

Балебанова Татьяна Вячеславовна
Учитель физики Государственного образовательного учреждения Центр образования №1874 г. Москвы, высшая квалификационная категория. Преподаватель факультета довузовской подготовки Московского авиационного института, эксперт ЕГЭ, член конфликтной комиссии по физике ЕГЭ г. Москвы. Отличник народного просвещения.

Методы решения задач статики

Данная статья предназначена для абитуриентов, готовящихся к единому государственному экзамену (ЕГЭ). Ниже рассмотрены задачи различного уровня сложности. Наиболее простые из них встречаются в тестовой части ЕГЭ. Для их решения нужно чётко знать и уметь применять условия равновесия твёрдого тела. Более сложные задачи, как правило, комплексные, требуют от абитуриента глубокого понимания физических процессов, а также более сложных математических преобразований.

Теоретическое введение

Статика изучает равновесие твёрдых тел под действием приложенных сил.

Тело находится в *равновесии* в некоторой системе отсчёта, если в этой системе отсчёта оно покоится, т. е. все макроскопические части тела неподвижны.

Центр масс – геометрическая точка, положение которой характеризует распределение масс в системе. Для твёрдого тела в однородном поле тяготения ($\vec{g}=const$) центр масс совпадает с центром тяжести. Центр тяжести – геометрическая точка, через которую проходит равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы тела при любом его положении в пространстве. Координаты центра масс определяются формулами:

$$x_{\text{цм}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i},\quad y_{\text{цм}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i},$$

$$z_{\text{цм}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}z_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i}.$$

Заметим, что для однородных тел центр масс расположен в геометрическом центре тела. При этом эта точка может быть расположена вне тела, как у полого цилиндра (центр симметрии находится на оси цилиндра вне тела).

Равновесие твёрдого тела зависит не только от модуля и направления действующих сил, но и от точки их приложения.

Величина *момента силы* M относительно оси вращения равна произведению модуля силы F на *плечо* l – *расстояние* от оси вращения на линию действия силы:

$$M = F \cdot l.$$

Условимся считать момент силы, стремящейся повернуть тело относительно оси вращения против часовой стрелки, положительным, а по часовой стрелке – отрицательным. При этом силу можно переносить внутри тела вдоль линии её действия.

Рассмотрим плоскую закреплённую пластину произвольной формы. Точка O – ось вращения (см. рис. 1). Если к точке A приложить силу $\vec{F}_1$, направленную как показано на рисунке, то сила $\vec{F}_1$ создает вращающий момент M_1, поворачивающий тело по часовой стрелке вокруг точки O. Тогда

$$M_1 = -F_1 \cdot l_1,$$

где l_1 – плечо силы $\vec{F}_1$.

Сила $\vec{F}_2$, приложенная к точке B, поворачивает тело против часовой стрелки и создаёт вращающий момент

$$M_2 = F_2 \cdot l_2,$$

где l_2 – плечо силы $\vec{F}_2$.

Сила $\vec{F}_3$, приложенная к точке C, не создаёт вращающего момента, так как линия её действия проходит через ось вращения (плечо силы $l_3 = 0$).

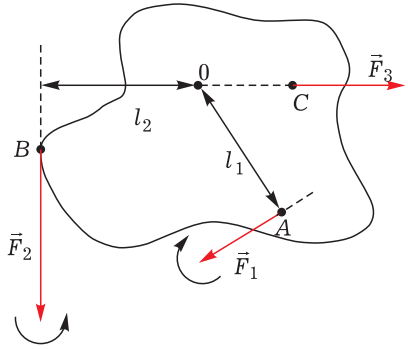


Рис. 1

Для равновесия тела необходимо выполнение двух условий.

1. Векторная сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю (второй закон Ньютона): $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0.$

2. Алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно любой оси вращения равна нулю (правило моментов):

$$\sum_{i=1}^{N} M_i = 0.$$

Общие рекомендации по решению задач

При решении задач старайтесь придерживаться следующего алгоритма. После прочтения задачи перескажите её своими словами, акцентируя внимание на физических закономерностях. Сделайте рисунок, на котором укажите все силы, приложенные к телу, обратив внимание на точки их приложения. Запишите первое условие равновесия (второй закон Ньютона) в проекции на выбранные оси координат. Если этого недостаточно для решения, запишите правило моментов относительно оси, проходящей через выбранную точку. Удобно за ось вращения выбирать такую точку, чтобы через неё проходило как можно больше линий действия сил, тогда моменты этих сил будут равны нулю (плечи этих сил равны нулю). Старайтесь решать задачи в общем виде, поскольку выполняемая в этом случае проверка размерности является единственным возможным способом проверки решения.

Желаем удачи!

Примеры решения задач

Задача 1. С использованием нити ученик уравновесил лёгкий рычаг. Массы подвешенных к рычагу грузов соответственно равны 1 кг и 2 кг. Найти силу натяжения нити.

Решение. Обозначим единичный отрезок рычага l_0. Тогда больший груз массой 2 кг прикреплён на расстоянии $3l_0$, а меньший груз массой 1 кг – на расстоянии $5l_0$ от опоры. Рычаг находится в равновесии под действием силы натяжения нити T, нормальной реакции опоры N и весов грузов $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$ и $\vec{P}_2 = m_1\vec{g}_2$ (силу тяжести рычага не учитываем, поскольку рычаг «лёгкий»). Рассмотрим условия равновесия рычага (рис. 2).

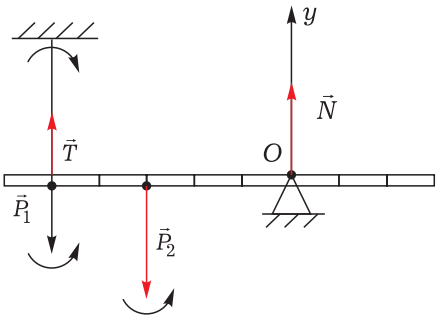


Рис. 2

Запишем 2-й закон Ньютона:

$$\vec{T}+\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{N}=0.$$

На Oy: $T+N-P_1-P_2=0$, тогда

$$T=m_1g+m_2g-N.$$

Очевидно, что первое условие равновесия не позволяет найти силу натяжения нити. Запишем тогда второе условие равновесия – правило моментов относительно точки O:

$$M_1+M_2+M_3=0, \qquad (1)$$

где

$$M_1=p_1l_1=m_1gl_1, \qquad (2)$$

$$M_2=p_2l_2=m_2gl_2, \qquad (3)$$

$$M_3=-Tl_3, \qquad (4)$$

Моменты M_1 и M_2 положительны, т. к. веса грузов вращают рычаг против часовой стрелки, а M_3 отрицателен, т. к. сила натяжения нити вращает рычаг по часовой стрелке.

Подставим (2), (3) и (4) в (1):

$$m_1gl_1+m_2gl_2=Tl_3. \qquad (5)$$

Из рисунка видно, что плечи сил $l_1=5l_0$, $l_2=3l_0$, $l_3=5l_0$, тогда выражение (5) принимает вид:

$$m_1g\cdot5l_0+m_2g\cdot3l_0=T\cdot5l_0,$$

$$g\cdot(m_1\cdot5+m_2\cdot3)=T\cdot5,$$

$$T=\frac{g\cdot(5m_1+3m_2)}{5}.$$

$$T=\frac{10\cdot(5\cdot1+3\cdot2)}{5}=2\cdot11=22\ (\text{Н}).$$

Задача 2. К концам однородного стержня длиной $l=50$ см и весом P = 10 Н подвешены две гири весом P_1 =10 Н и P_2 = 20 Н. В какой точке следует поставить опору, чтобы стержень находился горизонтально?

Решение. В задаче рассматривается однородный стержень, значит, его центр масс находится в геометрическом центре – посередине. Здесь же приложена сила тяжести стержня, в состоянии покоя равная его весу P. Для того чтобы стержень находился горизонтально, надо поставить опору, тогда она будет действовать на стержень с силой нормальной реакции. Таким образом, к стержню приложены четыре силы: сила тяжести, две силы веса грузов и сила нормальной реакции опоры. Под действием этих сил тело покоится и не вращается, следовательно, выполняются два условия равновесия: векторная сумма сил, приложенных к телу, равна нулю: $\sum\vec{F}=0$ и алгебраическая сумма моментов всех сил, приложенных к телу, от-

носительно любой возможной оси вращения равна нулю: $\sum M = 0$.

Поместим опору в точке O (рис. 3) и обозначим OC за искомое x. Запишем 2-й закон Ньютона:

$$\vec{P}_1 + \vec{P} + \vec{P}_2 + \vec{N} = 0.$$

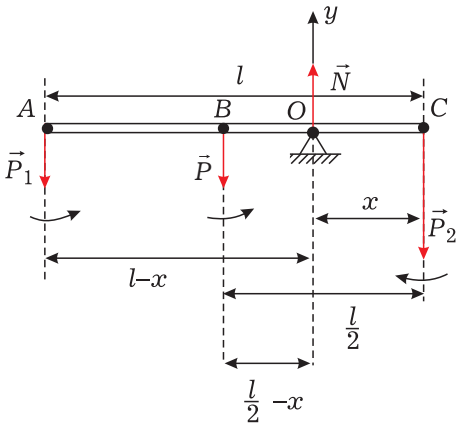


Рис. 3

На Oy: $N = P_1 + P + P_2$.

Часто при решении задач на статику достаточно первого условия равновесия. В данной задаче этого мало. Поэтому запишем второе условие равновесия, причём за ось вращения примем точку O, поскольку в этом случае вращающий момент силы $\vec{N}$ будет равен нулю:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0, \quad (1)$$

где

$$M_1 = P_1 l_1, \quad (2)$$

$$M_2 = -P_2 l_2, \quad (3)$$

$$M_3 = P l_3. \quad (4)$$

Отметим, что силы $\vec{P}_1$ и $\vec{P}$ вращают стержень против часовой стрелки, их моменты положительны. Сила $\vec{P}_2$ вращает стержень по часовой стрелке, её момент отрицательный.

Выясним теперь, чему равны плечи сил l_1, l_2 и l_3. Напомним, что плечо силы – расстояние от линии действия силы до оси вращения (точки O). Тогда

$$l_1 = AO = l - x, \quad (5)$$

$$l_2 = OC = x, \quad (6)$$

$$l_3 = BO = \frac{l}{2} - x = \frac{l - 2x}{2}. \quad (7)$$

Подставляя (5), (6) и (7) в соответствующие формулы (2), (3) и (4), а полученные выражения в (1), найдём искомую величину x, решив линейное уравнение:

$$P_1(l - x) - P_2 x + mg\left(\frac{l - 2x}{2}\right) = 0,$$

$$2P_1(l - x) - 2P_2 x + P(l - 2x) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{l(P + 2P_1)}{2(P_1 + P_2 + P)},$$

$$x = \frac{0{,}5 \cdot (10 + 2 \cdot 10_1)}{2 \cdot (10 + 20 + 10)} = \frac{0{,}5 \cdot 30}{2 \cdot 40} =$$

$$= 0{,}1875 \text{ м} = 18{,}75 \text{ см}.$$

Итак, на расстоянии $x = 18{,}75$ см от большего груза надо расположить опору, чтобы стержень находился горизонтально.

Задача 3. Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол (рис. 4). Коэффициент трения между стеной и лестницей равен $\mu_1 = 0{,}5$, между полом и лестницей $\mu_2 = 0{,}4$. Определить наименьший угол наклона лестницы к полу, при котором она может оставаться в равновесии.

Решение. Будем считать лестницу однородной. Тогда сила тяжести $m\vec{g}$ приложена к её геометрическому центру. Лестница взаимодействует со стеной и полом силами нормальной реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ в точках соприкосновения, и также в этих точках приложены силы трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ и $\vec{F}_{\text{тр2}}$ со стеной и полом соответственно. Будем рассматривать положение тела, при котором угол наклона к полу α минимален, а значит, лестница ещё покоится.

При меньшем угле тело начнёт скользить, значит, силы трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ – максимальные силы трения покоя, и их модули равны соответственно:

$$F_{тр1} = \mu_1 N_1 \quad \text{и} \quad F_{тр2} = \mu_2 N_2$$

и направлены вверх вдоль стены и влево вдоль пола (рис. 4). Таким образом, к центру лестницы в точке B приложена сила тяжести $m\vec{g}$, в точке A – силы трения и реакции стены $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{N}_1$, в точке C – силы трения и реакции пола $\vec{F}_{тр2}$ и $\vec{N}_2$.

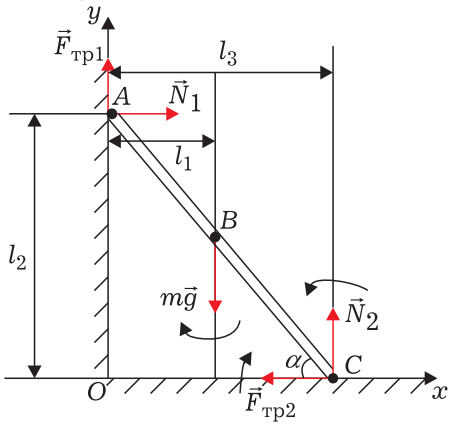


Рис. 4

Запишем 2-й закон Ньютона в векторной форме и в проекции на оси, направленные вдоль пола и стены.

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр1} + \vec{F}_{тр2} = 0.$$

Ox: $N_1 - F_{тр2} = 0$, $N_1 = F_{тр2}$, но $F_{тр2} = \mu_2 N_2$, тогда

$$N_1 = \mu_2 N_2. \qquad (1)$$

Oy: $F_{тр1} + N_2 - mg = 0$, $mg = F_{тр1} + N_2$.

Но $F_{тр1} = \mu_1 N_1$, тогда $mg = \mu_1 N_1 + N_2$.

С учётом (1) получаем $mg = \mu_1 \mu_2 N_2 + N_2$, или

$$mg = N_2(\mu_1 \mu_2 + 1). \qquad (2)$$

Запишем теперь правило моментов. Рассмотрим вращение относительно точки A. Тогда

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0, \qquad (3)$$

где M_1 – момент силы тяжести $m\vec{g}$, M_2 – момент силы трения о пол $\vec{F}_{тр2}$, M_3 – момент силы реакции пола $\vec{N}_2$.

Силы тяжести и трения о пол стремятся повернуть тело вокруг точки A по часовой стрелке, и их моменты отрицательные, момент силы реакции о пол положительный, так как эта сила стремится повернуть тело вокруг точки A против часовой стрелки. Тогда $M_1 = -mgl_1$, $M_2 = -F_{тр2} l_2$, $M_3 = N_2 l_3$, где l_1, l_2 и l_3 – плечи сил.

Пусть длина лестницы равна l. Тогда плечо силы тяжести

$$l_1 = BA \cdot \cos\alpha = \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Плечо силы трения о пол

$$l_2 = AO = AC \cdot \sin\alpha = l \cdot \sin\alpha.$$

Плечо силы реакции о пол

$$l_3 = OC = AC \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\alpha.$$

Подставим значения плеч сил в соответствующие вращающие моменты: $M_1 = -mg\frac{l}{2}\cos\alpha$, $M_2 = -F_{тр2} l \sin\alpha$, $M_3 = N_2 l \cos\alpha$.

Тогда выражение (3) принимает вид

$$-mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F_{тр2} l \sin\alpha + N_2 l \cos\alpha = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} mg \cos\alpha + F_{тр2} \sin\alpha = N_2 \cos\alpha.$$

Поскольку $F_{тр2} = \mu_2 N_2$, то

$$\frac{1}{2} mg \cdot \cos\alpha + \mu_2 N_2 \cdot \sin\alpha = N_2 \cos\alpha.$$

С учётом (2)

$$\frac{1}{2}N_2(\mu_1\mu_2+1)\cos\alpha+\mu_2N_2\sin\alpha=N_2\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{2}(\mu_1\mu_2+1)\cos\alpha+\mu_2\sin\alpha=\cos\alpha. \quad (4)$$

Для нахождения угла α решим тригонометрическое уравнение (4), разделив его почленно на $\cos\alpha$:

$$\frac{1}{2}(\mu_1\mu_2+1)+\mu_2\operatorname{tg}\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}=\operatorname{arctg}\frac{1-0{,}5\cdot0{,}4}{2\cdot0{,}4}=45°.$$

В завершение отметим, что если в задаче надо было бы найти «угол, который может составлять лестница, находясь в равновесии», то ответом было бы неравенство

$$\alpha\geq\operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_2}.$$

Задача 4. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплён на стойке в верхней точке наклонной плоскости (рис. 5), так что нить параллельна плоскости. Коэффициент трения цилиндра о плоскость равен μ. При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

Решение. Угол наклонной плоскости в данной задаче можно менять. Нужно найти максимальный угол, который образует плоскость с горизонтом, при котором цилиндр будет покоиться, т. е. будет находиться в равновесии. Будем считать цилиндр однородным, поскольку указаний о смещении центра масс в задаче нет, т. е. центр масс цилиндра находится в его геометрическом центре. Помимо силы тяжести, направленной вертикально вниз, к цилиндру приложены сила нормальной реакции опоры, направленная перпендикулярно плоскости, сила натяжения нити, направленная по нити, и сила трения покоя (рис. 6). Поскольку в задаче рассматривается максимальный угол плоскости с горизонтом, то сила трения покоя является максимальной, и её значение можно определить по формуле $F_{\text{тр покоя max}}=\mu N$. Т. к. при увеличении угла наклона плоскости точка касания цилиндра о плоскость (точка O) начнёт движение вниз, а сила трения покоя направлена против возможного движения, то сила трения направлена вдоль плоскость вверх.

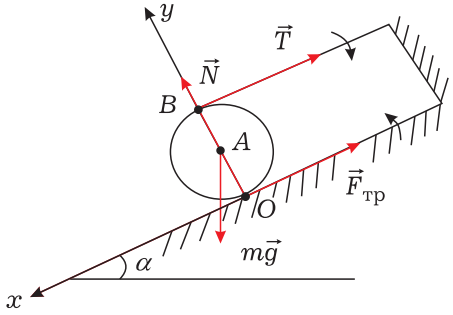


Рис. 5

Запишем первое условие равновесия – 2-й закон Ньютона:

$$\vec{T}+\vec{mg}+\vec{F}_{\text{тр}}+\vec{N}=0.$$

На Ox:

$$mg\sin\alpha-T-F_{\text{тр}}=0. \quad (1)$$

На Oy:

$$N-mg\cos\alpha=0.$$

$$N=\mu mg\cos\alpha.$$

Поскольку $F_{\text{тр}}=F_{\text{тр покоя max}}=\mu N$, то

$$F_{\text{тр}}=\mu mg\cos\alpha. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$mg\sin\alpha-T-\mu mg\cos\alpha=0. \quad (3)$$

Запишем второе условие равновесия – правило моментов – относительно центра масс цилиндра – точки A.

Тогда моменты силы тяжести и нормальной реакции опоры равны нулю, поскольку эти силы проходят через точку A. Вращающие моменты создают сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$.

Относительно A: $M_1 + M_2 = 0$, где

$$M_1 = F_{тр} \cdot l_1 = F_{тр} \cdot AO = F_{тр} \cdot R,$$

$$M_2 = -T \cdot l_2 = -T \cdot AB = -TR,$$

R – радиус цилиндра. Тогда

$$F_{тр} \cdot R - T \cdot R = 0.$$

Отсюда имеем:

$$F_{тр} = T, \qquad (5)$$

Из (5) и (2) получим:

$$T = F_{тр} = \mu mg\cos\alpha.$$

И выражение (3) принимает вид:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0,$$

$$\sin\alpha = 2\mu\cos\alpha.$$

Разделим последнее выражение на $\cos\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = 2\mu$, отсюда $\alpha = \operatorname{arctg} 2\mu$.

Задача 5. Из плоскопараллельной однородной круглой пластинки радиусом $R = 105{,}6$ см вырезан квадрат таким образом, как показано на рисунке 6. Определить положение центра тяжести пластинки с таким вырезом.

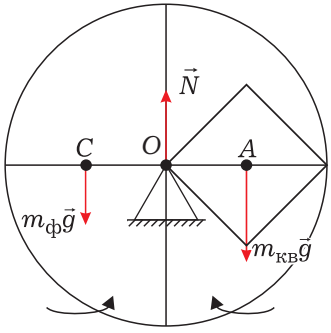


Рис. 6

Решение. Один из способов решения подобных задач состоит в следующем. Обозначим массу фигуры, координату центра масс которой надо определить, как $m_ф$; а массу вырезанного квадрата – $m_{кв}$. Пусть центр масс фигуры с вырезом находится в точке C, центр масс квадрата – в точке A (см. рисунок 6). Вставив вырез, получим круглую пластину массой $m = m_ф + m_к$ с центром масс в точке O (т. к. пластина однородная). Тогда круглая пластина, закреплённая в точке O, будет находиться в безразличном равновесии, следовательно, сумма моментов сил относительно точки O равна нулю. В таком случае к пластине, состоящей из двух фигур, будут приложены две силы тяжести $m_ф\vec{g}$ и $m_{кв}\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ в точке крепления O.

Запишем правило моментов относительно точки крепления O:

$$M_1 + M_2 = 0, \qquad (1)$$

где M_1 – момент силы тяжести фигуры с вырезом $m_ф$ и M_2 – момент силы тяжести квадрата $m_{кв}$.

Сила тяжести $m_ф\vec{g}$ вращает фигуру против часовой стрелки, тогда её вращающий момент положителен. Сила тяжести квадрата $m_{кв}\vec{g}$ вращает фигуру по часовой стрелке, тогда её вращающий момент отрицателен:

$$M_1 = m_ф g l_1 \qquad (2)$$

и

$$M_2 = -m_{кв} g l_2, \qquad (3)$$

где l_1 и l_2 – плечи сил тяжести.

$$l_1 = OC = x_c, \qquad (4)$$

$$l_2 = OA. \qquad (5)$$

Подставляя (2), (3), (4) и (5) в выражение (1), получаем:

$$m_ф g x_c = m_{кв} g \cdot OA,$$

$$x_c = \frac{m_{кв} \cdot OA}{m_ф}. \qquad (6)$$

Центр масс квадрата лежит на пересечении его диагоналей, то есть на расстоянии $\frac{R}{2}$ от точки O:

$$OA = \frac{R}{2}. \qquad (7)$$

Массу квадрата определим через плотность пластины ρ и объём, рав-

ный произведению толщины пластины d на площадь квадрата:

$$m_{кв} = \rho V_{кв} = \rho d S_{кв}, \quad S_{кв} = a^2,$$

где a – сторона квадрата.

Так как диагональ квадрата равна R, по теореме Пифагора найдём его сторону: $a^2 + a^2 = R^2$, $2a^2 = R^2$, откуда

$$a = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Тогда масса квадрата

$$m_{кв} = \rho d \cdot \frac{R^2}{2}. \qquad (8)$$

Массу фигуры с вырезом $m_ф$ найдём, вычитая из массы круговой пластины массу квадрата: $m_ф = m - m_{кв}$, где $m = \rho V = \rho d S$, $S = \pi R^2$ – площадь круглой пластины. Тогда с учётом (8)

$$m_ф = \rho d \pi R^2 - \rho d \frac{R^2}{2} = \rho d R^2 \frac{(2\pi - 1)}{2}. \qquad (9)$$

Подставляя (7), (8) и (9) в выражение (6), найдём координату центра масс фигуры с вырезом:

$$x_c = \frac{\rho d R^2}{2} \cdot \frac{R}{2} : \left(\rho d R^2 \cdot \frac{(2\pi - 1)}{2} \right) =$$

$$= \frac{\rho d R^2 R \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot \rho d R^2 (2\pi - 1)} = \frac{R}{2(2\pi - 1)}.$$

$$x_c = \frac{1{,}056}{2 \cdot (2 \cdot 3{,}14 - 1)} = 0{,}1.$$

Задача 6. Тяжёлый цилиндрический каток необходимо поднять на ступеньку высоты h (рис. 7). Определить наименьшую силу F, которую необходимо для этого приложить к центру катка в горизонтальном направлении, если каток имеет радиус R (причём R больше высоты ступеньки h), а масса катка равна m.

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами:

1) используя равенство нулю векторной суммы сил, приложенных к телу;

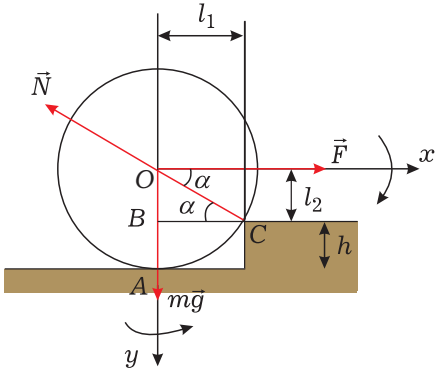


Рис. 7

2) используя правило моментов.

В обоих случаях надо указать силы, приложенные к телу. Поскольку необходимо определить минимальную силу, то эта сила $\vec{F}$ должна быть такой, чтобы тело двигалось без ускорения, именно этим и будет обеспечиваться равновесие катка в любой момент времени. Сила $\vec{F}$ горизонтальна по условию и приложена к центру катка в точке O. Сила тяжести, очевидно, приложена к геометрическому центру катка, поскольку его неоднородность не оговорена. Для того чтобы каток поднялся на ступеньку, он должен оторваться от пола, и сила реакции опоры в точке A равна нулю: $\vec{N}_A = 0$. Но каток опирается на выступ в точке C, тогда сила реакции выступа $\vec{N}$ направлена перпендикулярно поверхности (касательной к окружности), то есть по радиусу (см. рисунок 7).

1-й способ.

Запишем 2-й закон Ньютона в векторном виде и в проекции на оси, указанные на рисунке:

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} = 0.$$

$$Ox: F - N\cos\alpha = 0,$$

$$F = N\cos\alpha, \qquad (1)$$

где α – угол, который составляет сила $\vec{N}$ с горизонтальной осью.

$$Oy: mg - N\sin\alpha = 0,$$

$$mg = N \cdot \sin\alpha. \qquad (2)$$

Разделим (2) на (1): $\frac{mg}{F}=\text{tg}\alpha$, откуда

$$F=mg\cdot\text{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

Для нахождения $\text{ctg}\alpha$ рассмотрим треугольник OBC: в нём $\angle B=90°$, $\angle C=\alpha$, $OC=R$, $OB=R-h$, тогда

$$\text{ctg}\alpha=\frac{BC}{OB}=\frac{\sqrt{OC^2-OB^2}}{OB}=\sqrt{\left(\frac{OC}{OB}\right)^2-1},$$

$$\text{ctg}\alpha=\sqrt{\frac{R^2}{(R-h)^2}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{R^2-(R^2-2Rh+h^2)}}{R-h}=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}. \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в (3), получим:

$$F=\frac{mg}{R-h}\cdot\sqrt{h(2R-h)}.$$

2-й способ.

Запишем правило моментов относительно выступа – точки C, при этом сила реакции опоры $\vec{N}$ проходит через ось вращения и её момент равен нулю.

$$M_1+M_2=0,$$

где M_1 – момент силы тяжести $m\vec{g}$ (положительный), M_2 – момент силы $\vec{F}$ (отрицательный).

$$M_1=mg\cdot l_1,\ M_2=-F\cdot l_2,$$

$l_1=BC$ – плечо силы тяжести, а $l_2=OB$ – плечо силы $\vec{F}$. Тогда

$$mg\cdot BC=F\cdot OB.$$

$$BC=\sqrt{OC^2-OB^2}=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=$$

$$=\sqrt{R^2-R^2-h^2+2Rh}=\sqrt{h\cdot(2R-h)},$$

$OB=R-h$. Окончательно

$$F=\frac{mg}{R-h}\cdot\sqrt{h(2R-h)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Предлагаем читателям задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля в скобках указаны ответы.

1. Однородный стержень длиной l = 120 см имеет массу m = 1 кг. На концах стержня действуют силы F_1 = = 10 Н и F_2 = 20 Н. В какой точке следует поставить опору, чтобы стержень находился горизонтально?

$\left(x=\frac{2F_1+mg}{2(F_1+F_2+mg)}l=0{,}45\text{ м от силы }F_2\right)$

2. Если закрепить два груза массами $2m$ и m на невесомом стержне длиной $L=3$ м, как показано на рисунке 8, то для того, чтобы стержень оставался в равновесии, его следует подвесить в точке O, находящейся на расстоянии x от груза массой $2m$. Найдите расстояние x.

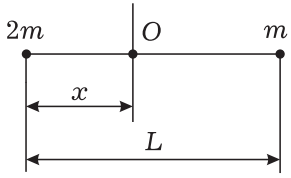


Рис. 8

$\left(x=\frac{L}{3}=1\text{ м}\right)$

3. Лестница длиной l = 4 м приставлена к идеально гладкой стене под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu=0{,}33$. На какое расстояние S вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнёт скользить? Массой лестницы пренебречь.

$(S=\mu\cdot l\cdot\text{tg}a=2{,}3\text{ м})$

4. Катушка подвешена к потолку с помощью невесомой нерастяжимой нити, намотанной по малому радиусу r. По большому радиусу R тоже намотана нить, на конце которой подвешен груз (рис. 9). Какой должна быть масса груза m, чтобы система находилась в равновесии? Масса катушки M. $\left(m=M\frac{r}{R-r}\right)$

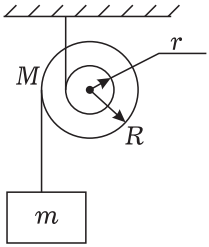


Рис. 9

5. Однородная плоская пластинка имеет форму круга радиусом R, из которого вырезан круг вдвое меньшего радиуса, касающийся первого круга (рис. 10). Определить положение центра тяжести. $\left(x=\frac{R}{6}\right)$

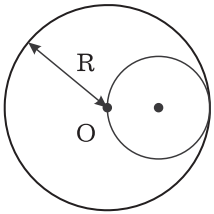


Рис. 10

6. Катушка удерживается на наклонной плоскости силой F, приложенной к нити, намотанной на катушку. Сила F направлена горизонтально (рис. 11). Масса катушки m = 40 г, радиусы r = 2 см, R = 4 см, угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60^\circ$. Найти величину силы F. $\left(F=\frac{mgR\sin\alpha}{r+R\cos\alpha}=0{,}34\text{ Н}\right)$

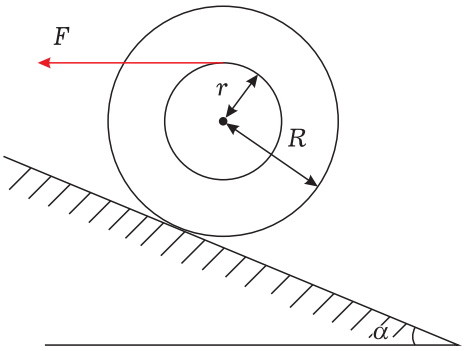


Рис. 11

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Аргумент в пользу космического происхождения жизни

Примерно 40 лет назад на Землю упал метеорит, который был найден и получил название «Мерчисон». Конечно же, специалисты тщательно изучили его химический состав. Но недавно немецкие учёные решили вернуться к исследованию этого метеорита, используя современные, более совершенные, методы масс-спектрографии, хроматографии и др. Анализу подвергли всего несколько миллиграмм его вещества, а обнаружили при этом 14 тысяч(!) различных химических соединений, в том числе органические. Поскольку «Мерчисону» 4,65 млрд лет, предшествующая жизни эволюция вещества началась до появления нашей планеты, и её «зародыши» могли быть занесены из космоса.