



Мукушев Базарбек Агзашулы
 Доктор педагогических наук,
 профессор кафедры физики
 Государственного университета
 им. Шакарима г. Семей,
 обладатель государственного гранта Республики
 Казахстан «Лучший преподаватель вуза-2012».

Функция $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ в физических задачах

В журнале «Потенциал» во втором номере за 2013 год была напечатана статья В.В. Бардушкина и А.А. Прокофьева «Функция $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ и использование её свойств при решении задач», где раскрыта эвристическая функция этого выражения в процессе решения математических задач. Оказывается, эти свойства функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, когда $a, b > 0$, могут применяться для оптимального метода решения физических задач.

Задача 1. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью $v_0 = 42$ км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение с ускорением, равным по модулю a км/ч², и едет так до полной остановки до пункта C . Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч² до пункта D . Каково должно быть значение a , чтобы через 3 часа после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B ?

Решение. Пусть автомобиль остановился в точке C , а через 3 часа был в точке D ($t_{CD} = 3$ ч). Рассмотрим движение автомобиля на участке BC . По условию скорость

автомобиля в пункте B равна $v_B = 42$ км/ч; эта скорость является начальной на участке BC . Конечная скорость на рассматриваемом участке $v_C = 0$, поэтому время движения на участке BC (в часах) $t_{BC} = v_B/a$, $v_B = v_0$.

Определим длины путей на участках BC и CD :

$$BC = v_0 t_{BC} - \frac{at_{BC}^2}{2} = \frac{v_{BC}^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2a},$$

$$CD = \frac{at_{CD}^2}{2}.$$

Искомое расстояние

$$BD = DC + CD = \frac{v_0^2}{2a} + \frac{at_{CD}^2}{2}. \quad (1)$$

Далее используем свойства функции

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}.$$

Так как произведение слагаемых

$$\frac{v_0^2}{2a} \text{ и } \frac{at_{CD}^2}{2}$$

есть величина постоянная (не зависит от a), то сумма (1) достигает наименьшего значения при

$$\frac{v_0^2}{2a} = \frac{at_{CD}^2}{2}, \quad (2)$$

откуда получаем $a = 14 \text{ км/час}^2$. Подставив это значение в (1), получаем минимальную величину BD : $BD_{\min} = 126 \text{ км}$.

Можно иначе. По теореме Коши

$$\frac{v_0^2}{2a} = \frac{at_{CD}^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{v_0^2}{2a} \cdot \frac{at_{CD}^2}{2}} = v_0 t_{CD}.$$

Отсюда $BD_{\min} = v_0 t_{CD} = 126 \text{ км}$.

Задача 2. Мотоциклист выезжает из пункта A без начальной скорости и движется с постоянным ускорением $a = 12 \text{ км/ч}^2$ до пункта B . Достигнув скорости $v \text{ км/ч}$ в пункте B , он едет с этой скоростью 25 км до пункта C , а затем переходит на равнозамедленное движение с ускорением, равным по модулю $2a = 24 \text{ км/ч}^2$, и движется так до полной остановки до пункта D . Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью $v \text{ км/ч}$. При какой скорости мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта A ? Чему равен путь мотоциклиста?

Решение. Найдём наименьшее значение времени, затраченного мотоциклистом на обратный путь:

$$\begin{aligned} t_{DA} &= \frac{DA}{v} = \frac{AB + BC + CD}{v} = \\ &= \frac{\frac{v^2}{2a} + 25 + \frac{v^2}{4a}}{v} = \frac{3v}{4a} + \frac{25}{v} \geq 2\sqrt{\frac{75}{4a}}, \end{aligned}$$



$$t_{DA} = 2\sqrt{\frac{75}{4 \cdot 12}} = 5,$$

$$t_{DA} = 5 \text{ ч}.$$

Скорость v определим из уравнения:

$$\frac{3v}{4a} = \frac{25}{v}.$$

Откуда $v = 20 \text{ км/ч}$. Чтобы мотоциклист быстрее достиг пункта A , он должен двигаться со скоростью 20 км/ч . Тогда путь мотоциклиста равен: $2vt_{DA} = 200 \text{ км}$.

Задача 3. С какой минимальной начальной скоростью $v_{0\min}$ следует бросить под углом к горизонту камень, чтобы он достиг высоты h ? Чему равно время подъёма камня t до этой высоты?

Решение. Совместим начало отсчёта вертикальной оси Oy с точкой бросания (рис. 1). Тогда уравнение движения камня по вертикали примет вид:

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент, когда камень находится на указанной высоте, $y = h$. То есть

$$h = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразим из этого уравнения начальную скорость v_0 :

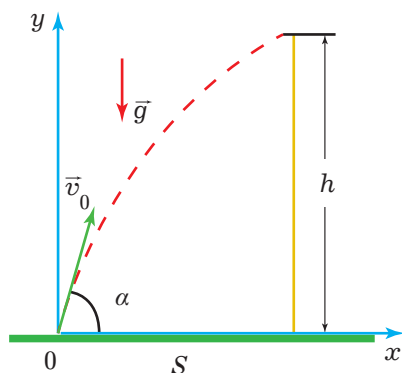


Рис. 1

$$v_0 = \frac{gt}{2 \sin \alpha} + \frac{h}{t \sin \alpha}.$$

Для исследования этого выражения применим свойства функции $f(x) = ax + \frac{b}{x}$. Для суммы двух взаимно обратных функций напомним неравенство Коши:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{gt}{2 \sin \alpha} + \frac{h}{t \sin \alpha} \geq \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{gt}{2 \sin \alpha} \frac{h}{t \sin \alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha}, \\ v_0 &\geq \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда находим минимальную начальную скорость камня:



$$v_{0min} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha},$$

Причём минимум достигается при условии

$$\frac{gt}{2 \sin \alpha} = \frac{h}{t \sin \alpha}.$$

Из этого условия можно узнать время подъёма камня на высоту h :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Задача 4. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением a вдоль прямолинейного участка пути. На расстоянии l от последнего вагона на перпендикуляре к направлению движения поезда находится пассажир. С какой минимальной скоростью должен бежать пассажир, чтобы догнать поезд? В каком направлении он должен бежать в этом случае? Движение пассажира считать равномерным.

Решение. Пусть встреча пассажира с последним вагоном произошла в точке B (рис. 2). Треугольник ABC прямоугольный. Тогда, используя теорему Пифагора, можно записать:

$$BC^2 = AB^2 - l^2,$$

$$\text{или } \frac{a^2 t^2}{4} = v_0^2 t^2 - l^2.$$

Отсюда выразим квадрат начальной скорости:

$$v_0^2 = \frac{l^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4}.$$

Для того чтобы скорость v_0 была минимальной, необходимо, чтобы сумма $\frac{l^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4}$ принимала минимальное значение. Используем неравенство Коши для суммы двух взаимно обратных функций:

$$\frac{l^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4} \geq 2 \sqrt{\frac{l^2}{t^2} \frac{a^2 t^2}{4}} = la$$

и получаем

$$v_0 = \sqrt{la}.$$

Обратим внимание на то, что минимальная скорость достигается при условии

$$\frac{l^2}{t^2} = \frac{a^2 t^2}{4}, \text{ или } l = \frac{at^2}{2}.$$

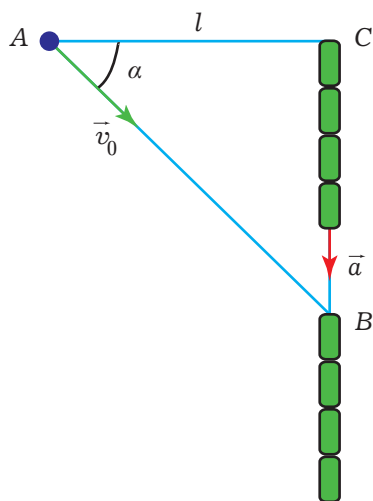


Рис. 2

Значит, $CB = l$, т. е. треугольник ACB – равнобедренный и $\alpha = 45^\circ$.

Получили, что пассажиру следует бежать под углом 45° к AC со скоростью $v_0 = \sqrt{la}$.

Задача 5. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замыкают на реостат. При каком сопротивлении реостата на нём будет выделяться максимальная мощность? Чему она равна?

Решение. Мощность, выделяющаяся на реостате, выражается формулой

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R,$$

где R – сопротивление реостата.

Это выражение стремится к нулю как при $R \rightarrow 0$, так и при $R \rightarrow \infty$. Значит, оно должно быть максимально при некотором R . Преобразуем выражение для мощности, разделив на R числитель и знаменатель:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R + 2r + r^2/R}.$$

Очевидно, чтобы мощность реостата была максимальной, величина знаменателя формулы мощности должна быть минимальной.

Применим неравенство Коши для суммы двух взаимно обратных функций, которую выделим из знаменателя формулы мощности:

$R + r^2/R$. Поскольку

$$R + r^2/R \geq 2r,$$

для достижения минимума выражения $R + 2r + r^2/R$ должно выполняться условие $R + r^2/R = 2r$. Значит, максимум мощности достигается при $R = r$. Максимальная мощность при этом будет равна

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

Литература

1. Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Функция $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ и использование её свойств при решении задач. // Потенциал. – 2013. – №2.
2. Гребень В. Неравенство Коши в задачах по физике. // Квант. – 2010. – №3.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Посейте поступок – пожнёте привычку, посеьте привычку – пожнёте характер, посейте характер – и вы пожнёте судьбу.

У. Теккерей