

Информатика



Грацианова Татьяна Юрьевна

*Доцент факультета Вычислительной математики
и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова,
преподаватель подготовительных курсов.*

Как мы летом считали клубнику

Разговор в этой статье идёт о переводе чисел из одной системы счисления в другую, о том, как выполнять арифметические действия над числами в разных системах счисления. Наверняка вы помните (см. «Потенциал» № 6, 2010), как летом ученикам 10 «А» удалось подзаработать: они собирали клубнику в пригородном хозяйстве. Чтобы проследить за правильностью оплаты, они должны были тщательно подсчитывать количество собранных ягод. А помогло им в этом знание школьной информатики.

В хозяйстве была принята строгая система упаковки: 8 клубничин складывали в лоток, 8 лотков укладывали в корзинку, 8 корзинок – в коробку, 8 коробок – в контейнер, а 8 контейнеров – в грузовик. Ребята обнаружили, что для подсчётов удобно пользоваться 8-ричной системой счисления: количество отдельных клубничин, лотков, корзинок, коробок и прочих тары можно рассматривать как цифры числа в восьмеричной системе счисления. Таким образом, чтобы подсчитать, сколько клубничин находится в собранных контейнерах, коробках и лотках, надо просто соответствующее восьмеричное число перевести в десятичное. А для того, чтобы уз-

нать, сколько собрали все вместе, можно сложить числа и в восьмеричной системе счисления. Вот и пришлось летом среди коробок с клубникой вспомнить школьную информатику.

– Итак, подводим итоги. У меня 1 контейнер, 3 коробки, 2 корзинки и 7 лотков – 13270_8 – в конце добавляем 0, потому что отдельных клубничин нет. У тебя, Лёша?

– У меня до полного контейнера одной ягодки не хватило. Значит, получается число 9999_8 .

– Ну, здорово! Это как же у тебя в числе в 8-ричной системе вдруг цифры «9» появились?

– А очень просто! Полный контейнер – это восьмеричное число

10000₈, а если единичку отнять, то 9999₈ и получится!

– Молодец: число взял восьмеричное, а при вычитании в десятичное его превратил! Это если в 10-й системе из 10 отнимать 1, получается 9. А в 8-ричной $10_8 - 1_8 = 7_8$. И такое соотношение для любой системы счисления верно: $10_q = q_{10}$. $10_q - 1 = (q - 1)$ – самая старшая цифра в q -ричной системе счисления.

– Вот, Лёха, бери у меня ягоду, складывай полный контейнер и не позорься.

– А ты, Вика, как считала: коробками-корзинками или по одной яголке?

– Я по-всякому считала. У меня 5 коробок (их уже унесли) и 5660 ягодок!

– Вот развели арифметику: кто в восьмеричных числах, кто в десятичных; а тут и вовсе компот клубничный: и ягоды, и коробки – всё намешала. Как разбираться будем?

– Ну, с Викиными ягодами, положим, разобраться совсем несложно: в одной коробке $8 * 8 * 8 = 8^3 = 2^9 = 512$ ягод, в пяти – 2560 штук, всего получается 8220 ягодок. А вот чтобы подсчитать, сколько мы вместе набрали, надо числа в одной системе счисления представить. У нас два числа в восьмеричной и одно – в десятичной. Давайте и его в восьмеричную переведем.

– Да там так мудрено переводить: писать деление, как в первом классе, лесенкой. У меня всегда ни терпения не хватает, ни места в тетрадке, я в этих числах путаюсь.

– А я все домашние задания на компьютере переводил. В Windows в калькуляторе есть такая кнопка «инженерный», если её нажать, так он будет сам числа из десятичной хоть в двоичную, хоть в

восьмеричную и шестнадцатеричную переводить.

– Вот и напрасно. Сейчас компьютера нет, а ты коробки посчитать не можешь. Набрала Вика полный контейнер?

– Да почему же не могу? Что же я – дурак совсем? У неё 8220 ягод. В контейнере $8^4 = 2^{12} = 4096$ ягод. Значит, набрала даже больше, чем контейнер. А вот набрала ли 2? Или 3? Надо 8220 поделить на 4096, только не так, чтобы дробь получилась, а нацело. Вот целая часть и будет число контейнеров. Хоть числа большие, нацело легко делить. 2 получится.

– Правильно, а остаток – это то, что не влезло в контейнер, а лежит в коробках, корзинках и лотках. Смотрите, как это число 8220_{10} переводится в восьмеричную систему счисления «методом коробок». Предположим, у нас лежит вот такая гора клубники – 8220 штук, и надо эти ягоды разложить правильно в коробки, корзинки, лотки. Разложим, посчитаем, сколько у нас тары – получим число в восьмеричной системе. Как узнать, сколько контейнеров, Лёша нам уже сказал. Их 2.

– А откуда ты знаешь, что раскладку надо с контейнеров начинать, вдруг уже грузовик нужен?

– Ну для этого хорошо бы степени восьмёрки знать (или для другой системы счисления – степени её основания). Для восьмёрки такую таблицу даже специально считать не нужно, если знать наизусть степени двойки. Ведь $8 = 2^3$, значит, $8^N = 2^{3*N}$.

Показатель степени N		8^N
0	2^0	1
1	2^3	8

2	2^6	64
3	2^9	512
4	2^{12}	4096

В грузовике 2^{15} ягод, это больше 32 тысяч, для грузовика только Викиных ягод явно маловато. Итак, после того как мы заполним 2 контейнера, у нас останется $8220 - 4096 \cdot 2 = 8220 - 8192 = 28$ – всего 28 яблочек, ни коробок, ни корзинок не надо. 28 яблочек раскладываются в лотки $28 : 8 = 3$ (+4 в остатке) – 3 лотка и ещё 4 яблочка. Расставляем цифры на места (не забывая нули в позиции «корзинок» и «коробок»). Получаем $8220_{10} = 20034_8$.



– Вика больше всех набрала! Вот что значит считать правильно! Я теперь тоже так буду.

– Да и всё равно как считать. Главное – собирать быстро. Система счисления – это способ записи числа. От того, каким способом мы число запишем, количество клубники не изменится.

– Да понятно, что число не изменится. Ты вот скажи, что же, всегда, если число из какой-то системы

счисления в десятичную переводить, надо его в уме по корзинкам-коробкам раскладывать?

– Да нет, этот способ вообще-то особенно хорош для двоичной системы.

– А почему именно для неё?

– Потому что в двоичной системе счисления число является суммой разных степеней двойки. В других системах счисления в записи числа могут быть цифры больше единицы, на них надо умножать основание в разной степени. А в двоичной записи числа могут быть только цифры 0 и 1. Вот и получается, если на k -ом месте стоит единичка, в сумме присутствует k -ая степень двойки.

– Что это за k такое?

– Номер цифры. Только считать надо начинать с нуля и справа налево. Число $1011001_2 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6$, потому что единички стоят на 0-ом, 3-ем, 4-ом и шестом местах.

– Так это же перевод из двоичной в десятичную, а нам наоборот надо, из десятичной в двоичную!

– Но способ именно на этом и основан. Мы подбираем наибольшую степень двойки, не превосходящую наше число, так узнаём, что на соответствующем месте будет единица.

$$130 = 128 + 2 = 2^7 + 2^1 = 10000010.$$

$$100 = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = 1100100.$$

– Ловко! Но это ты числа красивые берёшь. А если обычное взять, которое сразу и не видно, как разложить в сумму?

– Тогда уже устно не получится, надо на бумажке писать. Вот 45.

$$45 = 32 + 13 = \text{Подбираем степень двойки, которая не превосходит 45. Это 32.}$$

$$= 32 + 8 + 5 = \text{Теперь то же самое делаем для числа 13. Подберём 8.}$$

Оставшееся число 5
 $= 32 + 8 + 4 + 1$ успешно разложи-
 лось на $4 + 1$.

Место	5	4	3	2	1	0
Цифра	1	0	1	1	0	1

Получаем $45 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 101101$.

– Этим способом удобно получа-
 ется, если в числе единичек мало.
 Если много, то лучше обычным.

– А как узнать, что их мало бу-
 дет? Чтобы единички подсчитать,
 сначала перевести надо.

– Бывает и сразу видно. Напри-
 мер, если число немного больше
 степени двойки: $513 = 512 + 1$; $1030 =$
 $= 1024 + 4 + 2$. А вообще-то я обычно
 этот способ для проверки исполь-
 зую, а перевожу обычным.

– Какой обычный, это где делить
 «лесенкой»?

– Да, где «лесенкой», только я
 как раз «лесенкой» не пишу. Ну за-
 чем, скажите, всё время повторять,
 на что я делю. Я выписываю числа в
 две колонки: в левой сначала само
 число, а потом целая часть от деле-
 ния, а в правой – остаток от деления.

Например, переведём количество
 Викиных ягод из десятичной систе-
 мы в восьмеричную.

8220	Остаток	Делим 8220 на 8.
1027	4	Получаем 1027 и 4 в остатке. Те- перь делим 1027 на 8.
128	3	Получаем 128 и 3 в остатке. Делим 128.
16	0	Получаем 16 и 0 в остатке.
2	0	16 опять делится на 8 без остатка, получается 2. Это первая цифра на- шего числа.

Ответ собираем снизу вверх. При-
 чём первой цифрой будет последний

результат из левой колонки –
 20034₈.

– А всегда эти два способа оди-
 наковые результаты дают? Можно
 один из другого вывести?

– Да ведь это одно и то же. Про-
 сто вычисления производятся в дру-
 гом порядке. Вот наша первая циф-
 ра ответа, число 2. Первым способом
 мы её получили, разделив 8220 на
 8^4 , а здесь мы 8220 4 раза подряд
 на 8 делили – всё то же самое по-
 лучается. А другие цифры мы вы-
 числяли, считая, сколько ягод не по-
 местится в коробки, корзинки и т. п.
 Это и есть остатки от деления.

– И в любую другую систему из
 десятичной так перевести можно?

– Конечно. Только делить надо
 на основание системы счисления.

– А вот ты говорила, что в числе,
 скажем, в 8-ричной системе счисле-
 ния цифры могут быть только от 0 до
 7. А если по всей этой арифметике 8
 или 9 получится – что делать?

– Искать ошибку. Мы ведь в
 правой колонке выписываем остатки
 от деления. Как же остаток от деле-
 ния на 8 может быть больше 7?

– И вот ещё что непонятно. Ты
 всё время говоришь, что все прави-
 ла во всех системах счисления оди-
 наковые, что это только способ за-
 писи чисел. А почему же всё-таки
 десятичная выделяется, особняком
 стоит: из любой в десятичную пере-
 водим одним способом, а из деся-
 тичной в любую – другим?

– Потому что мы считаем в 10-чной
 системе, если бы мы одинаково лег-
 ко могли умножать, делить, склады-
 вать в любой системе счисления,
 правила перевода были бы одинако-
 вы. И переводили бы мы, скажем, из
 8-ричной в 5-ричную тем же спосо-
 бом, только арифметические дейст-
 вия: деление, умножение, сложение,
 вычитание – производили бы по
 правилам 8-ричной системы.

– Ну это же совершенно нечеловечески сложно!

– Да нет ничего сложного, особенно в двоичной системе.

– Двоичная – самая лёгкая! Ну, сказала! Да она сложнее всех, в 8-ричной, например, почти все правила такие же, как в 10-ичной: $2*2=4$; $2+5=7$. А в двоичной даже и цифр-то таких нет!

– Зато все остальные правила (как только результат становится больше 8) в 8-ричной уже другие: $5+4=11_8$; $7*2=16_8$, и этих правил много. А в двоичной всего 4 правила для умножения и 4 для сложения. К тому же они настолько простые, что их и запоминать не надо.

Таблица сложения
$0+0=0$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=10$

Таблица умножения
$0*0=0$
$0*1=0$
$1*0=0$
$1*1=1$

– И правда, смотри-ка: все правила умножения совершенно обычные, а при сложении – только последнее не такое, как в 10-чной!

– И производить арифметические действия в двоичной системе гораздо проще, чем в 10-чной, надо только быть очень внимательным: ведь цифр много, надо в них не запутаться, аккуратно записывать «столбиком» одно число под другим:

		1	1	0	0	1	0
+		1	1	0	1	1	1
	1	1	0	1	0	0	1

Складывать, как всегда, начинаем с последней, самой правой цифры. Получаем 1. Следующее действие: $1+1=10$. 0 записываем, 1 запоминаем. Потом нам надо сложить $1+0$, но ведь мы ещё 1 запомнили, получаем $0+1+1=10$, опять пишем 0, а 1 запоминаем. Дальше всё просто: $0+0$, да ещё 1 запо-

нили, $1+1=10$, опять 1 запоминаем. А вот складывая последние, самые левые цифры, надо быть внимательнее: здесь получается $1+1+1$ (так как 1 мы запомнили), будет 11, что и записываем. Можно перевести все числа в 10-чную систему и проверить!



– Да... Складывать и правда просто: $1+0=1$ – никаких вопросов. А вычитать?

– Вычитать тоже несложно. Главное – не лениться, помечать цифры, у которых мы «заяли», помнить, что они изменятся. Причём здесь правила опять же проще, чем в 10-чной системе. Когда мы вычитаем числа в 10-чной системе, если у цифры «заяли», она на 1 уменьшается (но надо, хоть и простые, делать вычисления), здесь же можно просто запомнить, что цифра, у которой «заяли», изменяется на другую: 0 на 1, а 1 на 0:

	1	1	0	1	0	0	1
–		1	1	0	1	1	1
		1	1	0	0	1	0

Вычитая правые цифры, получаем 0. А вот чтобы вычесть предпослед-

ние цифры, надо «занять». Я поставлю не точку, а линию, чтобы виднее было: занимаем у третьей и у четвертой с конца цифры (так как третья – ноль). Теперь 0 превращается в 10, и вторую цифру можно подсчитать: $10 - 1 = 1$. Когда будем вычислять третью цифру, у верхнего числа 0 заменяем на 1 (ведь над ним стоит черточка): $1 - 1 = 0$. Четвертая цифра 1 с черточкой, то есть она превратилась в 0: $0 - 0 = 0$. Ну и с последними цифрами – всё точно так же.

Но больше всего мне нравится умножать в двоичной системе.

– Ну ты даёшь, мы умножение даже не проходили: оно для экзамена не нужно.

– Да ты посмотри, как просто получается: ведь умножать приходится только на 0 или на 1. При умножении в столбик, если очередная цифра, на которую надо умножать, ноль, надо число просто написать со сдвигом. И писать всегда надо само число, ничего умножать не надо (умножение на единицу – это ведь просто переписывание). Смотри:

			×	1	0	0	1	
				1	0	1	1	
				1	0	0	1	
		+		1	0	0	1	
	1	0	0	1				
1	1	0	0	0	0	1	1	

Так как во втором сомножителе правая цифра – единица, просто переписываем первый сомножитель. Дальше опять единица: переписываем первое число ещё раз, но уже со сдвигом. И осталось ещё раз его переписать, только со сдвигом на 2 позиции, так как перед последней единичкой во втором сомножителе стоит нолик.

– Да, ловко... А поделить ты тоже сможешь?

– Не знаю, как-то не пробовала...

– Вот видишь, а говоришь, в двоичной всё легче! А делить не умеешь!

– Ну, давай попробуем. Мы ведь этого и правда не проходили... Но вдруг получится... Число 1010001 поделим на 11. По обычным правилам – лесенкой.

	1	0	1	0	0	0	1		1	1			
		1	1										
		1	0	0					1	1	0	1	1
			1	1									
			1	0	0								
				1	1								
					1	1							
					1	1							
						0							

Сначала из числа-делимого слева отбираем такое количество цифр, которое будет больше 11. Это, понятно, не 1 и не 10. Значит, делим 101 на 11. Сколько получится? Лёша?

– Да ты что? Откуда же я знать могу, что там в двоичной системе получится?

– А нечего здесь знать! Получиться может только 0 или 1 – именно потому, что это двоичная система, ничего другого просто не бывает. Ноль не получится, ведь у нас выбрано делимое больше делителя. Значит, в «ответ» записываем первую цифру – 1. Теперь 11 умножаем на 1 (ох, какое сложное действие!), отнимаем 11 от 101. Получается 10. «Сносим» нолик – очередную цифру делимого. Получаем 100. Оно больше 11, значит, можно поделить и получить...

– Единицу!

– Конечно, единицу, приписываем её к ответу. Теперь от 100 отнимаем 11 и получаем 1. Сносим из делимого нолик, получаем 10. Оно меньше нашего делителя, значит, надо к ответу приписать нолик и ещё один нолик из делимого снести. Получаем 100...

– Что-то у тебя всё время одинаковые числа получаются! Специально подбирала?

– Да нет, просто выбор небольшой, не так уж много трехзначных

двоичных чисел. Ну, давай доделим. Опять к ответу единицу приписываем и от 100 отнимаем 11. Получаем 1 и сносим к этой единице ещё одну – последнюю цифру делимого. 11 делим на 11, приписываем к ответу последнюю единичку.

– Здорово! Теперь буду в электричке вместо того, чтобы в кроссворды буквы вписывать, делить в разных системах счисления. Пусть все видят, какой я крутой!

– Да кто рассматривать будет, что ты там делаешь? Разве что старушка какая-нибудь, если ты ей вовремя место не уступишь. Тем более, не думаю, что у тебя так же «ловко» в других системах получится. Там уже считать надо, что получится при делении одного числа на другое, ведь может не только единица получиться. И умножать придётся не только на 1, а и на другие цифры. А умножать-то там надо по правилам этой системы, а не по правилам десятичной!

– Ладно, уговорила...

– Кстати, о правилах в других системах. Мы ведь начали с того, что нам надо было числа в 8-ричной системе сложить. Это можно сделать? Или надо много каких-то правил знать?

– Конечно, если знать правила – правила сложения в 8-ричной системе, складывать будет очень легко, но их много; запоминать, конечно, не хочется. Можно и так обойтись.

Нам надо сложить 13270_8 и 20034_8 . Запишем их как положено и будем по цифрам складывать, начиная с конца:

+	1	3	2	7	0
	2	0	0	3	4
	3	3	3	2	4

Пока сумма цифр меньше 8, правила сложения такие же, как в десятичной: $0+4=4$. А вот $7+3=10$, но это в десятичной системе. Надо 10 перевести в восьмеричную систе-

му: $10_{10}=12_8$. Значит, 2 записываем, 1 запоминаем. А дальше всё просто – цифры у нас маленькие, никаких особых правил не нужно.

– Но ведь это не всегда так, часто бывают эти самые правила нужны?

– Да нет, и при сложении, и при вычитании довольно легко нужное правило вывести. Давай сложим 16-ричные числа! Специально возьмём с большими цифрами.

+	5	A	F
	C	B	1
1	2	6	0

$F+1=10$ – это уже в 16-ричной системе, такое правило можно и помнить, оно везде одинаковое: если к самой большой цифре прибавить 1, получится 10. Дальше надо складывать A и B, да ещё к ним 1 прибавить. Придётся перевести в десятичную систему, сложить, а потом обратно перевести в 16-ричную: $A_{16} + B_{16} + 1 = 10_{10} + 11_{10} + 1 = 22_{10} = (16+6)_{10} = 16_{16}$. Значит, 6 записываем, 1 запоминаем. И дальше так же: $(1+5+C)_{16} = (6+12)_{10} = 18_{10} = (16+2)_{10} = 2_{16}$. Вот и всё, осталось только записать цифры на место!

– Ну вы и увлеклись! Пока вы тут считали, Сергей вон уже деньги получил, давайте проверять, правильно ли нам начислили.

– Да всё правильно, я уже проверил. Пойдёмте лучше отсюда скорей, я уже запах этой клубники терпеть не могу. Наверное, теперь всю жизнь её есть не буду.

– Пошли скорее на электричку, Лёша собрался всю дорогу числа в двоичной системе делить и перемножать.

– Да нет, ты меня отговорила, я лучше старушкам место уступать буду, а делить и перемножать дома попробую – там хоть калькулятор есть, проверить можно.