



Ромашкевич Александр Иосифович

Старший преподаватель кафедры общей физики МИЭТ.

Давайте постреляем

Зачастую школьник, добравшись до ответа после решения задачи, откладывает её в сторону и не утруждает себя анализом результата. В этой статье на примере задачи «Бросок по мишени» автор показывает, насколько полезен такой анализ и как он может иногда подсказать алгоритм решения другой, может быть, более сложной задачи.

Задача 1. Из окопа (с поверхности Земли) юный воин старается попасть из рогатки в мишень, находящуюся на расстоянии S от окопа на высоте H . Начальная скорость снаряда (камешка) v_0 . Под каким углом к горизонту вылетел камень, если он попал в цель?

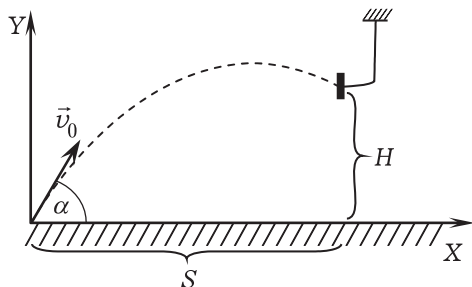


Рис. 1

Решение. По умолчанию пренебрегаем сопротивлением воздуха, чтобы воспользоваться уже хорошо знакомыми уравнениями движения:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

Избавляясь от времени, переходим к уравнению траектории:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

До сих пор всё было просто. Но что делать дальше? Как искать α ?

Прделаем некоторые преобразования:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1,$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1).$$

Подставляя в уравнение координаты мишени $x = S$, $y = H$, приходим к квадратному уравнению для $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\left(\frac{gS^2}{2v_0^2}\right) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - S \cdot \operatorname{tg} \alpha + \left(\frac{gS^2}{2v_0^2} + H\right) = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{S2v_0^2}{gS^2} \operatorname{tg} \alpha + \left(1 + \frac{H2v_0^2}{gS^2}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{1,2} &= \frac{v_0^2}{gS} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 S^2} - \frac{g^2 S^2 + gH2v_0^2}{g^2 S^2}} = \\ &= \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2 S^2 - 2gHv_0^2}}{gS}. \end{aligned}$$

А теперь попробуем осмыслить полученный результат.

Дискриминант и, соответственно, подкоренное выражение могут оказаться меньше нуля:

$$v_0^4 - g^2 S^2 - 2gHv_0^2 < 0.$$

Физический смысл этого выражения ясен: точка с координатами $(S; H)$, удовлетворяющими этому неравенству, недоступна для «снаряда» с начальной скоростью v_0 , под каким бы углом его ни выпускали. Соответственно, любая точка координатной плоскости XOY , удовлетворяющая этому неравенству, будет недоступна для «снаряда»:

$$v_0^4 - g^2 x^2 - 2g y v_0^2 < 0.$$

Дискриминант может оказаться больше нуля:

$$v_0^4 - g^2 S^2 - 2gHv_0^2 > 0.$$

В этом случае в цель можно попасть по двум разным траекториям, определяемым двумя разными углами прицеливания α_1 и α_2 . Траекторию с большим углом прицеливания для удобства назовём «навесной», а с меньшим – «настильной». Справедливости ради уточним – в артиллерии навесной и настильной называются две траектории с одинаковой дальностью полёта снаряда.

Для нас важно, что все точки координатной плоскости XOY , координаты которых удовлетворяют условию

$$v_0^4 - g^2 x^2 - 2g y v_0^2 > 0,$$

достижимы для «снаряда», т.е. определяют «зону поражения». Пример: точка N на рисунке 2.

И, наконец, дискриминант может оказаться равным нулю. Это геометрическое место точек $(S; H)$, достигаемое «снарядом» единственным способом (настильная и навесная траектории сливаются). Иными словами, уравнение

$$v_0^4 - g^2 S^2 - 2gHv_0^2 = 0$$

определяет границу «зоны поражения». Заменяя координаты конкретной мишени $(S; H)$ на (x, y) , приходим к уравнению кривой, ограничивающей «зону поражения»:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Это парабола с ветвями вниз, вершина которой лежит на оси Y :

$$y_0 = \frac{v_0^4}{2gv_0^2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

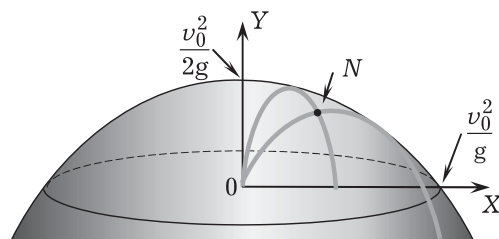


Рис. 2

На рисунке 2 представлена «зона поражения». Это параболоид, главное сечение которого описывается параболой границы.

Теперь мы можем объяснить, почему всё время упорно брали в кавычки слово «снаряд». Казалось бы

проще рассмотреть разрыв гранаты на земле, и никаких кавычек.

Обратимся к справочным данным.

Начальная скорость осколков гранаты Ф1 (в обиходе «лимонка»)

$$v_0 \approx 730 \text{ м/с.}$$

Максимальная дальность разлёта осколков гранаты по нашей математике

$$L = \frac{v_0^2}{g} \approx \frac{730 \cdot 730}{10} \approx 5,3 \cdot 10^4 (\text{м}) = 53 (\text{км})!$$

Совершенно нереальная цифра. По справочным данным $L \approx 200 \text{ м}$.

Понятно, насколько сильно влияет сопротивление воздуха (вязкой среды).

Наши расчёты для тела, брошенного под углом к горизонту, пренебрегают силой сопротивления воздуха. А это проходит (с приличной точностью) для камешка из рогатки, броска мячика или спортивного ядра и т.д. То есть для малых скоростей макрообъектов.

Правда, не так давно, в конце прошлого века, нашлись объекты микромира, в определённой степени подчиняющиеся ньютоновской механике. Это «ультрахолодные» нейтроны в вакууме.

Поясним происхождение этого термина. Ультрахолодными называют нейтроны с энергиями $E \leq 10^{-7} \text{ эВ}$. Термодинамическая температура молекул газа с такой энергией $E \approx kT$ равна

$$10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Т,}$$

$$T \approx 10^{-3} \text{ К.}$$

Очень близко к абсолютному нулю. По аналогии с газами и возник этот термин.

Согласно классической механике скорость такого нейтрона можно оценить по формуле

$$E = \frac{mv^2}{2}, \text{ или}$$

$$10^{-7} (\text{эВ}) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} (\text{Дж/эВ}) \approx \frac{1,67 \cdot 10^{-27} (\text{кг}) v^2 (\text{м}^2/\text{с}^2)}{2};$$

$$v = 4,3 \text{ м/с} \rightarrow v \leq 5 \text{ м/с.}$$

С такой скоростью объект должен по Ньютону заметно взаимодействовать с гравитационным полем. В частности, может взлететь на высоту до

$$h = \frac{v^2}{2g} \approx \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 10} \approx 1,25 \text{ м.}$$

А если ещё добавить свойство упруго отскакивать от твёрдой стенки, то получается мячик в поле тяжести. Это странное свойство для нейтральной частицы, легко проскальзывающей в междерное пространство стенки (электронный «туман» нейтрону не помеха), в первом приближении можно объяснить так. Если размер частицы трактовать как длину волны де Бройля, то для ультрахолодного нейтрона

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5} \approx 0,8 \cdot 10^{-7} (\text{м}) = 800 \text{ А.}$$

На такой дистанции укладываются несколько сотен ядер стенки. Преодолеть отталкивание такого коллектива нейтрону трудно, и он упруго отскакивает.

Сказанное означает, что ультрахолодные нейтроны можно хранить в вакуумированной кастрюле метровых габаритов достаточно долго, порядка времени жизни нейтрона ($\approx 14,6 \text{ с}$). В действительности всё, конечно, сложнее.

Хотя эффект экспериментально подтверждён.

Но вернёмся из микромира на баскетбольную площадку.

Задача 2. Баскетболист выполняет штрафной бросок. При какой минимальной скорости мяча бросок будет удачным, если он его производит способом «от щита»? Под каким углом к горизонту при этом баскетболист делает бросок? Все необходимые размеры приведены на рисунках 3 и 4.

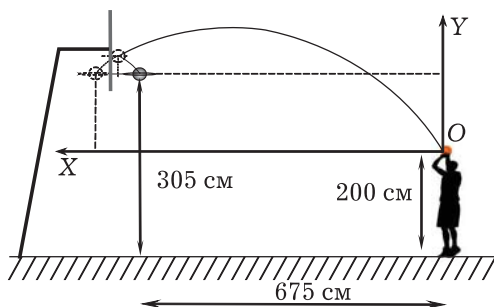


Рис. 3

Решение. На рис. 4 изображена схема упругого отскока мяча от щита. Из рисунка понятно, что центр мяча должен быть прицелен в точку А, которая является зеркальным отражением центра кольца относительно вертикали OO' . Расстояние от центра кольца до точки А

$$(35 - 12) \cdot 2 = 56 \text{ (см)}.$$

Определяем координаты мишени в системе XOY (рис. 3):

$$x_0 = 675 + 56 = 731 \text{ (см)},$$

$$y_0 = 305 - 200 = 105 \text{ (см)}.$$

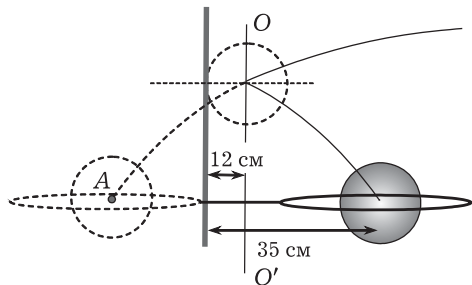


Рис. 4

Теперь пора заняться физикой. Поскольку речь идёт о минимальной скорости, при которой центр мяча попадает в точку А, значит, точка А лежит на границе «зоны обстрела», т.е. на параболе

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Собственно, осталось подставить сюда координаты x_0 , y_0 и найти v_0 , что мы и сделаем.

$$v_0^4 - g^2x^2 - 2gy_0v_0^2 = 0,$$

сделаем замену $v_0^2 = u$:

$$u^2 - 2gy_0u - g^2x_0^2 = 0,$$

$$u_{1,2} = gy_0 + \sqrt{(gy_0)^2 + g^2x_0^2} =$$

$$= gy_0 + g\sqrt{y_0^2 + x_0^2} = g(y_0 + R),$$

$$v_0 = \sqrt{g(y_0 + \sqrt{y_0^2 + x_0^2})} = \sqrt{g(y_0 + R)}.$$

Здесь R — модуль радиус-вектора мишени.

Наконец, искомая минимальная скорость мяча

$$v_0 = \sqrt{9,8 \left(1,05 + \sqrt{1,05^2 + 7,31^2} \right)} \approx 9,1 \text{ (м/с)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gS} \approx \frac{9,1^2}{9,8 \cdot 7,31} \approx 1,156; \quad \alpha \approx 49,1^\circ.$$

Бросок сделан под углом $\alpha \approx 49,1^\circ$.

Ответ. $v_0 \approx 9,1 \text{ (м/с)}, \quad \alpha \approx 49,1^\circ$.

Задачи этого типа можно назвать «мишень на границе». Имеется ввиду граница «зоны обстрела». Вот ещё одна задача на эту тему.

Задача 3. С обрывистого берега некто бросает как попало камни в воду. Начальная скорость камней $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Определить область, опасную для заплывания. Камни бросаются с высоты $H = 6 \text{ м}$.

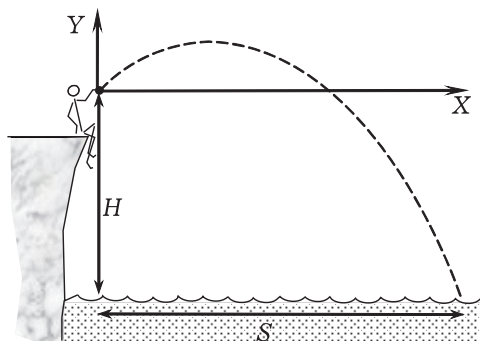


Рис. 5

Решение. Опасная область определяется наибольшей дальностью полёта камня. То есть точка, в которой такой камень «булькается» в воду, лежит на границе «зоны обстрела». И всё становится понятным. Выбираем начало системы координат XY в точке вылета камня и подставляем в уравнение границы координаты мишени $(S; -H)$:

$$v_0^4 - g^2 S^2 + 2gH_0 v_0^2 = 0,$$

откуда и находим S :

$$S = \frac{v_0}{g} \sqrt{(v_0^2 + 2gH)} \approx \frac{25}{10} \sqrt{25^2 + 2 \cdot 10 \cdot 6} \approx 68,2 (\text{м}).$$

Вот, собственно, и всё. Осталось добавить, что при виде сверху опасная зона представляет собой полукруг с радиусом S (рисунок 6).

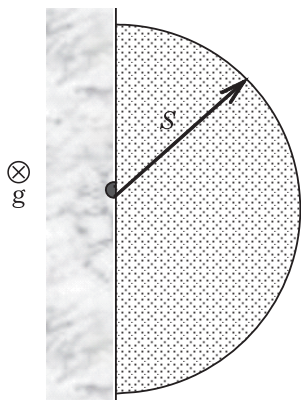


Рис. 6

Если в задаче на тело, брошенное под углом к горизонту, вам встретятся выражения «минимальная скорость» или «максимальная дальность», должно возникнуть подозрение, что речь идёт о границе «зоны обстрела».

Задача 4. В точке с координатами $(S; H)$ находится центр маленькой площадки. Из начала координат (X – горизонтальная ось, Y – вертикальная) вылетает теннисный мяч и попадает в центр площадки. Начальная скорость мяча минимальна для попадания в точку $(S; H)$. Под каким углом к горизонту должна быть установлена площадка, чтобы после абсолютно упругого отскока мячик вернулся в точку вылета? Решить задачу для $S = 12$ м, $H = 5$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

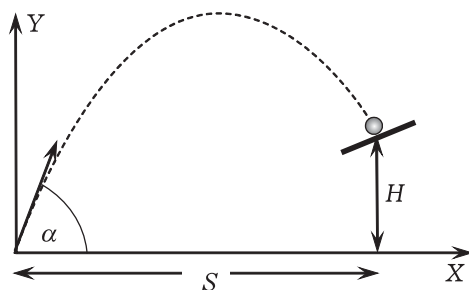


Рис. 7

Решение. Минимальная скорость мяча для цели с заданными координатами означает, что центр площадки находится на границе «зоны обстрела». Значит, начало координат и точку $(S; H)$ соединяет единственная траектория. Отсюда ясно, что мяч после отражения должен полететь точно в обратном направлении, т.е. скорость мяча в момент удара должна быть перпендикулярна площадке. Из рисунка 8 понятно, что если мяч «встречается» с площадкой под углом

β к вертикали, то нормаль $\vec{n}$ (а с ней и площадку) надо повернуть на угол β против часовой стрелки. Итак, наша площадка должна быть наклонена под углом β к горизонту.

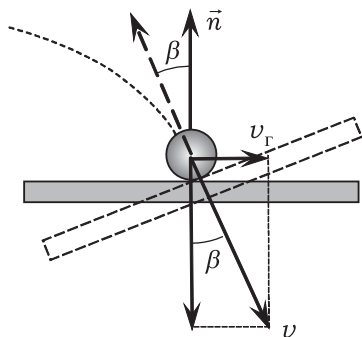


Рис. 8

Скорость v непосредственно перед ударом определяем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgH = \frac{mv^2}{2};$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

Горизонтальная скорость в полёте не меняется:

$$v_r = v_0 \cos \alpha.$$

Находим угол наклона площадки:

$$\sin \beta = \frac{v_r}{v} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gH}}.$$

Теперь надо выразить все величины через параметры мишени.

$$v_0 = \sqrt{g(H+R)}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gS},$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{g(H+R)}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{g(R+H) - 2gH}}.$$

Предоставляем читателю самому проделать алгебраические преобра-

зования (а это очень полезное упражнение) и прийти к ответу:

$$\sin \beta = \frac{(R+H)}{\sqrt{S^2 + (R+H)^2}}.$$

Напоминаем, что R – модуль радиус-вектора мишени: $R = \sqrt{S^2 + H^2}$.

Можно подойти к решению задачи по-другому. Поскольку траектория полёта мяча и пограничная парабола имеют одну общую точку $(S; H)$, у них в этой точке общая касательная. И, следовательно, направление скорости мяча в точке $(S; H)$ можно найти по границе «зоны обстрела»:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2}x.$$

Помня, что производная – это тангенс угла наклона касательной,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{g}{v_0^2}S.$$

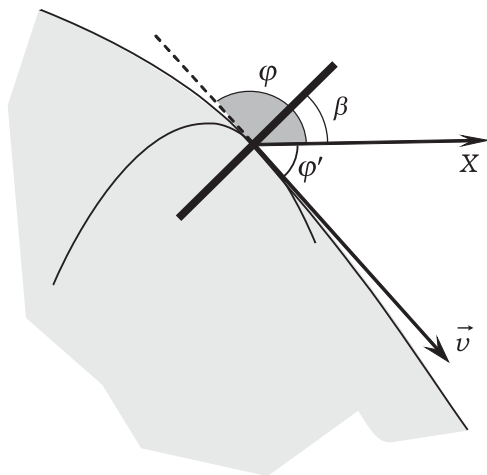


Рис. 9

Теперь, глядя на рисунок 9, легко находим угол наклона площадки к горизонту:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \varphi' = -\operatorname{ctg} \varphi = \frac{v_0^2}{gS} = \frac{(R+H)}{S}.$$

Легко и быстро. Чтобы убрать возможные сомнения, убедимся, что ответы совпадают:

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{R+H}{S \sqrt{1 + \frac{(R+H)^2}{S^2}}} =$$

$$= \frac{R+H}{\sqrt{S^2 + (R+H)^2}}.$$

После этого можно проделать вычисления:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{12^2 + 5^2} + 5}{12} = \frac{3}{2}; \quad \beta \approx 56^\circ.$$

Ответ. $\beta \approx 56^\circ$.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Нет чудес, которые противоречили бы законам Природы. Чудеса противоречат только нашим представлениям об этих законах.

Августин

Не ожидайте, что мир будет выглядеть светлым, если вы не снимаете тёмных очков.

Ч. Эллиот

Когда ты стоишь спиной к солнцу, то видишь только свою тень.

Д. Джебран

Кто хочет что-то сделать, находит возможности, кто не хочет делать — подыскивает причины.

М. Веллер

Не позволяй душе лениться!
Чтоб в ступе воду не толочь,
Душа обязана трудиться
И день, и ночь.

Н. Заболоцкий

Самая тяжёлая и ценная победа — это победа над собой.

Ленивый никогда не победит. Победитель никогда не ленится.

Народная мудрость

Самая длинная дорога начинается с одного шага.

Пословица

Не выйдя в путь, нельзя в пути отстать,
Не выйдя в путь, как можно заблудиться?

Л. Шерали

Величайшая победа есть победа над самим собой.

П. Кальдерони