2}, \quad (1)$$

где $l = \frac{R}{\sin \varphi}.$ (2)



Подставляя (2) в (1), получаем:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi.$$

Вычисляем производные.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\varphi} &= \frac{I}{R^2} (-\sin \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \cos \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi) = \\ &= 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{d\varphi^2} &= \frac{I}{R^2} (-3 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi) + \\ &+ \frac{I}{R^2} [-\sin^3 \varphi \cdot (2 \sin \varphi \cdot 2 \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi) + 2 \cos^3 \varphi)] = \\ &= \frac{2I}{R^2} [-3 \sin^3 \varphi \cdot \cos^3 \varphi + 2 \sin^5 \varphi \cdot \cos \varphi] - \\ &- \frac{2I}{R^2} \sin^3 \varphi \cdot \cos^3 \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как нам известен $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$, $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ вычислим по формулам тригонометрии:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя найденные значения $\sin \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ в (3), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{d\varphi^2} &= \frac{I}{R^2} \left(-3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \\ &+ \frac{I}{R^2} \left(2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= -0,63 \frac{I}{R^2} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, максимальное значение E достигается при угле $\varphi = \arctg \sqrt{2}$. Лампа должна висеть на высоте

$$h = \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0,71R.$$

Ответ. $h = 0,71R$.

Литература

1. Иванов А.Е. Задачник по физике. Учебное пособие для поступающих в вузы. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 470 с.
2. Иванов А.Е. Электродинамика. Пособие для преподавателей подготовительных курсов технических университетов. М. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2008, 635 с.
3. Иванов А.Е. Оптика. Учебное пособие для поступающих в вузы. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 448 с.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Можно не беспокоиться?

Пассажиры, взлетевшие на первом в мире полностью автоматизированном самолёте, чувствовали себя не совсем спокойно. Но зазвучавший из репродуктора голос успокоительно произнёс: «Вы находитесь на самолёте, ведомом не пилотами, которым, как всем людям, свойственно ошибаться, а совершенными автоматами. Они позаботятся о вашей безопасности. Вам не о чем беспокоиться, беспокоиться, беспокоиться, беспокоиться...