Физика



Мукушев Базарбек Агзашулы
Доктор педагогических наук, профессор кафедры физики и информатики Семипалатинского государственного педагогического института, обладатель государственного гранта Республики Казахстан «Лучший преподаватель вуза – 2007».

«Энергия связи» в задачах

В статье предлагается обобщение для понятия «энергия связи» при решении задач из различных разделов школьной физики. Общеизвестно, что понятие «энергия связи» в школьной физике используется только при рассмотрении структуры атомного ядра и процессов, происходящих в его недрах. Однако понятие «энергия связи», как одно из трактовок потенциальной энергии, имеет широкое применение для исследования различных по природе систем, состоящих из взаимодействующих (точнее, взаимно притягивающихся) тел или частиц. Сюда относятся всякие физические объекты, где силой взаимодействия является любая сила притяжения: сила тяготения к Солнцу или планете, кулоновская сила в атомах, ван-дер-ваальсовые силы в реальных газах, силы взаимодействия между атомами и молекулами в кристаллах, сила поверхностного натяжения в жидкостях и т. д.

Статья предназначена для учащихся классов с физико-математическим профилем.

Введение

Энергия связи – одно из удивительных универсальных понятий, связывающее воедино физические взаимодействия. Отличительным свойством энергии связи системы является её отрицательность.

Отрицательность энергии тела означает, что оно находится в связанном состоянии с другим телом или телами. Чтобы «освободить» это тело от притяжения других тел, ему необходимо добавить некоторую энергию с тем, чтобы энергия тела увеличилась до нулевого уровня! Частицы, находящиеся в «плену» других частиц, тоже имеют отрицательную энергию.

Принцип минимальной потенциальной энергии, широко применяющийся при исследовании устойчивости природных систем, напрямую связан с понятием энергии связи. Этот принцип гласит, что система будет находиться в устойчивом состоянии до тех пор, пока её потенциальная энергия будет иметь минимальное значение по сравнению с другими возможными положениями системы. Для этого случая говорят, что тело или частица находится на дне потенциальной ямы с глубиной в

энергию связи. Следовательно, максимальная потенциальная энергия тела (или частицы) равна нулю, и это соответствует телам (или частицам), удалённым на бесконечно большое расстояние от других тел (частиц), когда они не тяготеют друг к другу, то есть тело или частица вырвались из потенциальной «ямы». Иногда потенциальная яма носит название потенциального «ящика», когда зависимость потенциальной энергии системы от расстояния не известна.

Теперь перейдём к разбору конкретных примеров в виде задач из различных разделов физики, посвящённых системе связанных тел или частиц, при решении которых следует использовать свойства «энергии связи» и графическую интерпретацию потенциальной ямы.

1. Механика

Пример 1. Найдите потенциальную энергию $U(r)$ тела массой m, находящегося на расстоянии r от центра O Земли массой M ($r \geq R_З$, где $R_З$ – радиус Земли), а также постройте график её зависимости от r.

Решение. Эта энергия будет равна работе силы тяготения, $F = G\dfrac{mM}{r^2}$, направленной к центру Земли, по перемещению тела из точки на расстоянии r от её центра на бесконечность:

$$U(r) = A_\infty = -\int_r^\infty F dr = -\int_r^\infty G\frac{mM}{r^2}dr = -\frac{GmM}{r}.$$

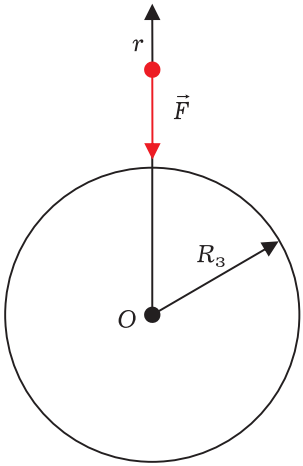


Рис. 1

Знак минус перед интегралом взят потому, что векторы силы тяготения $\vec{F}$ и перемещения $\Delta\vec{r}$ противоположны.

Очевидно, потенциальная энергия тела на поверхности Земли

$$U(R_З) = -\frac{GmM}{R_З}.$$

Последнее выражение есть энергия связи системы «Земля – тело». Отрицательный знак означает, что тело находится в потенциальной яме (рис. 2). Чтобы тело покинуло Землю, нужно совершить работу внешней силой, равную глубине ямы, т. е. $A = \dfrac{GmM}{R_З}$.

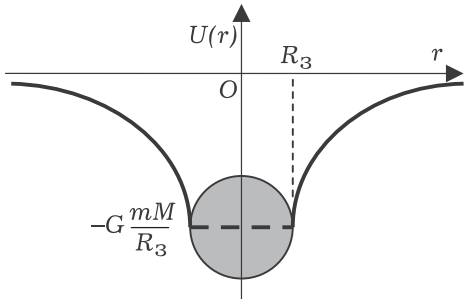


Рис. 2

Пример 2. Какую наименьшую работу надо затратить, чтобы доставить космический корабль массой m с поверхности Земли

а) на Луну,

б) на поверхность Венеры?

Нарисовать график потенциальной энергии корабля относительно Земли и Луны.

Решение. Сначала найдём ту точку, где уравновешиваются силы притяжения Земли и Луны. Поскольку Луна уступает Земле по массе в 81 раз, то точка «пересадки» из сферы притяжения к Луне во владения Земли в 9 раз ближе к Луне, чем к Земле. Значит, точка «пересадки» от Земли находится на расстоянии $384000 \cdot 0{,}9 = 345600$ км $\approx$ $\approx 54\ R_З$, а от Луны 38400 км $\approx 22\ R_Л$. Энергии связи систем «корабль – Земля» и «корабль – Луна» для этой точки можно считать равными нулю, так как

$$GmM_З / 54\ R_З \ll GmM_З / R_З,$$
$$GmM_Л / 22\ R_Л \ll GmM_Л / R_Л.$$

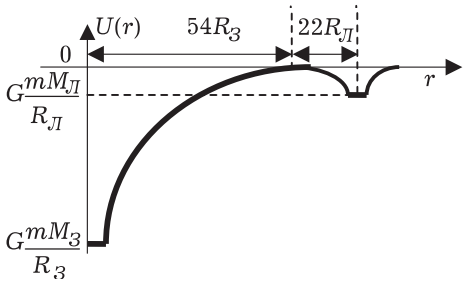


Рис. 3

Построим потенциальные ямы для Земли и Луны (рис. 3). Глубины ям равны значениям абсолютных величин энергий связи корабля на поверхностях Земли ($GmM_З/R_З$) и Луны ($GmM_Л/R_Л$). С энергетической точки зрения совершить космический полёт с Земли на Луну (или на другую планету) – это значит «выпрыгнуть» со дна потенциальной ямы поля тяготения Земли и «свалиться» на дно потенциальной ямы Луны. Для совершения первого этапа кораблю нужно сообщить вторую космическую скорость (или кинетическую энергию, равную $GmM_З/R_З$). По отношению к Луне этот корабль считается как «пришелец» из космоса, и его скорость для Луны – это по крайней мере параболическая скорость, то есть вторая космическая скорость для естественного спутника Земли. Для того чтобы совершить «мягкую» посадку на поверхность Луны, её нужно погасить. Для гашения скорости (это делается тормозным двигателем) нужна такая же по величине работа, как и для сообщения такой же скорости, т. е. $GmM_Л/R_Л$. Следовательно,

$$A = Gm(M_З/R_З + M_Л/R_Л).$$

При путешествии по маршруту Земля – Луна – Земля затрата энергии в два с лишним раза больше, чем для того, чтобы направить корабль со второй космической скоростью с Земли на Луну (мы учитывали здесь $M_З / R_З \gg M_Л / R_Л$).

Чтобы доставить корабль на поверхность Венеры, требуется работа, равная

$$A = Gm(M_З/R_З + M_В/R_В).$$

Поскольку $M_З/R_З \approx M_В/R_В$, вторая космическая скорость для Венеры такая же, как и для Земли. Путешествие Земля – Венера – Земля с посадкой требует, по крайней мере, в 4 раза больше энергии, чем «стрельба» по Венере с Земли. Это осложняет космическое путешествие людей, не говоря уже об обеспечении безопасности их жизни.

2. Электростатика

Пример 3. Вычислите энергию ионизации атома водорода в единицах эВ.

Решение. Сила притяжения между электроном и ядром равна $F = k\dfrac{e^2}{r^2}$, соответственно потенциальная энергия взаимодействия этих частиц $U = -\kappa e^2/r$. Полная энергия

электрона $E = mv^2/2 - ke^2/r$, m – масса электрона. С другой стороны, $mv^2/r = -ke^2/r^2$, следовательно, $E = E_{св} = -ke^2/2r$. Это выражение есть энергия связи системы «электрон – ядро» в атоме водорода. При $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м

$$E_{св} = -9 \cdot 10^9 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 / 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-10} \approx$$
$$\approx -2{,}3 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)} \approx -13{,}6 \text{ (эВ)}.$$

Данное численное значение энергии называется энергией ионизации водорода, то есть чтобы получить ион водорода, нужно затратить энергию, равную 13,6 эВ.

Пример 4. Вычислить согласно модели Томсона энергию связи (ионизации) атома водорода, если известно, что радиус атома водорода равен $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Примечание. Воспользоваться формулой распределения потенциала для однородного заряженного шарика в интервале $0 \le r \le R$: $\varphi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$. Здесь $\rho = \frac{q}{4\pi r^3/3}$ – плотность заряда шарика.



Решение. По Томсону модель атома водорода представляет собой шарик с положительным зарядом, равномерно распределённым по объёму. А отрицательно заряженный электрон находится в центре этого шарика. Здесь $\rho = \frac{e}{4\pi r^3/3}$ – плотность заряда атома водорода по Томсону. Тогда получим

$$\varphi(r) = \frac{e}{8\pi R^3 \varepsilon_0}(3R^2 - r^2) = \frac{ke}{2R^3} \cdot (3R^2 - r^2),$$

где $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k$. Потенциальная энергия электрона

$$U(r) = -\varphi(r)e = -\frac{ke^2}{2R^3} \cdot (3R^2 - r^2),$$

здесь $0 \le r \le R$.

Нарисуем потенциальную яму для электрона в атоме водорода по Томсону (рис. 4).

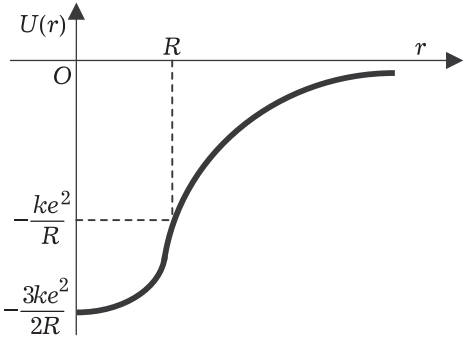


Рис. 4

$U(R) = -\frac{ke^2}{R}$ – потенциальная энергия электрона для случая, когда он расположен на поверхности атома.

$U(0) = -\frac{3ke^2}{2R}$ – энергия связи электрона, когда он находится в центре атома (лежит на дне потенциальной ямы). Чтобы вывести электрон в бесконечность, нужно затратить работу, равную энергии связи электрона по модулю:

$$A = |E_{св}| = |U(0)| = \frac{3ke^2}{2R} \approx$$

$\approx 69{,}12\cdot10^{-19}$ Дж $\approx 43{,}2$ эВ.

Заметим, что полученное нами значение достаточно далеко от действительного значения энергии ионизации (смотрите пример 3). Это лишний раз свидетельствует о несостоятельности томсоновской модели атома водорода.

3. Жидкости

Молекулы жидкости, находящиеся в поверхностном слое, обладают избытком энергии по сравнению с молекулами, находящимися внутри жидкости. Пояснение этого заключается в том, что каждая молекула на поверхности жидкости окружена шестью себе подобными молекулами. Значит, её потенциальная энергия (энергия связи) $U_{\text{пов}}\approx 6u_0$, а внутри жидкости такая же молекула окружена 12 молекулами. Энергия её связи $U_{\text{ж}}\approx 12u_0$. Поскольку $u_0<0$, то $U_{\text{пов}}>U_{\text{ж}}$ (рис. 5).

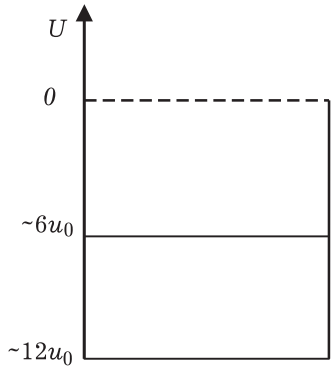


Рис. 5

Для того чтобы вывести молекулу жидкости изнутри на её свободную поверхность, надо затратить работу $A = U_{\text{пов}} - U_{\text{ж}} = -6u_0 > 0$. Следовательно, молекула, находящаяся в поверхностном слое, имеет избыток энергии по сравнению с глубинной молекулой, равный $6u_0$. Пусть на единице поверхности жидкости содержится n молекул. Поверхностный слой площадью S будет обладать избытком энергии (или свободной энергией):

$$W_{\text{пов}}=6nS\left|u_0\right|.$$

Избыток энергии, приходящейся на единицу площади поверхности жидкости, называется коэффициентом поверхностного натяжения:

$$\sigma = W_{\text{пов}}/S = 6n\left|u_0\right|.$$

Итак, жидкость и её поверхность находятся в потенциальной яме, вернее потенциальном ящике, а молекулы, из которых состоят жидкость и её поверхностный слой, взаимно притягиваются.

Пример 5. Вычислить приращение свободной энергии поверхностного слоя при изотермическом слиянии двух одинаковых капель ртути, каждая радиусом $r = 0{,}8$ мм.

Решение. Обе капли обладают свободной энергией $2W_{\text{пов}} = 2\sigma 4\pi r^2$. После слияния образовавшаяся капля имеет $W'_{\text{пов}} = \sigma\cdot 4\pi R^2$.

$$\Delta W = \left|2W_{\text{пов}}\right| - \left|W'_{\text{пов}}\right| = 4\pi\sigma(2r^2 - R^2).$$

Если v и V – объёмы капель до и после слияния, то $V = 2v$, или $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$. Отсюда $R = r\sqrt[3]{2}$.

Подставляя, получим $\Delta W = 4\pi\sigma r^2 \times \times\left(2-\sqrt[3]{4}\right)>0$, значит, энергия выделяется, $\Delta W \approx 1{,}64\cdot10^{-6}$ Дж.

4. Ядро атома

Стабильность атомного ядра характеризуется так называемой энергией связи ядра, которая равна работе, необходимой для полного

расщепления ядра на составляющие его нуклоны без сообщения им кинетической энергии. Для глубокого понимания школьниками сути этого важного понятия из раздела ядерной физики было опубликовано немало работ в различных изданиях [1–4].

Для расчёта энергии связи ядра необходимо, казалось бы, точно знать, как силы притяжения между нуклонами (ядерные силы) зависят от расстояния между ними (вспомним теоретическое вычисление энергии связи электрона в атоме). Однако эта зависимость пока неизвестна. Оказалось, энергию связи можно определить, лишь применяя соотношение Эйнштейна между массой и энергией:

$$E = mc^2.$$

С помощью современных методов измерения атомных масс было установлено, что масса покоя ядра ($M_я$) всегда меньше суммы масс покоя слагающих его протонов и нейтронов:

$$M_я < Zm_p + Nm_n,$$

где Z, N – число протонов и нейтронов, m_p, m_n – массы покоя протона и нейтрона.

Разность масс комплектующих ядро частиц и массы ядра в виде:

$$Zm_p + Nm_n - M_я = \Delta m$$

носит называние дефекта масс. Согласно формуле Эйнштейна напишем выражение энергии связи ядра:

$$|E_{св}| = \Delta mc^2.$$

При образовании ядра из частиц последние за счёт ядерных сил на малых расстояниях устремляются с огромным ускорением (соответственно с большой скоростью) друг к другу. При этом излучаются гамма-кванты, которые обладают энергией $|E_{св}|$, либо образуются новые частицы со значительной кинетической энергией. Разумеется, энергия связи ядра имеет отрицательный знак: $E_{св} < 0$. Поскольку атомное ядро находится в устойчивом состоянии, оно лежит на дне потенциального ящика глубиной, равной энергии связи ядра. Из элементов только водород не имеет энергии связи ядра, а энергией связи электрона с протоном можно пренебречь, поскольку эта величина (13,6 эВ) в 162 000 раз меньше энергии связи ядра, например дейтрона (2,2 МэВ). На рисунке 6 приведён качественный график (потенциальный ящик) зависимости энергии связи ядра от расстояния r от центра ядра.

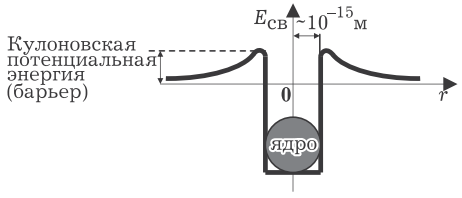


Рис. 6

В физике важную роль играет не полная энергия связи ядра, а удельная энергия связи, т. е. энергия связи, приходящаяся на один нуклон ($E_{св}/A$). Поскольку удельная энергия связи – отрицательная величина, нами представлен перевёрнутый график зависимости удельной энергии связи элементов от их массового числа (рис. 7), что имеет бóльшую наглядность в учебном процессе, нежели использование традиционного графика, имеющего исследовательский характер [5].

Максимальную удельную энергию связи (8,6 Мэв/нуклон) имеют элементы с массовыми числами от 50 до 60, то есть никель и близкие к нему по порядковому номеру элементы. Ядра этих элементов наиболее устойчивы. У тяжёлых ядер удельная энергия связи уменьшается за счёт растущей с увеличением Z (числа протонов) кулоновской энергии отталкивания протонов. Таким образом, они находятся в менее

устойчивом состоянии по сравнению с элементами группы никеля. Следует учесть, что ядро каждого элемента тоже находится в потенциальной яме или потенциальном ящике. С другой стороны, график зависимости удельной энергии связи от массового числа элементов напоминает своеобразную потенциальную яму, которая наглядно прогнозирует будущее тяжёлых радиоактивных элементов.

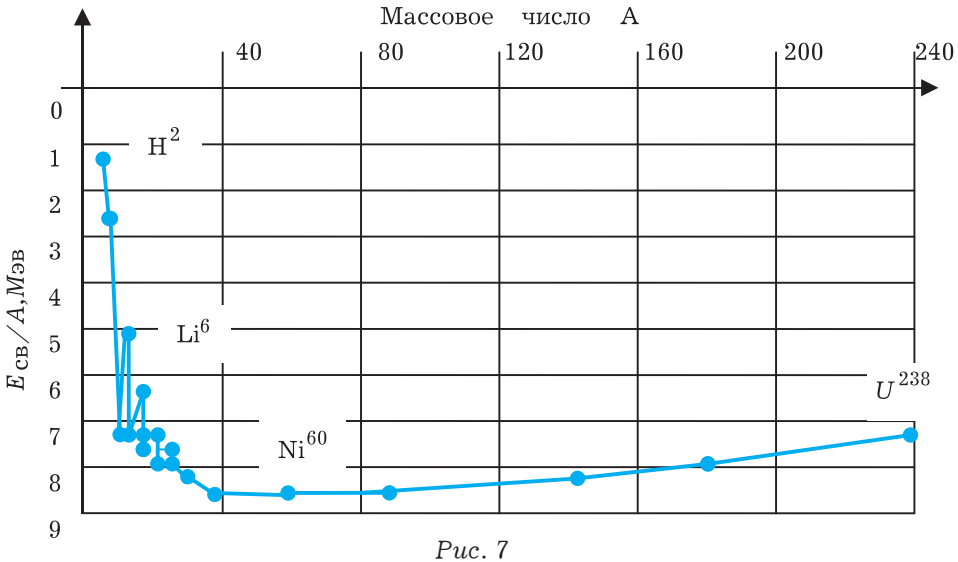


Рис. 7

Пример 6. Найти энергию связи нейтрона в ядре $^{17}_{8}O$.

Решение. Энергия связи нейтрона, находящего в ядре, есть та энергия, которую надо затратить, чтобы отделить нейтрон от ядра без сообщения ему кинетической энергии, то есть вырвать его из потенциального ящика, приведённого на рисунке 6. Если отделить нейтрон от ядра, то останется ядро $^{16}_{8}O$. Следовательно, напишем выражение затраченной энергии в виде:

$$|E_{св}| = [(m(^{16}_{8}O) + m_n) - m(^{17}_{8}O)]\cdot c^2,$$

где $m(^{16}_{8}O)$, $m(^{17}_{8}O)$ и m_n – соответственно массы покоя ядер кислорода и нейтрона. Используя табличные данные, находим:

$$|E_{св}| = 931\cdot[(15{,}99491 + 1{,}00867) - 16{,}99913] = 4{,}14 \text{ (МэВ)}.$$

Пример 7. Протоны с кинетической энергией E_p = 1,0 МэВ бомбардируют литиевую мишень, в результате чего наблюдается ядерная реакция

$$p + {}^{7}_{3}Li \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He.$$

Найти кинетическую энергию каждой α-частицы и угол между направлениями их разлёта, если разлёт происходит симметрично по отношению к направлению налетающего протона.

Решение. Напишем закон сохранения энергии для этой ядерной реакции: $E_p + W = 2E_\alpha$. Здесь W – энергия ядерной реакции, что численно равна величине высвобождающейся части энергии связи взаимодействующих ядер. Итак, $E_\alpha = (E_p + W)/2$; m_p = 1,00783; m_α = 4,00260; m_{Li} = 7,01601.

$$W = c^2\cdot[(m_p + m_{Li}) - 2m_\alpha] =$$



$= 931 \cdot (1{,}00783 + 7{,}01601 - 8{,}00520) =$
$= 17{,}354$ МэВ.

$E_\alpha = 9{,}1$ МэВ. Из закона сохранения импульса напишем (рис. 8):

$$P_p = 2P_\alpha \cos(\vartheta/2).$$

Отсюда $\cos(\vartheta/2) = \dfrac{P_p}{2P_\alpha}$. Поскольку $m_p c^2 >> E_p$ (значит, протон рассматривается как нерелятивистская частица), будем пользоваться формулой $P = \sqrt{2mE_{кин}}$:

$$\cos(\vartheta/2) = \frac{\sqrt{2m_p E_p}}{2\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}.$$

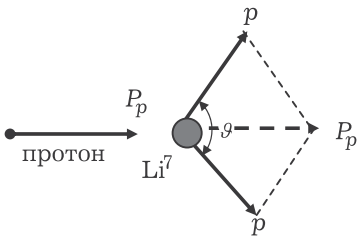


Рис. 8

Таким образом, $\cos(\vartheta/2) = 0{,}083$; $\vartheta = 170°30'$.

Литература

1. *Варламов А.* Капельная модель ядра//Квант. – 1986. – №4.
2. *Самарский Ю.* Ядерная физика в задачах//Квант. – 1995. – №5.
3. *Воронов Г.С.* Штурм термоядерной крепости. – М.: Наука. – 1985. – Библиотечка «Квант». – Выпуск 37.
4. *Рыбаков А.* Что такое энергия связи нуклона в ядре? // Газета «1 сентября» «Физика». – №9.
5. *Мякишев Г.Я., Синяков А.З.* Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учеб. Для углублённого изучения физики. – М.: Дрофа, 2002.

Блиц-ответы Блиц-ответы Блиц-ответы Блиц-ответы

– Какой прибор измеряет давление?
– Термометр.
– А температуру?
– Градусник.

***

– Зачем ты изобретаешь вечный двигатель, если давно известно, что это невозможно?
– Чтобы узнать, как его остановить.

***

– Как читается закон Ома?
– Не очень громко, медленно и с выражением.