



Болгар Алексей Николаевич

Выпускник Московского физико-технического института (МФТИ).

Конденсатор во внешнем однородном поле

В этой статье рассматривается класс задач, в которых электрическая цепь содержит плоский конденсатор и параллельно его обкладкам расположена заряженная пластина, не имеющая электрического контакта с данной цепью. Тем не менее, такая пластина оказывает влияние на распределение электрических зарядов в цепи. Давайте в этом разберёмся.

1. Поле заряженной пластины

Прежде всего, для решения задач, рассматриваемых в этой статье, нужно знать **правило №1**:

Заряженная бесконечная пластина (заряженная плоскость) создаёт вокруг себя однородное поле, модуль напряжённости которого находится по формуле:

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}. \quad (1)$$

Здесь Q – модуль заряда пластины; S – площадь пластины; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ – электрическая постоянная.

Также нужно знать, что вектор напряжённости направлен от пластины, если она заряжена положительно, и к пластине, если она заряжена отрицательно (см. рис. 1).

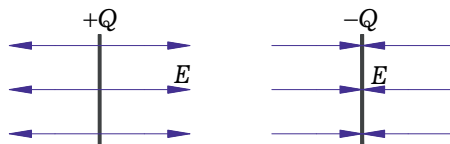


Рис. 1. Направление вектора напряжённости электрического поля, создаваемого заряженной пластиной, в зависимости от знака заряда

Следует заметить, что в отличие от поля заряженной бесконечной плоскости, описанного выше, поле пластины конечных размеров стано-

вится неоднородным вблизи её краёв (это называется «краевым эффектом»).

Но в задачах мы этим фактом пренебрегаем.

2. Связь между напряжённостью и напряжением (для однородного поля)

Начнём с формулировки следующего **правила №2**, которое исключений не имеет:

Напряжение (или разность потенциалов, что есть то же самое) между двумя точками пространства может возникнуть тогда и только тогда, когда это пространство заполнено электрическим полем.

Если же электрическое поле однородно, то:

$$|\varphi_A - \varphi_B| = E \cdot d; \quad (2)$$

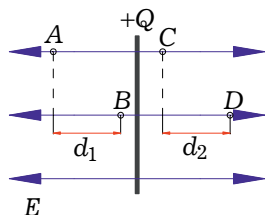
здесь φ_A, φ_B – потенциалы поля в точках A и B соответственно, E – модуль напряжённости, а d – расстояние между точками A и B , из-

меренное вдоль силовых линий (см. рис. 2).

Иногда в задачах нужно найти не модуль разности потенциалов, а потенциал поля в конкретной точке. Для этого нужно уметь аккуратно записывать равенство без знака модуля, т. е. вычитать в левой части равенства из большего потенциала меньший. Разобраться, в какой точке поля потенциал больше, а в какой меньше, поможет следующее **правило №3**:

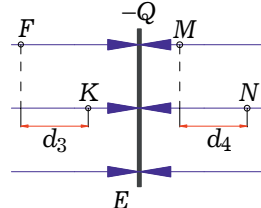
Потенциал электрического поля всегда убывает в направлении вектора напряжённости электрического поля.

Действие этого правила иллюстрируется рис. 2.



$$\varphi_B - \varphi_A = E \cdot d_1;$$

$$\varphi_C - \varphi_D = E \cdot d_2;$$



$$\varphi_F - \varphi_K = E \cdot d_3;$$

$$\varphi_N - \varphi_M = E \cdot d_4.$$

Рис. 2. Разность потенциалов между двумя точками в однородном электрическом поле

3. Практические примеры

Посмотрим, как работают правила и формулы, описанные выше, в решении конкретных задач.

Задача 1. В пространство между обкладками незаряженного плоского конденсатора вносят металлическую пластину, имеющую заряд Q , так

что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры d_1 и d_2 (рис. 3). Площади пластины и обкладок конденсатора одинаковы и равны S . Определить разность потенциалов U_c между обкладками конденсатора.

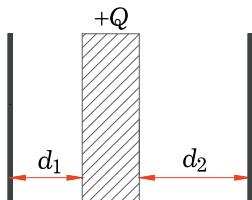


Рис. 3

Решение.

1) (Работает правило № 1) Так как пластина, введённая в пространство между обкладками конденсатора, заряжена, то она создаёт вокруг себя однородное электрическое поле, модуль напряжённости которого выражается по формуле (1):

$$E_0 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

2) (Работает правило № 2) Так как пространство слева и справа от заряженной пластины заполнено её электрическим полем, то между различными точками этого пространства может возникнуть разность потенциалов. Обозначим потенциал поля в области самой пластины через φ_2 , а потенциалы в областях, где расположены левая и правая обкладки конденсатора, через φ_1 и φ_3 соответственно (см. рис. 4).

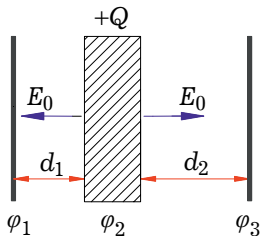


Рис. 4

3) (Работает правило № 3) Векторы напряжённости поля, создаваемого пластиной с зарядом $+Q$,

направлены так, как показано на рис. 4. А значит, потенциал этого поля максимален на пластине и убывает по направлениям от неё к обкладкам конденсатора. Учитывая это обстоятельство и пользуясь формулой (2), найдём разности потенциалов:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot d_1 \quad \text{и}$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot d_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем искомую разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$U_c = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot (d_2 - d_1).$$

Ответ: $U_c = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot (d_2 - d_1).$

Часто в задачах рассматриваемого класса требуется найти установившиеся заряды на пластинах, которые соединены проводником. В этом случае следует пользоваться тем, что потенциалы таких пластин должны оказаться равными. Рассмотрим характерную задачу в качестве примера.

Задача 2. Три одинаковые неподвижные металлические пластины расположены в воздухе на расстояниях d_1 и d_2 ($d_2 > d_1$) друг от друга. Площадь каждой из пластин равна S (рис. 5). На среднюю пластину помещают положительный заряд Q . Пластины 1 и 3 не заряжены и подключены через ключ к резистору с неизвестным сопротивлением, отличным от нуля. Какие заряды установятся на пластинах 1 и 3 по прошествии большого времени¹ после замыкания ключа.

¹Здесь требование прохождения большого времени означает конечное стационарное состояние цепи, когда прекращается процесс перетекания заряда между пластинами 1 и 2.

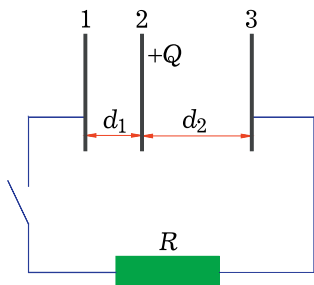


Рис. 5

Решение.

1) (Работает правило № 1) Пластина 2 по условию заряжена, а значит, она создаёт вокруг себя однородное электрическое поле, модуль напряжённости которого выражается по формуле (1):

$$E_0 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

2) Векторы напряжённости поля, создаваемого пластиной с зарядом $+Q$, направлены так, как показано на рис. 6. Так как изначально пластины 1 и 3 электронейтральны, то их суммарный заряд и по прошествии большого времени должен быть равен нулю. Значит, на пластинах 1 и 3 установятся заряды $Q_1 = -q$ и $Q_2 = +q$ соответственно (т. к. $d_2 > d_1$ и, следовательно, пластина 1, находящаяся ближе к положительно заряженной пластине 2, зарядится отрицательно). Тогда векторы напряжённости полей, создаваемых пластинами 1 и 3, направлены так, как показано на рисунке 6.

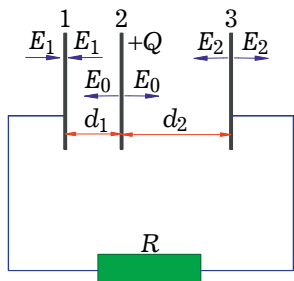


Рис. 6

3) (Работает правило № 2)

Найдём разность потенциалов между пластинами 1 и 2 по формуле (2):

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= (E_0 + E_1 + E_2) \cdot d_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_1 &= \varphi_2 - (E_0 + E_1 + E_2) \cdot d_1. \end{aligned}$$

Аналогично находим разность потенциалов между пластинами 2 и 3:

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_3 &= (E_0 - E_1 - E_2) \cdot d_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_3 &= \varphi_2 - (E_0 - E_1 - E_2) \cdot d_2. \end{aligned}$$



4) (Работает правило № 1) Перераспределение заряда между пластинами 1 и 3 прекратится тогда, когда потенциалы этих пластин будут равны. Приравнявая выражения для этих потенциалов, получим уравнение:

$$(E_0 + E_1 + E_2) \cdot d_1 = (E_0 - E_1 - E_2) \cdot d_2.$$

Вновь воспользуемся формулой (1) для того, чтобы перейти в данном уравнении к абсолютным величинам зарядов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \right) \cdot d_1 &= \\ = \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \right) \cdot d_2, \end{aligned}$$

и решим его относительно q :

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \right) \cdot d_1 &= \\ = \left(\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \right) \cdot d_2 \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \frac{q}{\varepsilon_0 S} (d_1 + d_2) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} (d_2 - d_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{Q(d_2 - d_1)}{2(d_1 + d_2)}.$$

Мы нашли модуль зарядов на пластинах 1 и 3. Их знаки были установлены в пункте 2.

Ответ: $Q_1 = -\frac{Q(d_2 - d_1)}{2(d_1 + d_2)},$

$$Q_2 = \frac{Q(d_2 - d_1)}{2(d_1 + d_2)}.$$

В предыдущем примере пластины, на которых требовалось найти заряды, были соединены проводником, а как поступать, если между ними включён источник тока? В этом случае следует учитывать то, что источник тока будет поддерживать между данными пластинами разность потенциалов, равную его ЭДС. Рассмотрим задачу такого рода.



Задача 3. Три тонкие незаряженные металлические пластины площадью S каждая расположены на расстояниях d друг от друга, причём d много меньше размеров пластин. К пластинам 2 и 3 подсоединили батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 7). Пластина 1 сообщила положительный заряд q_0 .

Определить установившийся заряд пластин 2 и 3.

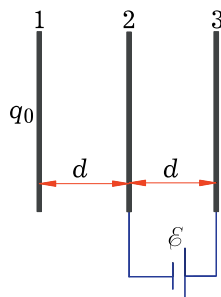


Рис. 7

Решение.

1) Учитывая изначальную электронейтральность пластин 2 и 3, а также направление включения источника тока, очевидно, что установившиеся заряды $Q_2 = -q$ и $Q_3 = +q$.

2) (Работает правило № 1) Пластины 1, 2 и 3 создают однородные поля с напряжённостями, модули которых определяем по формуле (1):

$$E_1 = \frac{q_0}{2\varepsilon_0 S}, \quad E_2 = E_3 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Векторы этих напряжённостей направлены так, как показано на рис. 8.

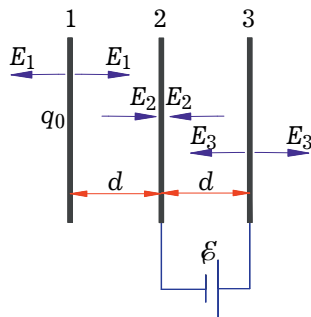


Рис. 8

2) (Работает правило № 2) Найдём разность потенциалов между пластинами 3 и 2 по формуле (2):

$$\varphi_3 - \varphi_2 = (-E_1 + E_2 + E_3) \cdot d.$$

3) Теперь подставим в последнее уравнение выражения для модулей напряжённости и учтём, что $\varphi_3 - \varphi_2 = \mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q}{2\varepsilon_0 S} \right) \cdot d.$$

Решая уравнение относительно q , получим:

$$q = \frac{q_0}{2} + \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S}{d}.$$

4) Учитывая различие в знаках зарядов пластин 2 и 3, окончательно получаем:

$$Q_2 = -\frac{q_0}{2} - \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S}{d}, \quad Q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S}{d}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. В плоском конденсаторе на левую обкладку помещают заряд $+Q_1$, а на правую $+Q_2$. Внутри конденсатора параллельно обкладкам помещают незаряженную металлическую пластину (рис. 10). Какие заряды будут индуцированы на левой и правой поверхностях пластины, если $Q_2 > Q_1$?

Ответ: на левой поверхности

$$q_{\text{л}} = \frac{Q_2 - Q_1}{2},$$

на правой поверхности

$$q_{\text{п}} = -\frac{Q_2 - Q_1}{2}.$$

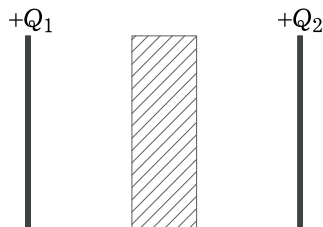


Рис. 10

Задача 5. Три одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга. Площадь каждой пластины равна S (рис. 11).

Ответ:

$$Q_2 = -\frac{q_0}{2} - \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S}{d}, \quad Q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\mathcal{E}\varepsilon_0 S}{d}.$$



На пластине 1 находится положительный заряд Q . Пластины 2 и 3 не заряжены и подключены через ключ к резистору с неизвестным отличным от нуля сопротивлением. Какие заряды установятся на пластинах 2 и 3 по прошествии большого времени после замыкания ключа?

Ответ: $Q_2 = -\frac{Q}{2},$

$$Q_3 = \frac{Q}{2}.$$

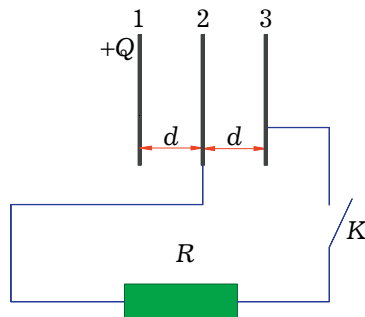


Рис. 11

Задача 6. Три одинаковые неподвижные металлические пластины расположены в воздухе на разных расстояниях d_1 и d_2 ($d_2 > d_1$) друг от друга (рис. 12). На

средней пластине 2 находится положительный заряд Q . Изначально не заряженные пластины 1 и 3 подключают через ключ K к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 12). Определить установившиеся заряды пластин 1 и 3 после замыкания ключа.

Ответ: $Q_1 = -\frac{2\mathcal{E}\varepsilon_0 S + Q(d_2 - d_1)}{2(d_1 + d_2)},$

$$Q_3 = \frac{2\mathcal{E}\varepsilon_0 S + Q(d_2 - d_1)}{2(d_1 + d_2)}.$$

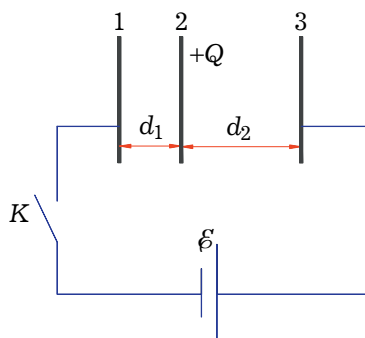


Рис. 12

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Обоснованное заключение

Шерлок Холмс и доктор Ватсон, летя на воздушном шаре, попали в грозу с сильным ветром и вынуждены были приземлиться. Увидев невдалеке идущего мимо человека, они спросили:

– Где мы находимся?

И услышали после продолжительной паузы:

– В корзине воздушного шара.

Холмс в некоторой задумчивости говорит:

– Готов держать пари, Ватсон, что этот человек – биржевой аналитик.

– Почему Вы так уверены, Холмс?

– Элементарно, Ватсон! Он долго думал над простым вопросом, он ответил абсолютно верно, и нам от его ответа нет решительно никакой пользы!

