



Ромашкевич Александр Иосифович

Старший преподаватель кафедры общей физики
Московского государственного института электронной
техники (технического университета)

Автор ряда пособий для школы: «Механика»,
«Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика»,
объединённых в серию «Учимся решать задачи».

Альтернативные алгоритмы решения некоторых задач

В статье рассматриваются решения некоторых задач с помощью альтернативных подходов, что, несомненно, расширит кругозор заинтересованного читателя.

Задача 1. Вдоль кромки вспаханного поля проходит дорога, на которой находится автобусная остановка A . План местности представлен на рис. 1. Сторожка B находится в поле в 100 м (BC) от дороги. Расстояние от точки C до остановки 400 м. Найти минимальное время, за которое человек может добраться от сторожки до автобусной остановки, если по полю он может идти со скоростью

$$v_1 = 4,5 \text{ км/ч},$$

а по дороге может бежать со скоростью

$$v_2 = 9 \text{ км/ч}.$$

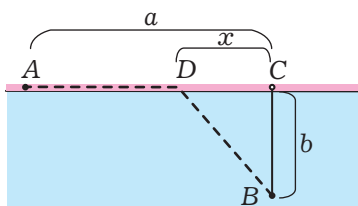


Рис. 1

Решение. Видимо человеку следует бежать «наискосок», в точку D .

Но как выбрать точку D , чтобы сэкономить время? Типичная задача на нахождение минимума функции.

Время движения на участке BD

$$t_1 = \frac{BD}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v_1},$$

время на участке DA

$$t_2 = \frac{a - x}{v_2}.$$

Полное время движения

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v_1} + \frac{a - x}{v_2}.$$

Приравняв $\frac{dT}{dx}$ к нулю, найдём положение точки D :

$$\left(\frac{1}{2v_1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + b^2}} - \frac{1}{v_2} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2v_1} 2x = \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{v_2},$$

$$\frac{x^2}{v_1^2} = \frac{x^2 + b^2}{v_2^2},$$

$$x^2 \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2 v_2^2} \right) = \frac{b^2}{v_2^2}.$$

Учитывая, что по условию

$$v_2 = 2v_1,$$

$$x^2 \frac{3v_1^2}{4v_1^4} = \frac{b^2}{4v_1^2},$$

$$3x^2 = b^2, \quad x = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Подставим это значение x в выражение для полного времени движения и вычислим $T_{\min}$:

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \frac{\sqrt{\frac{b^2}{3} + b^2}}{v_1} + \frac{a - \frac{b}{\sqrt{3}}}{v_2} = \\ &= \frac{4b}{\sqrt{3}v_2} + \frac{\sqrt{3}a - b}{\sqrt{3}v_2} = \frac{1}{v_2} (\sqrt{3}b + a) = \\ &= \frac{1,73 \cdot 100 + 400}{2,5} = 229,2 \text{ с.} \end{aligned}$$

Чисто математически мы не знаем, что мы нашли: минимум или максимум функции. Для этого надо бы ещё посчитать вторую производную. Практический опыт и интуиция подсказывают, что это минимум.

Сама по себе задача на нахождение минимума (или максимума) функции является полезным упражнением, но физики любят простые решения.

Пороемся в своей памяти. Две среды: пахота и асфальт. Две скорости: v_1 и v_2 . Что-то это напоминает...

В оптике мы познакомились с принципом Ферма: *попадая из точки A в точку B, свет выбирает путь, отнимающий наименьшее время.* Следствиями этого принципа являются все законы геометрической оптики, в том числе и закон Снелла. На границе раздела двух оптически прозрачных сред свет преломляется согласно формуле:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

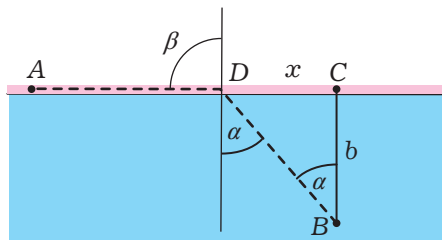


Рис. 2

При выводе формулы свойства света никак не использовались. А значит, она пригодна для движения любого тела, скорость которого меняется при переходе из среды 1 в среду 2.

В нашей задаче α – угол между перпендикуляром к дороге и направлением движения человека по полю, β – угол между перпендикуляром и дорогой (рис. 2).

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$\sin \alpha = \frac{4,5}{9} \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

А теперь можно напрямую считать минимальное время движения:

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \frac{b}{\cos \alpha} \frac{1}{v_1} + \frac{a - b \tan \alpha}{v_2} = \\ &= \frac{100 \cdot 2}{\sqrt{3}} \frac{1}{1,25} + \frac{400 - \frac{100}{\sqrt{3}}}{2,5} = \\ &= 92,3 + 136,9 = 229,2 \text{ с.} \end{aligned}$$

Мы перевели величины скоростей в систему СИ.

Ответ. $T_{\min} = 229,2 \text{ с.}$

Прикладное использование принципа Ферма позволило избежать процесса дифференцирования.

На одной из всероссийских физических олимпиад была предложена следующая задача:

Задача 2. В горизонтальном неподвижном цилиндре, закрытом с обоих концов, находится поршень, масса которого M . Поршень может двигаться в цилиндре без трения.

Равновесное положение поршня находится в середине цилиндра. Между поршнем и торцами цилиндра в плоскости среднего сечения летают в горизонтальном направлении два маленьких шарика, имеющих одинаковую массу m ($m \ll M$). Частота столкновений каждого шарика с поршнем, находящимся в положении равновесия, равна f . Если поршень медленно сместить из положения равновесия на малое расстояние, то он начнёт совершать гармонические колебания. Считая удары абсолютно упругими, определить период колебаний поршня (рис. 3).

Решение. Вообще говоря, поршень стал бы совершать малые гармонические колебания и без шариков за счёт разности давлений воздуха (или другого газа) в двух половинках цилиндра, возникающей при смещении поршня. Это отдельная задача, но в нашем случае по умолчанию предполагается, что воздух в обеих частях цилиндра на движение поршня не влияет. Для тех, кому это не очень понравится, в стенках цилиндра можно сделать дырочки, чтобы давление в половинках цилиндра не менялось. А ещё лучше – откачать воздух из цилиндра, чтобы не беспокоиться о затормаживании шариков в вязкой среде.

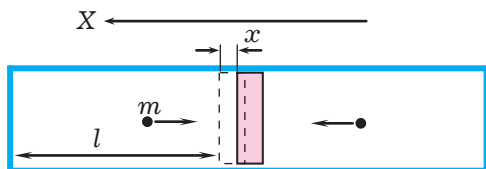


Рис. 3

Кроме того, предполагается, что частота f достаточно велика, и мы пренебрегаем «вздрагиванием» поршня при отдельном ударе. А определение «маленький» шарик для нас означает, что между поршнем и задней стенкой цилиндра он пролетает расстояние l , а не $l - d$. Здесь l – расстояние между порш-

нем и стенкой цилиндра, d – диаметр шарика.

Строгое математическое решение весьма сложно. Надо учесть и постепенное увеличение скорости шариков, и увеличение частоты ударов. Что-то не тянет к такому решению.

Зато если с сказанному добавить абсолютную упругость ударов, то предложенная модель ничем не отличается от модели идеального газа. Правда, частиц маловато (всего одна на половинку цилиндра), да и та великовата и тяжеловата. Но разве это нас остановит?

Будем считать, что читатель уже знает, что при абсолютно упругом, нормальном столкновении лёгкого шарика с массивной стенкой, движущейся навстречу шарiku со скоростью u , величина его скорости возрастает на $2u$. Соответственно, когда шарик догоняет «убегающую» со скоростью u стенку, после столкновения его скорость уменьшается на $2u$.

Воспользуемся моделью процесса «сжатия» левой части цилиндра:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0},$$

где p_1 , V_1 , T_1 – параметры «газа» левой части цилиндра после смещения поршня, p_0 , V_0 , T_0 – параметры левой части при равновесном положении поршня.

Учитывая, что температура идеального газа, состоящего из одинаковых молекул, пропорциональна квадрату скорости, перепишем уравнение в виде:

$$\frac{p_1 S(l-x)}{v_1^2} = \frac{p_0 S l}{v_0^2}.$$

Здесь

$$v_1 = v_0 + \Delta v.$$

Слегка преобразуем уравнение:

$$p_1 = p_0 \frac{(v_0 + \Delta v)^2}{v_0^2} \frac{l}{(l-x)}.$$

Оценим величину Δv .

Поршень переместили очень медленно со скоростью u на очень малое расстояние x . На это ушло время $\frac{x}{u}$. За это время шарик

столкнётся со стенкой $n \approx \frac{x}{u} f$ раз.

Каждый удар добавляет к величине скорости шарика $2u$, поэтому

$$\Delta v \approx \frac{x}{u} f 2u = 2fx = \frac{v_0 x}{l}.$$

Мы учли, что $v_0 = f \cdot 2l$.

Считаем, что частота в процессе смещения поршня меняется незначительно. Далее:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx p_0 \frac{\left(v_0 + v_0 \frac{x}{l}\right)^2}{v_0^2} \frac{l}{l-x} = \\ &= p_0 \frac{\left(1 + \frac{x}{l}\right)^2 l}{l-x} = p_0 \frac{(l+x)^2}{l(l-x)}. \end{aligned}$$

Продолжаем преобразования:

$$\begin{aligned} p_1 &\approx p_0 \frac{(l+x)^2}{l(l-x)} \frac{(l+x)}{(l+x)} = \\ &= p_0 \frac{(l^2 + 2lx + x^2)(l+x)}{l(l^2 - x^2)} \approx \\ &\approx p_0 \frac{(l^2 + 2lx)(l+x)}{l^3} = \\ &= \frac{p_0}{l^3} (l^3 + 3l^2x + 3lx^2) \approx \frac{p_0}{l} (l + 3x). \end{aligned}$$

В этих выкладках мы последовательно убрали члены второго порядка малости (содержащие x^2).

Для давления в правой половине цилиндра после смещения поршня таким же образом легко находим:

$$p_2 \approx \frac{p_0}{l} (l - 3x),$$

Найдём p_0 . Сила, действующая на поршень, равна импульсу, передаваемому поршню за секунду. При

одном абсолютно упругом ударе стенка получает импульс $2mv$ (здесь v – скорость шарика). Поэтому при равновесном положении поршня

$$p_0 = \frac{F}{S} = \frac{2mv_0 \cdot f}{S} = \frac{2mf \cdot 2lf}{S} = \frac{4mf^2 l}{S}.$$

Теперь можно записать уравнение движения поршня в проекции на ось X :

$$-p_1 S + p_2 S = M\ddot{x}.$$

Подставляя найденные значения p_1 , p_2 , и p_0 , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{4mf^2 l}{S} \frac{S}{l} (-l - 3x + l - 3x) &= M\ddot{x}, \\ -24mf^2 x &= M\ddot{x}, \\ \ddot{x} + \frac{24m}{M} f^2 x &= 0, \end{aligned}$$

Вот мы и добрались до уравнения гармонических колебаний, где циклическая частота

$$\omega = 2\sqrt{6}f \sqrt{\frac{m}{M}},$$

а период

$$T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}f} \sqrt{\frac{M}{m}},$$

$$\text{Ответ. } T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}f} \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

А вот исторический пример.

Со времён Возрождения в геометрии Евклида существовала красивая задача.

Задача 3. Найти в площади произвольного треугольника ABC точку O (рис. 4), обладающую следующим свойством: сумма расстояний от неё до вершин треугольника

$$L = OA + OB + OC$$

минимальна.

Решением этой задачи занимались выдающиеся умы. Среди них Торричелли и Ферма. Чем же она интересна? Представим себе три населённых пункта, для которых необходимо построить связывающую их систему дорог. Объявлен конкурс проектов. Победит тот, чья стоимость

будет минимальна, или, что то же самое, минимальной должна быть суммарная протяжённость дорог.

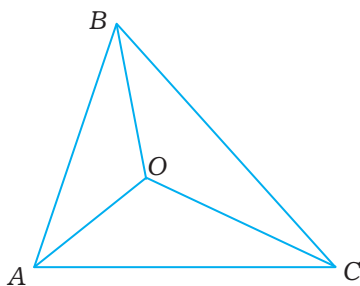


Рис. 4

Разумеется, математики нашли сложное и красивое решение задачи. Академическое, с помощью циркуля и линейки.

Но на их беду как-то мимо проходил физик (теперь уже и фамилию не вспомнишь) и случайно узнал про задачу. Он немного подумал и решил задачу в уме. С помощью «мысленного эксперимента». Вот ход его рассуждений.

Нарисуем треугольник на картонке, расположим её горизонтально, а в вершинах треугольника сделаем дырочки. Затем возьмём три нити, свяжем три конца в узел, а свободные концы пропустим в дырочки. К концам нитей прикрепим три *одинаковых* груза mg . Разумеется, считаем, что нити могут в дырочках и по плоскости скользить без трения. Передохнём и посмотрим, что у нас получилось (рис. 5).

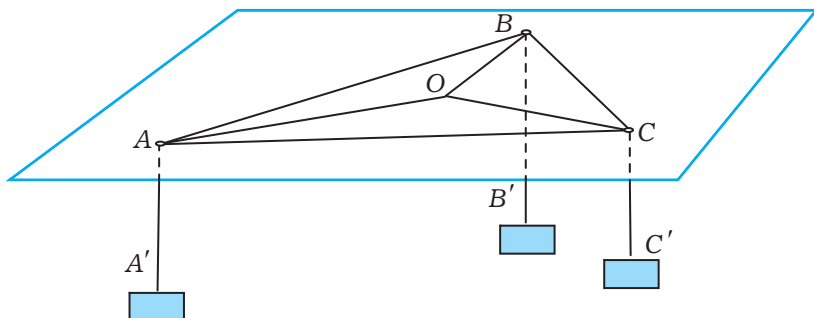


Рис. 5

Любая механическая система стремится занять в поле тяжести Земли положение с минимальной потенциальной энергией. Будем считать потенциальную энергию груза на уровне картонки нулевой, тогда потенциальная энергия системы трёх грузов в положении равновесия

$$E_{\text{п}} = -mg \cdot AA' - mg \cdot BB' - mg \cdot CC' = -mg(AA' + BB' + CC').$$

Минимальность потенциальной энергии означает, что стоящая в скобках сумма свисающих частей нитей максимальна. А значит, сумма оставшихся на картонке частей нити ($OA + OB + OC$) минимальна. То есть узел «O» как раз расположился в искомой точке.

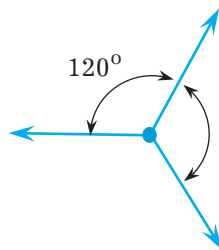


Рис. 6

Но это не всё. Поскольку натяжение всех нитей одинаково $T_{1,2,3} = mg$, значит, на узел действуют три одинаковые силы, а сам узел находится в равновесии. Ясно, что равновесие узла возможно только если силы расположены «звездой», т. е. угол

между линиями действия соседних сил равен 120° (рис. 6).

Остальное просто. Строим на любой стороне треугольника сегмент, вмещающий угол 120° . То же самое делаем на второй стороне. И точка пересечения дуг будет искомой (рис. 7).

Она носит название точки Ферма. Задача послужила началом целой области математики. Назовём её теорией сетей. В общем случае задача формулируется так: N произвольно расположенных пунктов надо связать оптимальной (в смысле протяжённости) сетью дорог.

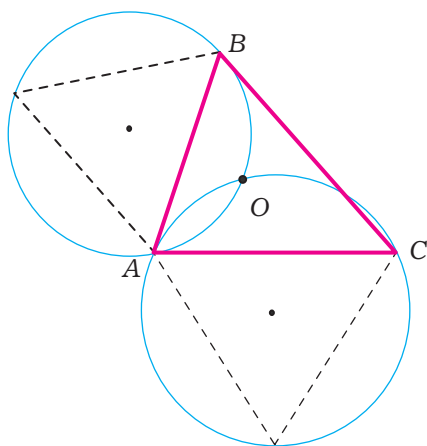


Рис. 7

Даже при рассмотрении простейшего случая (четыре пункта расположены в вершинах квадрата) эта задача не так проста. Казалось бы оптимальная протяжённость дорог — просто диагонали квадрата (рис. 8 а). Ан нет! Сеть дорог с двумя узлами оказывается короче (рис. 8 б).

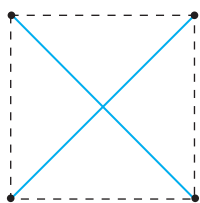


Рис. 8 а

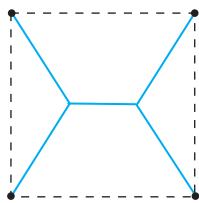


Рис. 8 б

При желании читатель может легко решить эту задачу и найти положение узлов. Но это не наша епархия, и оставим задачу математикам.

В связи со сказанным позволю себе привести ещё одну задачу.

Задача 4. К двум вбитым на одном уровне гвоздям подвесили цепочку. Потом вместо цепочки к тем же гвоздям подвесили два стержня такой же длины, скреплённые свободными концами. Оба варианта для сравнения изображены на рисунке 9. У какой из двух систем центр тяжести ниже?

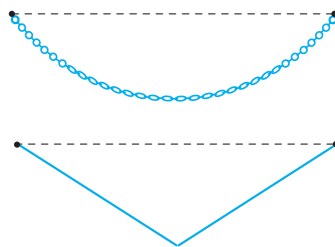


Рис. 9

Решение. Центр тяжести у цепочки ниже, потому что это цепочка. И всё.

Читатель уже понял, в чём дело. Если нет, поясним.

Цепочка имеет право «сама выбирать», как ей повиснуть. И сколько бы раз мы ни цепляли её к этим гвоздям, она всегда принимает одну и ту же форму. Форму с *наименьшей потенциальной энергией в поле земного тяготения*, а значит, с *наинизшим возможным положением центра тяжести*. Поэтому она «не желает» висеть углом, как стержни.

Ответ. Центр тяжести цепочки ниже.

Удивительная по красоте и лаконичности задача!

А придумал её в конце шестидесятых годов мой добрый друг, тогда ещё студент МФТИ Ричард Бокун. За эту задачу он был даже награждён специальной памятной медалью.