

Глинка Надежда Владимировна
Учитель информатики школы Частного учреждения центр образования «Европейская гимназия», преподаватель подготовительных курсов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. Эксперт ЕГЭ.

Способы решения задач, связанных с логическими уравнениями

С каждым годом в ЕГЭ по информатике задачи на поиск количества решений логических уравнений становятся всё сложнее и сложнее. Знания набора правил преобразования логических выражений для их решения уже недостаточно. Чтобы справиться с задачами такого типа, необходимо владеть специальными приёмами, применять особенные подходы. Некоторые из них рассматриваются в этой статье.

Например, на ЕГЭ по информатике за 2007–08 учебный год была сформулирована такая задача.

Сколько различных решений имеет уравнение $((K \vee L) \to (L \wedge M \wedge N)) = 0$, *где* K, L, M, N – *логические переменные?*

Или задача за 2009–2010 учебный год.

Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0,$$

где J, K, L, M, N – *логические переменные?*

Формально эти задачи можно было решить, просто аккуратно построив таблицу истинности, так как количество переменных относительно невелико – 4 в первом случае и 4 во второй задаче (после несложных преобразований количество переменных уменьшается до четырёх).

Но на экзамене за 2009–2010 учебный год уравнения были с большим числом переменных и, следовательно, не подразумевали построение таблицы истинности. И уж совсем это было невозможно на ЕГЭ по информатике в этом учебном году, когда предлагалось решить подобную задачу для системы логических уравнений с десятью и более переменными.

В этой статье я рассмотрю некоторые приёмы решения задач на поиск количества решений логических уравнений.

Задача 1. Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \to K) \to (M \wedge N)) \wedge ((J \wedge \neg K) \to (\neg M \vee \neg N)) \wedge \\ \wedge (\neg M \vee \neg N \vee K \vee L) = 1,$$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

Решение. Раскроем импликацию и уберём лишние скобки:

$$(\neg J\wedge K\vee M\wedge N)\wedge(\neg J\vee K\vee\neg M\vee\neg N)\wedge$$
$$\wedge(\neg M\vee\neg N\vee K\vee L)=1.$$

Полученное уравнение истинно, когда каждое выражение в скобках истинно, т. к. между скобками стоят знаки логического умножения. Тогда уравнение можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases}(J\wedge\neg K\vee M\wedge N)=1, & (1)\\ (\neg J\vee K\vee\neg M\vee\neg N)=1, & (2)\\ (\neg M\vee\neg N\vee K\vee L)=1. & (3)\end{cases}$$

Заметим, что уравнение (1) проще анализировать, нежели (2) и (3), так как для истинности (1) возможных наборов переменных J, K, M, N будет гораздо меньше. Итак, уравнение (1) будет истинным, если:

$$\begin{cases}J\wedge\neg K=1,\\ M\wedge N=0,\end{cases} \quad (*)$$

или

$$\begin{cases}J\wedge\neg K=1,\\ M\wedge N=1,\end{cases} \quad (**)$$

или

$$\begin{cases}J\wedge\neg K=0,\\ M\wedge N=1.\end{cases} \quad (***)$$

Построим фрагмент таблицы истинности для случая (*):

$$J\wedge\neg K=1,$$

следовательно, $J=1$, $K=0$.

$$M\wedge N=0,$$

следовательно, $M=0$, $N=0$, или $M=0$, $N=1$, или $M=1$, $N=1$.

Запишем эти результаты в таблицу:

J	K	L	M	N
1	0		0	0
1	0		0	1
1	0		1	0

Заметим, что на этих наборах значений переменных J, K, M, N уравнения (2) и (3) будут принимать значение истины независимо от значения переменной L, значит, случай (*) даст 6 решений:

J	K	L	M	N
1	0	0 1	0	0
1	0	0 1	0	1
1	0	0 1	1	0

Построим фрагмент таблицы истинности для случая (**):

$$J\wedge K=1,$$

следовательно, $J=1$, $K=0$.

$$M\wedge N=1,$$

следовательно, $M=1$, $N=1$.

Запишем этот результат в таблицу:

J	K	L	M	N
1	0		1	1

Но при таких значениях переменных уравнение (2) ложно:

$$(\neg J\vee K\vee\neg M\vee\neg N)=0\vee 0\vee 0\vee 0=0,$$

значит, случай (**) не даст ни одного решения.

Построим фрагмент таблицы истинности для случая (***):

$$J\wedge\neg K=0,$$

следовательно, $J=0$, $K=0$, или $J=0$, $K=1$, или $J=1$, $K=1$.

Запишем эти результаты в таблицу:

J	K	L	M	N
0	0		1	1
0	1		1	1
1	1		1	1

Заметим, что для первого набора значений переменных ($J=0$), $K=0$, $M=1$, $N=0$ уравнение (3) примет значение истины только при $L=1$. На оставшихся двух наборах значений переменных J, K, M, N уравнения (2) и (3) будут принимать значение истины независимо от значения переменной L, значит, случай (***) даст 5 решений:

J	K	L	M	N
0	0	1	1	1
0	1	0 1	1	1
1	1	0 1	1	1

Ответ. Заданное уравнение имеет 11 различных решений.

Этот способ можно назвать так: «Сведение уравнения к системе более простых уравнений».

Задача 2. Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K\wedge L\wedge M)\to(\neg N\to P))\wedge((\neg K\vee\neg L\vee\neg M)\to \to(N\vee P)) = 1,$$

где K, L, M, N, P – логические переменные?

Решение. Раскроем импликацию в скобках:

$$(\neg N\to P) = (N\vee P)$$

и заметим, что

$$\neg K\vee\neg L\vee\neg M = \neg\,(K\wedge L\wedge M).$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$((K\wedge L\wedge M)\to(N\vee P))\wedge(\neg(K\wedge L\wedge M)\to \to\,(N\vee P)) = 1.$$

Введём замену переменных:

$$A = N\vee P \quad \text{и} \quad B = K\wedge L\wedge M.$$

Тогда уравнение перепишется в виде:

$$(B\to A)\wedge(\neg B\to A) = 1.$$

Раскроем импликацию:

$$(\neg B\vee A)\wedge(B\vee A) = 1.$$

По закону склеивания получим $A = 1$.

Вернёмся к исходным переменным: $N\vee P = 1$. Это уравнение имеет 3 решения и совершенно не зависит от переменных K, L, M, следовательно, общее количество решений исходного уравнения $3\cdot 8 = 24$.

Ответ. Заданное уравнение имеет 24 различных решения.

Существует ещё один эффективный способ решения таких задач – исключение неподходящих решений, то есть иногда проще решать обратную задачу. Рассмотрим пример.

Задача 3. Сколько различных решений имеет уравнение:

$$J\wedge\neg K\wedge L\wedge\neg M\wedge(N\vee\neg N) = 0,$$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

Решение. Заметим, что $N\vee\neg N = 1$ всегда, поэтому истинность заданного уравнения не зависит от переменной N, т. е. уравнение можно переписать в виде:

$$J\wedge\neg K\wedge L\wedge\neg M = 0.$$

Когда это уравнение принимает значение истины, количество решений найти гораздо проще:

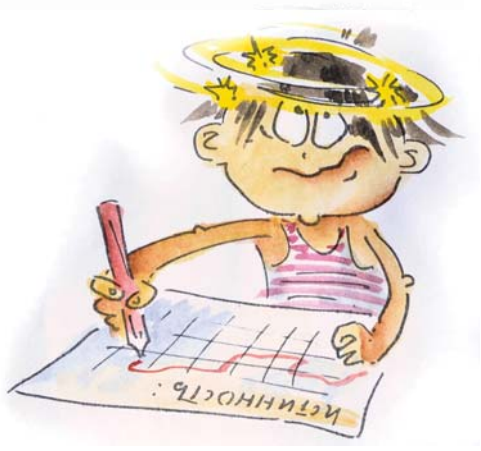
$$J\wedge\neg K\wedge L\wedge\neg M = 1.$$

Такой набор единственный: $J = 1$, $K = 1$, $L = 1$, $M = 0$. Следовательно, на остальных 15-ти наборах это выражение будет принимать значение 0 (ложь). Тогда общее количество решений исходного уравнения будет равно $30 = 15\cdot 2$ (учли, что от N значение логического выражения не зависит).

Общие принципы решения задач.

По моему мнению, основными эффективными способами решения задач на поиск количества решений логических уравнений являются:

- разбиение уравнения на систему более простых уравнений,
- замена переменных,
- решение обратной задачи.



Существует множество разных других способов решения логических уравнений, которые, как мне кажется, сводятся к упрощению заданного выражения и в конечном итоге приводящих к анализу системы простых логических уравнений. Встречаются в литературе такие названия: разделение на части, анализ исходного выражения, упрощение выражения, преобразование логической функции, интуитивный метод, поиск неподходящих комбинаций, декомпозиция.

И в завершение несколько советов тем, кто решил попробовать свои силы в решении задач рассмотренного типа.

• Если это одно сложное уравнение, то посмотрите, нет ли возможности произвести замену переменных, чтобы уменьшить их количество и после этого решать более простую задачу.

• Независимо от того, удалось произвести замену или нет, попытайтесь произвести преобразования таким образом, чтобы свести уравнение к нормальной форме, т. е. когда логическое уравнение содержит конечное число конъюнкций некоторых логических переменных и их инверсий, соединённых операцией дизъюнкции или же наоборот: конечное число дизъюнкций некоторых логических переменных и их инверсий, соединённых операцией конъюнкции.

• Разбейте уравнение на систему более простых уравнений.

• Проанализируйте количество решений одного самого простого, на ваш взгляд, уравнения и вычислите, как поведут себя при этом остальные уравнения из полученной системы.

• Если сказанное выше плохо получается, посмотрите, не проще ли решить обратную задачу.



Все советы останутся бесполезными, если вы не знаете основные законы логики, не умеете преобразовывать логические выражения к более простому виду, раскрывать и свёртывать импликацию, раскрывать и свёртывать эквивалентность, не можете пользоваться правилами Моргана, законами склеивания и поглощения.

В следующих номерах журнала вы найдёте описание подходов к решению задач на поиск количества решений *СИСТЕМ* логических уравнений.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Метод упрощения формул

Иногда из кабинета Дмитрия Ивановича Менделеева можно было услышать: «У-у-у, рогатая! Ух, какая рогатая! Я же тебя одолею, я тебя одолею. Убью-у!». Так учёному удавалось «устрашить» какую-либо выведенную им громоздкую формулу и преобразовать её в конце концов в короткую, изящную и удобную для расчётов.