

Мукушев Базарбек Агзашулы
Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики Государственного университета им. Шакарима г. Семей, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза-2012».



Мукушев Мейр Абзалович
Ученик 10 класса областного многопрофильного лицея-интерната для одарённых детей, г.Павлодар, Республика Казахстан.

Характеристики гравитационных полей небесных тел

Статья посвящена изучению таких основных характеристик поля тяготения точечных тел, как гравитационная напряжённость и потенциал. На основе понятия гравитационного потенциала выведено уравнение работы поля тяготения Солнца по перемещению точечного тела. Представлены графики потенциала Солнечной системы и системы «Земля – Луна». Раскрыта причина устойчивости системы «Земля – Луна».

Введение

Гравитация – это универсальное свойство материи, которым обладают все предметы и тела во Вселенной. Суть гравитации заключается в том, что все материальные тела притягивают к себе все другие тела, находящиеся вокруг.

Взаимопритяжение проявляется между небесными телами, удалёнными друг от друга (например, Земля и Луна или Солнце и другие планеты), причём силы тяготения не зависят от того, в какой среде эти тела находятся (в воздухе, в воде или в

каком-либо другом веществе). Тяготение в равной мере существует даже тогда, когда взаимодействующие тела находятся в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством поля тяготения (гравитационного поля). Поле тяготения порождается этими телами и является одной из форм материи. Основными характеристиками гравитационного поля являются напряжённость и потенциал. Для гравитационного поля, создаваемого несколькими телами, выполняется принцип суперпозиции. Напряжённость гравитационного поля в данной точке есть векторная сумма напряжённостей полей каждого тела, а гравитационный потенциал есть алгебраическая сумма потенциалов отдельных тел. Принцип суперпозиции плодотворно применяется в небесной механике, где приходится иметь дело с явлением наложения нескольких гравитационных полей звёзд, планет и др.

Напряжённость гравитационного поля

Напряжённость гравитационного поля массы M в данной точке – векторная величина, определяемая силой $\vec{F}$, действующей на пробную единичную массу m_0, помещённую в эту точку поля. Обозначим напряжённость гравитационного поля через $\vec{g}$:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0}.$$

Напряжённость поля $\vec{g}$, создаваемого точечным телом массой M на растоянии r от неё, равна:

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r},$$

в скалярной форме $g = G\frac{M}{r^2}$.

Знак минус перед формулой означает, что вектор напряжённости поля направлен к точечному телу массой M, которое создало гравитационное поле.

Напряжённость $\vec{g}$ является силовой и количественной, т. е. векторной характеристикой поля в данной точке. Численное значение напряжённости для планеты называется *ускорением свободного падения*.

Поле называют *однородным*, если его напряжённость во всех точках одинакова. Поле называют *центральным*, если во всех его точках векторы напряжённости направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчёта. Поле тяготения материальной точки массой M является центральным (рис. 1).

Точку O называют *центром сил*. Центральное поле называют *сферически симметричным*, если численное значение вектора напряжённости зависит только от расстояния r до центра O.

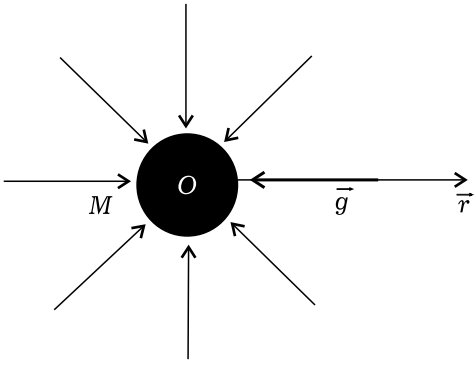


Рис. 1

Потенциальная энергия системы взаимодействующих тел и гравитационный потенциал точечного тела

Потенциальная энергия системы взаимодействующих тел – это физическая величина, численно равная работе, совершаемой силами взаимодействия при взаимном удалении всех тел системы из данного расположения на бесконечное расстояние друг от друга.

Рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек (тел) на расстоянии r друг от друга. Для расчёта гравитационной энергии $U(r)$ нужно вычислить работу силы тяготения по удалению двух тел на бесконечно большое расстояние друг от друга. Поскольку сила тяготения различна в разных точках, для вычисления работы её на всём перемещении нужно просуммировать, т. е. проинтегрировать, работы на элементарных, бесконечно малых перемещениях. Обозначим работу перемещения тела из данного положения в бесконечность через $A_{r,\infty}$ и вычислим потенциальную энергию данной системы:

$$U(r) = A_{r,\infty} = -\int_r^\infty F dr = -Gm_1m_2\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -G\frac{m_1m_2}{r}. \qquad (1)$$

Для любой системы тел, находящихся на конечных расстояниях, гравитационная энергия отрицательна, а для бесконечно удалённых, то есть для гравитационно не взаимодействующих тел, гравитационная энергия равна нулю. Полная энергия системы, равная сумме гравитационной и кинетической энергий, постоянна. Для изолированной системы гравитационная энергия является *энергией связи*.

Отрицательный знак гравитационной энергии сам по себе означает, что сила взаимодействия (тяготения) мешает взаимному удалению тел, является силой сопротивления по отношению к их взаимному удалению. Работа её в таких условиях отрицательна.

Работа, совершаемая при перемещении тела в гравитационном поле, не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела. На замкнутой траектории работа силы тяготения этого поля всегда равна нулю. Поля, обладающие таким свойством, называют *потенциальными*.

В гравитационном поле точечного тела m_2 под действием силы тяготения перемещается точечное тело m_1. Его потенциальная энергия в данной системе выражается по формуле (1).

Работа силы тяготения m_2 по перемещению точечного тела (m_1) из точки 1 в точку 2 равна

$$A = -(U(r_2) - U(r_1)) =$$

$$= m_1\left(-\frac{Gm_2}{r_1} - \left(-\frac{Gm_2}{r_2}\right)\right), \qquad (2)$$

$U(r_2)$, $U(r_1)$ – потенциальные энергии взаимодействия точечной массы m_1 с вторым телом в точках 2 и 1. Обозначим $-\frac{Gm_2}{r_1} = \varphi_1$ и $-\frac{Gm_2}{r_2} = \varphi_2$. Эти скалярные значения называют *гравитационными потенциалами* поля тяготения тела m_2 в точках 1 и 2. Гравитационный потенциал есть потенциальная энергия, приходящаяся на единицу массы. То есть эта физическая величина выступает *энергетической характеристикой* поля тяготения небесных тел, и работа

$$A = m_1(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов гравитационного поля второго тела в точках 1 и 2.

Гравитационный потенциал Солнечной системы

Предположим, что в сферу гравитационного поля Солнечной системы прилетело из глубины космоса небольшое тело. Из формулы (1) следует, что его потенциальная энергия в системе «Солнце – пришелец» выражается следующей формулой:

$$U(r) = -G\frac{m_0 M_c}{r} \quad \text{при } r \geq R_c, \qquad (3)$$

здесь m_0 – масса пришельца из космоса, M_c и R_c – масса и радиус Солнца. Этот вид потенциальной энергии называется *энергией связи* между Солнцем и «пришельцем». Значение потенциальной энергии взаимодействия «пришельца» с планетами Солнечной системы во много раз меньше его потенциальной энергии, выраженной по формуле (3).

Используя уравнение (3), вычислим работу силы тяготения Солнца по перемещению точечного тела (m_0) из точки 1 в точку 2 :

$$A = -(U(r_2) - U(r_1)) =$$
$$= m_0\left(-\frac{GM_c}{r_1} - \left(-\frac{GMc}{r_2}\right)\right).$$

Теперь обозначим $-\frac{GM_c}{r_1} = \varphi_1$ и $-\frac{GM_c}{r_2} = \varphi_2$. Эти значения называют *гравитационными потенциалами* поля тяготения Солнца в точках 1 и 2. Тогда работа

$$A = m_0(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов гравитационного поля Солнца в точках 1 и 2.

Гравитационный потенциал Солнца выражается в таком виде:

$$\varphi(r) = -G\frac{M_c}{r}. \qquad (3^*)$$

Он численно равен значению потенциальной энергии (или энергии связи) единичной массы космического тела, находящегося на расстоянии r от Солнца. Гравитационный потенциал Солнца можно называть *удельной потенциальной энергией* (или удельной энергией связи), характеризующей взаимодействие Солнца и единичной массы «пришельца» [1].

Для расчёта гравитационного потенциала некоторой точки Солнечной системы мы просто суммируем гравитационные потенциалы Солнца и всех планет. Поскольку масса Солнца в 750 раза больше суммарной массы всех планет, гравитационными потенциалами планет солнечной системы обычно пренебрегают.

На рис. 2 представлен *качественный график* гравитационного потенциала Солнечной системы, когда наступил гипотетический парад планет. Каждая планета тоже создает гравитационное поле. Планеты-гиганты Юпитер и Сатурн создают более мощные поля по сравнению с другими планетами. Глубина каждого пика равна потенциальной энергии единичной массы тела, находящегося в центре этой планеты. Отрезок OA соответствует глубине потенциальной энергии единичной массы тела, находящегося в центре Солнца. График гравитационного потенциала Солнца и пики носят название *потенциальной ямы* для единичной массы тела, находящейся в центре Солнца или планет. То есть все планеты находятся в *гравитационных ловушках* Солнца. Общая механическая энергия отдельной планеты с массой m в Солнечной системе состоит из суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_c}{r} = -\frac{GmM_c}{2r}. \quad (4)$$

Из последнего уравнения можно делать вывод, что все планеты обречены вращаться вокруг Солнца. (r – расстояние центра некоторой планеты от центра Солнца).

Уравнение кривой, которая соответствует участку BA, вычисляется по формуле (плотность Солнца считаем постоянной):

$$\varphi(r) = G\frac{M_c}{R_c}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_c}\right)^2 - \frac{3}{2}\right].$$

Точкам A и B на графике соответствуют следующие значения гравитационного потенциала: $-\frac{3}{2}G\frac{M_c}{R_c}$ и $-G\frac{M_c}{R_c}$ (см. [2]).

В качестве глубины потенциальной ямы планеты для единичной массы тела, как обычно, берут не точку $\left(-\frac{3}{2}G\frac{M_п}{R_п}\right)$, а точку $\left(-G\frac{M_п}{R_п}\right)$. Это связано с тем, что первая точка находится внутри планеты. Дно потенциальной ямы планеты есть её поверхность, и оно соответствует точке B.

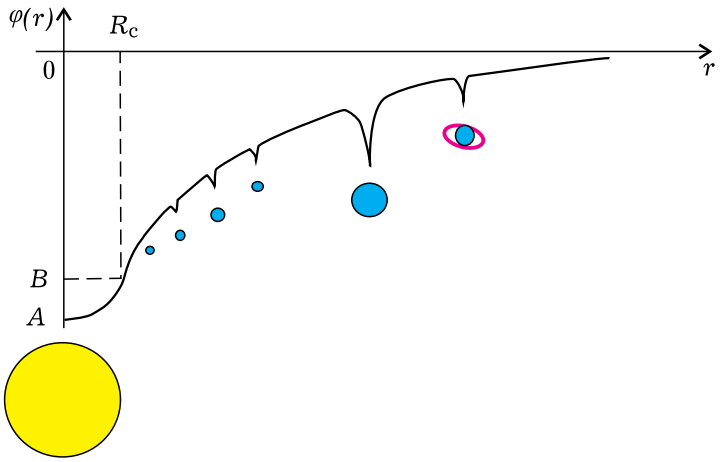


Рис. 2

Для создания *количественного графика* гравитационного потенциала Солнечной системы был использован пакет прикладных программ MathCAD. Из-за невозможности охвата всей Солнечной системы мы ограничились набором четырёх планет: Земли, Марса, Юпитера и Сатурна.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2, масса Солнца $M_c = 2\cdot10^{24}$ кг, масса Земли $m_1 = 6\cdot10^{24}$ кг, расстояние Земли от Солнца $l_1 = 1{,}5\cdot10^{11}$ м, $m_2 \approx m_1$ – масса Марса, $l_2 = 1{,}5\cdot l_1$ – расстояние Марса от Солнца; $m_3 = 318\cdot m_1$, $l_3 = 5{,}2\cdot l_1$ – масса Юпитера и его расстояние от Солнца; $m_4 = 95\cdot m_1$, $l_4 = 9{,}3\cdot l_1$ – масса Сатурна и его расстояние от Солнца. Из принципа суперпозиции (наложения) полей следует, что потенциал в каждой точке пространства $\varphi = \varphi_c + \varphi_з + \varphi_м + \varphi_ю + \varphi_c$.

Для случая парада планет потенциал Солнечной системы записывают в таком виде (по горизонтали – м, по вертикали – Дж/кг на рис. 3):

$$\varphi(r) = -G\frac{M_c}{r} - G\frac{m_1}{|r-l_1|} - G\frac{m_2}{|r-l_2|} - G\frac{m_3}{|r-l_3|} - G\frac{m_4}{|r-l_4|}. \quad (5)$$

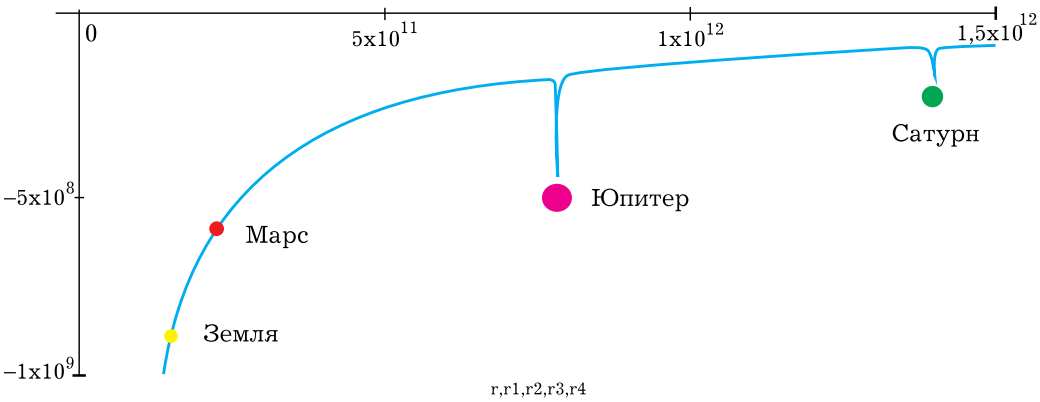


Рис. 3

Заметим, что в пространстве Солнечной системы гравитационный потенциал создаётся исключительно благодаря Солнцу. Поэтому графики уравнений (3*) и (5) особо не отличаются. Итак, график гравитационного потенциала Солнечной системы при условиях $r \geq R_c$ (R_c – радиус Солнца) есть гипербола, на которую накладываются очень узкие едва заметные вертикальные пики, расположенные около Юпитера и Сатурна. Эти пики не видны около Земли и Марса из-за их ничтожно малого значения.

Гравитационное поле системы «Земля – Луна»

Для ясного понимания сущности гравитационного поля системы «Земля – Луна» нам необходимо разобраться с напряжённостью и гравитационным потенциалом данной системы. Сначала решим следующую задачу, в которой находят численное значение минимальной работы, необходимой для перемещения тела массой $m_0 = 1$ кг с поверхности Земли на поверхность Луны.

Известно, что расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 радиусам Земли. Масса $M_з$ Земли больше массы $m_л$ Луны в 81 раз. Считать, что при перемещении тела взаимное положение Луны и Земли не меняется. Тело массой m_0 необходимо перемещать всё время в суммарном гравитационном поле Земли и Луны. На прямой, соединяющей центры Земли и Луны, есть точка C (рис. 4), в которой силы тяготения Земли и Луны уравновешиваются. Точка C делит весь путь тела m_0 на две части. На первом участке от Земли до точки C сила тяготения суммарного гравитационного поля Земли и Луны направлена к Земле, на втором участке – от точки C до Луны – к Луне.

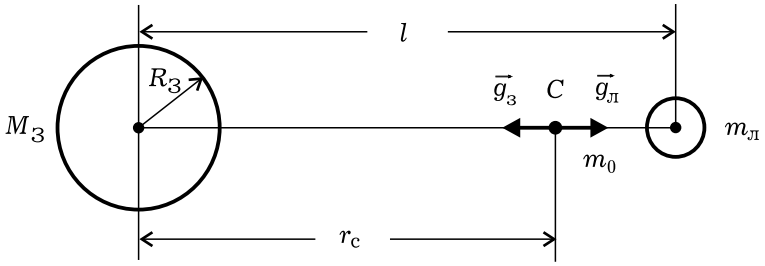


Рис. 4

Очевидно, на первом участке необходимо совершать работу против сил тяготения, а на втором участке, достигнув точки C с любой, сколь угодно малой скоростью, тело начнёт двигаться к Луне под действием суммарной силы тяготения, направленной к Луне.

Следовательно, работа будет минимальной, если тело достигнет точки C с минимальной скоростью, необходимой для дальнейшего движения. Эту скорость, а значит, и кинетическую энергию тела в точке C можно считать равной нулю.

Из принципа суперпозиции полей следует, что потенциал в каждой точке пространства

$$\varphi = \varphi_З + \varphi_Л, \qquad (6)$$

где $\varphi_З$ и $\varphi_Л$ – потенциалы полей тяготения Земли и Луны в этой точке.

Запишем формулу (6) для прямой, соединяющей центры Земли и Луны:

$$\varphi(r) = -G\frac{M_З}{r} - G\frac{m_Л}{l-r}, \qquad (7)$$

где r – расстояние от центра Земли до произвольной точки прямой, соединяющей центры Земли и Луны.

Используя уравнение (7), напишем формулу потенциальной энергии системы «тело – Земля – Луна»:

$$U(r) = m_0\varphi = -\frac{Gm_0M_З}{r} - \frac{Gm_0m_Л}{l-r}.$$

Вычислим «потенциальные ямы» для Земли и Луны. Они равны максимальным по модулю значениям величин энергии связи тел на поверхностях Земли и Луны. Для Земли

$$U(R_З) = -\frac{Gm_0M_З}{R_З} - \frac{Gm_0m_Л}{l-R_З} \approx$$

$$\approx -m_0\,(6{,}2523\cdot10^7 + 1{,}53\cdot10^4)\ \text{Дж} =$$

$$= m_0\cdot6{,}2538\cdot10^7\ \text{Дж}.$$

Глубина «ямы» Луны $U(R_Л) =$

$$= -\frac{Gm_0M_Л}{R_Л} - \frac{Gm_0M_З}{l-R_Л} \approx -m_0\cdot(2{,}82\cdot10^6 +$$

$$+ 1{,}059\cdot10^6)\ \text{Дж} = -m_0\cdot3{,}88\cdot10^6\ \text{Дж}.$$

Энергия связи, или потенциальная энергия системы «тело – Земля – Луна» для точки, где равны силы притяжения Земли и Луны, есть

$$U(r_C) = m_0\varphi_C.$$

Поскольку модули векторов напряжённости гравитационных полей Земли и Луны в точке C равны, то

$$g_З = g_Л:$$

$$G\frac{M_З}{r_C^2} = G\frac{m_Л}{(l-r_C)^2}, \quad \text{или}$$

$$G\frac{81m_Л}{r_C^2} = G\frac{m_Л}{(60\,R_З - r_C)^2}.$$

Решив эти уравнения, найдём:

$$r_{1C} = 54R_З;\ r_{2C} = 67{,}5R_З.$$

Корень $r_{2\,C} = 67{,}5R_З > 60R_З$ не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $r_C = 54R_З = 343980$ км. Тогда

$$\varphi_c = -G\frac{M_з}{54R_з} - G\frac{M_з}{81(60R_з - 54R_з)} =$$

$$= -G\frac{M_з}{54R_з} - G\frac{M_з}{81\cdot 6R_з} = -0,0205G\frac{M_з}{R_з},$$

$$U(r_c) = m_0\varphi_c = -0,02G\frac{m_0M_з}{R_з} =$$

$$= -m_0\cdot 1,28\cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

$A = -(U(r_c) - U(R_з)) = -m_0\cdot 6,1258\cdot 10^7$ Дж.

Ответ. $A_{\min} = 6,1258\cdot 10^7$ Дж.

На рисунке 5 представлен график потенциала суммарного гравитационного поля Земли и Луны, полученный с помощью пакета прикладных программ Mathcad.

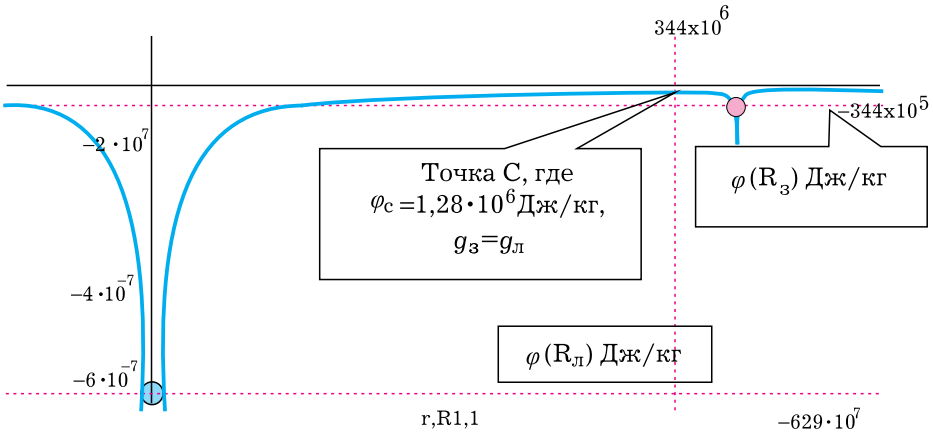


Рис. 5

Почему Луна не упадёт на Солнце?

Рассмотрим силы гравитационного взаимодействия Солнца, Земли и Луны. Нам известны некоторые сведения из астрономии: расстояние от Земли до Солнца 1 а. е., или $1,5\times 10^{11}$м; расстояние от Земли до Луны примерно равно $\frac{1}{400}$ а. е. Сравним силы протяжения Луны Солнцем и Землёй. Для простоты примем такое расположение Солнца, Земли и Луны, как на рис. 6.

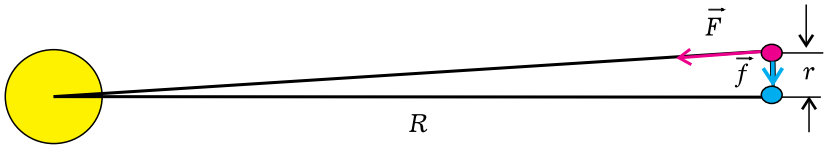


Рис. 6

$$F \approx G\frac{m_л M_c}{R^2} = G\frac{m_л M_c}{1^2},$$

$$f = G\frac{m_л M_з}{(1/400)^2} = G\frac{m_л M_з}{1^2}\cdot 16\cdot 10^4.$$

Поскольку $\frac{r}{R} \approx \frac{1}{400}$, можно считать равными расстояния от Земли до Солнца и от Луны до Солнца.

$\frac{F}{f} = \frac{M_c}{M_з} \times \frac{1}{16 \cdot 10^4}$. Принимая во внимание $\frac{M_c}{M_з} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}}{5{,}976 \cdot 10^{24}} \approx 333000$, получим $\frac{F}{f} \approx 2{,}1$.

Итак, Луна притягивается Солнцем вдвое сильнее, чем Землёй. Почему же тогда, в самом деле, Луна не падает на Солнце? Почему Земля всё же заставляет Луну обращаться вокруг неё, а не берёт верх действие Солнца?

Мы предлагаем энергетический подход к объяснению этого астрономического парадокса.

Отдельно рассмотрим взаимодействие между Землёй и Луной. Аналогично тому, что Земля находится в гравитационной ловушке (в потенциальной яме) Солнца, Луна тоже находится в гравитационной ловушке (в потенциальной яме) Земли (рис. 7). В качестве нулевого уровня гравитационного потенциала в окрестностях Земли берём линию гиперболы графика гравитационного потенциала Солнца. Эту линию будем считать почти горизонтальной, соответствующей оси r, хотя она имеет некоторый наклон в сторону Солнца.

Полная энергия Луны

$$E = \frac{M_л v^2}{2} - G\frac{M_л M_з}{R} = G\frac{M_л M_з}{2R}$$

(вспомним формулу (4)), где R – расстояние центра Луны от центра Земли. Учитывая, что $R \approx 60R_з$, полную энергию напишем так:

$$E = -G\frac{M_л M_з}{120R_з}.$$

Таким образом, чтобы преодолеть энергетический барьер, созданный гравитацией Земли, Луне нужно дополнительно

$$E_{доп} = G\frac{M_л M_з}{120R_з} = 3{,}9 \cdot 10^{28} \text{ Дж энергии.}$$

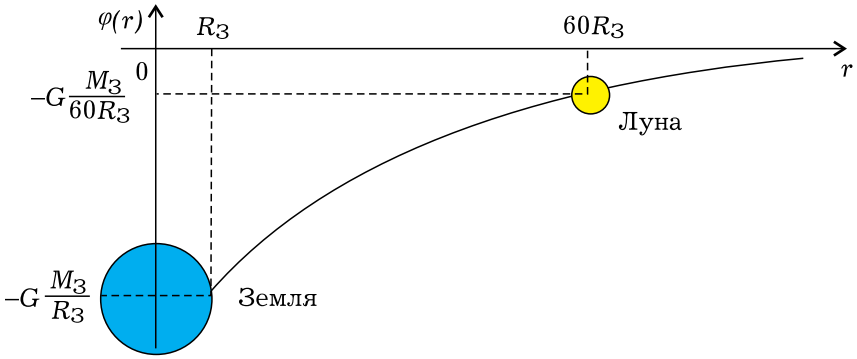


Рис. 7

В связи с тем, что Луна находится в потенциальной яме Земной гравитации, она никогда не упадёт на Солнце.

Литература

1. *Мукушев Б.А.* Энергия связи в задачах // Потенциал. – 2011. – №11.
2. *Можаев В.* Движение тел в гравитационных полях // Квант. – 1997. – №1.