

Информатика



Линев Николай Борисович

Преподаватель подготовительных курсов
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Поразрядная конъюнкция в задачах ЕГЭ

Думаю, что всем школьникам, которые собираются сдавать ЕГЭ по информатике, знакома такая задача:

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию

M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A такое, что выражение

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X).

Как показывает практика, задачи такого типа вызывают сложности, хотя о методах решения написано уже немало. Сегодня я хочу предложить вам ещё один метод, основанный только на анализе данного в задаче логического выражения и не требующий его преобразования. При некоторой практике можно будет спокойно уложиться с решением в 3 минуты – время, рекомендованное на решение задач такого типа.

Но прежде чем приступить к ре-

шению задачи, давайте разберём, что такое поразрядная конъюнкция. В условии задачи написано, что это – «логическое "И" между соответствующими битами двоичной записи». Значит, нам нужно взять два числа, выписать их двоичное представление, записать одно число под другим и перемножить соответствующие разряды. Не забывайте, что разряды нумеруются с нуля справа налево; если числа в двоичном представлении имеют разное количество разрядов, то их нужно уравнивать, дописав слева к меньшему числу недостающие нули.

Например:

$$\begin{array}{r} 5 \& 3 \\ 101 \\ \underline{011} \\ 001 \end{array}$$

$$5 \& 11$$

$$\begin{array}{r} 0101 \\ \underline{1011} \\ 0001 \end{array}$$

$$5 \& 27$$

$$\begin{array}{r} 00101 \\ \underline{11011} \\ 00001 \end{array}$$

Как мы знаем, при умножении любого числа на ноль в результате будет ноль. Таким образом, при перемножении двух чисел с разным количеством разрядов незначащие нули меньшего числа обратят старшие разряды большего числа в ноль. Отсюда можно сделать вывод, что старшие разряды большего числа не влияют на результат конъюнкции: перемножить 110 и 11 – всё равно что перемножить 10 и 11. Следовательно, для решения нашей задачи нам необходимо выписать все значения чисел в двоичном виде, а затем анализировать только те X , которые не превосходят их по разрядности.

Теперь давайте проанализируем задачу. Если мы возьмем конкретное значение числа X , то для этого значения мы сможем сказать, истинно или ложно каждое из высказываний $x \& 28 \neq 0$, $x \& 45 \neq 0$ и $x \& 48 = 0$. Но при этом мы ничего не сможем сказать об истинности высказывания $x \& A \neq 0$, так как параметр A неизвестен – именно его нам нужно определить. Исходя из этого, мы и будем решать задачу.

Заданное логическое выражение представляет собой импликацию, посылка которой содержит операцию дизъюнкции, а следствие – ещё одну импликацию. Если мы выберем из множества значений X подмножество таких значений, при которых посылка $((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0))$ обращается в «ЛОЖЬ», то по определению импликации результат операции будет «ИСТИНА» независимо от параметра A . Следовательно, для этого подмножества значений X значение параметра A может быть любым; значит, определить параметр A на основе этих значений X мы не сможем.

Если же мы выберем из множества чисел подмножество таких значений, при которых посылка будет принимать значение «ИСТИНА», то для того чтобы импликация была истинной, необходимо, чтобы следствие было *только* истинным. Но следствие содержит ещё одну импликацию. Аналогично, для значений X , при которых высказывание $x \& 48 = 0$ станет истинным, нужно требовать, чтобы следствие $x \& A \neq 0$ никогда бы не стало ложным.

Другими словами, если мы отобрали такие значения X , при которых высказывания $x \& 28 \neq 0$, $x \& 45 \neq 0$ и $x \& 48 = 0$ истинны, то именно при этих значениях на результат импликации влияет параметр A . Подчеркнём, что некоторые значения параметра A могут привести к ложности всей импликации, а значит, нам нужно исключить такую возможность. В конечном счёте наша задача сводится к тому, чтобы выделить из множества значений X такие, при которых одновременно будут выполняться условия

$$\begin{cases} ((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) = T, \\ (x \& 48 = 0) = T, \end{cases}$$

и для этих значений X подбирать такие значения A , чтобы выражение $(x \& A \neq 0)$ было бы истинным.

Давайте выпишем двоичное представление заданных чисел: $28_{10} = 11100_2$; $45_{10} = 101101_2$; $148_{10} = 110000_2$. Как мы уже выяснили, нам достаточно проанализировать значения X , которые в двоичном представлении имеют не более шести разрядов.

В основе каждого логического высказывания лежит операция поразрядной конъюнкции двух чисел, одно из которых известно. Следовательно,

мы можем определить структуру двоичного представления подмножества чисел X , которые в результате поразрядной конъюнкции приведут к истинности или ложности высказывания. Например, рассмотрим логическое высказывание $(5 \& X = 0)$. Предположим, что нам нужно выделить значения X , при которых данное высказывание принимает значения «ЛОЖЬ». Переведём число 5 в двоичный вид: $5_{10} = 101_2$. Чтобы результат поразрядной конъюнкции не был равен нулю, нужно, чтобы на месте хотя бы одного из разрядов с номерами 0, 2 была бы единица; значение первого разряда может быть любым.

Введём обозначения: пусть «(1)» – возможное положение 1 в записи числа X , «0» – нулевое значение, а «?» – любое значение разряда. Такую запись структуры подмножества значений X в дальнейшем мы будем называть шаблоном. Вернёмся к приведённому выше примеру: шаблон значений чисел X , при которых высказывание $(5 \& X = 0)$ принимает значение «ЛОЖЬ», будет выглядеть следующим образом:

$$X_5 = (1)?(1)$$

Индекс числа X указывает на известное значение, при помощи которого мы строим шаблон.

Для того чтобы высказывание $(x \& 28 \neq 0)$ было истинно, нужно, чтобы в разрядах двоичной записи числа X с номерами 2, 3 и 4 была хотя бы одна единица. Тогда шаблон двоичных значений чисел X , дающих истинность высказывания $(x \& 28 \neq 0)$, будет выглядеть $X_{28} = (1)(1)(1)??$.

Аналогично определим шаблон двоичной записи чисел X , при кото-

рых будет истинно высказывание $(x \& 45 \neq 0)$: $X_{45} = (1)?(1)(1)?(1)$.

Посылкой импликации в нашей задаче является дизъюнкция $(x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)$. Для получения шаблона двоичной записи чисел X , при которых дизъюнкция принимает значение «ИСТИНА», нам нужно построить новый шаблон на основе полученных ранее. По определению дизъюнкция истинна, когда истинно хотя бы одно из входящих в её состав высказываний, следовательно, в исходе шаблона единица может появиться в тех разрядах, где она может быть хотя бы в одном из исходных шаблонов. Тогда, обозначив такие X за X_1 , получаем:

$$X_{28} = ?(1)(1)(1)??$$

$$X_{45} = (1)?(1)(1)?(1)$$

$$X_1 = (1)(1)(1)(1)?(1)$$

Это шаблон значений X , для которых истинно высказывание $(x \& 61 \neq 0)$, то есть можно было бы сразу определить результат поразрядной дизъюнкции чисел 28 и 45, равный 61, и построить шаблон.

У нас осталось ещё высказывание $(x \& 48 = 0)$, которое должно принимать значение «ИСТИНА». В шаблоне X_{48} два старших разряда должны быть нулевыми, а четыре младших могут быть произвольными. Шаблон будет иметь вид: $X_{48} = 00????$

Теперь нам нужно совместить два шаблона X_{61} и X_{48} , чтобы отобрать подмножество таких чисел X , при которых из-за неизвестного параметра A импликация может стать ложной. Выпишем полученные шаблоны и на их основании определим шаблон чисел X . Назовём этот шаб-

лон X_A . При записи значений разрядов шаблона X_A учитываем, что если в каком-либо из шаблонов разряд равен нулю, то и в X_A этот разряд должен быть нулевым. Если в двух одинаковых по номеру разрядах двух шаблонов возможно любое значение, то и в разряде с этим номером в шаблоне X_A появляется любое значение. А если в разряде с каким-то номером в одном шаблоне возможна единица, а во втором шаблоне любое значение, то в шаблоне X_A ставим возможную единицу:

$$X_{61} = (1)(1)(1)(1)?(1)$$

$$X_{48} = 0 \ 0 \ ? \ ? \ ? \ ?$$

$$X_A = 0 \ 0 \ (1)(1) \ ? \ (1)$$

Теперь, когда мы определили, как должна выглядеть двоичная запись интересующих нас чисел X , нужно подобрать такие значения параметра A , чтобы высказывание $(x \ \& \ A \neq 0)$ при этих значениях X было бы истинно. Так как параметр A должен учитывать все возможные значения чисел X , его двоичная запись должна содержать единицы во всех разрядах, где в шаблоне X_A возможна единица. В тех разрядах параметра A , в которых в шаблоне X_A стоят нули, значения могут быть любыми. И если в разрядах шаблона X_A могут быть произвольные значения, то и в параметре A эти разряды могут быть произвольными. Таким образом, получим:

$$X_A = 0 \ 0 \ (1)(1) \ ? \ (1)$$

$$A = ? \ ? \ 1 \ 1 \ ? \ 1$$

Исходя из рассуждений, приведённых в начале решения, биты двоичной записи параметра A , стоящие в разрядах с четвёртого и старше, нас не интересуют. Значимыми для нас

являются четыре младших разряда и, следовательно, параметр A может быть любым числом, которое в двоичной записи оканчивается на 11?1. Так как по условию задачи нам нужно найти минимальное значение A , то те разряды, которые могут принимать любое значение, должны быть нулевыми. Из этого получаем $A = 1101_2 = 13_{10}$.

Ответ. 13.

На экзамене встречается вариант задачи, который отличается от рассмотренной положением параметра A :

Введём выражение $M \ \& \ K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число A такое, что выражение $(X \ \& \ A \neq 0) \rightarrow ((X \ \& \ 20 = 0) \rightarrow (X \ \& \ 5 \neq 0))$ тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X).

Логика рассуждений здесь полностью аналогична рассуждениям предыдущей задачи: исходя из того, что при конкретном значении числа X мы можем сказать о высказываниях $(X \ \& \ 20 = 0)$ и $(X \ \& \ 5 \neq 0)$, истинны они или ложны, нам требуется найти такое подмножество чисел X , при которых параметр A может привести к ложности заданного в условии задачи логического выражения. Это может быть в том случае, если импликация $(X \ \& \ 20 = 0) \rightarrow (X \ \& \ 5 \neq 0)$, которая является следствием основной импликации, примет значение «ЛОЖЬ», а высказывание $X \ \& \ A \neq 0$ будет истинно. Следовательно, нам нужно найти такие X , при которых высказы-

вание $X \& 20 = 0$ истинно, а высказывание $X \& 5 \neq 0$ ложно.

Выпишем двоичное представление чисел 20 и 5: $20_{10} = 10100_2$; $5_{10} = 101$.

Теперь, рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, выпишем шаблоны двоичной записи интересующих нас чисел X . Шаблон $X_{20} = 0?0??$, а $X_5 = ??0?0$. Поскольку числа должны одновременно удовлетворять двум шаблонам, шаблон таких чисел будет выглядеть следующим образом: $X_A = 0?0?0$.

Следует заметить, что в шаблоне X_A значения разрядов с пятого и старше могут быть любыми. Для этих

значений X мы должны подобрать параметры A такие, чтобы высказывание $(x \& A \neq 0)$ было бы ложным. Для этого в двоичной записи параметра A в разрядах, где в шаблоне X_A возможно любое значение, должны стоять нули, а где в шаблоне X_A стоят нули, может быть любое значение. Следовательно, $A = ?0?0?$. В итоге мы имеем набор значений параметра A ; из них требуется выбрать максимальный. Для этого все разряды, которые могут принимать произвольные значения, должны быть равны единице: $A = 10101_2 = 21_{10}$.

Ответ. 21.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Забавная история

Выдающийся математик Джон фон Нейман консультировал специалистов, строивших ракету-носитель для космического корабля. Увидев её, он спросил:

– Кто конструировал ракету?
 – Наши инженеры, – ответили ему.
 – Ин - же - не - ры?! Я разработал полную математическую теорию ракеты. Возьмите мою работу 1952 года, и вы найдёте там всё, что вас интересует.

Специалисты последовали его совету, неукоснительно соблюдая его рекомендации, и построили новую ракету-носитель. Но при запуске она взорвалась. Разгневанные ракетчики обратились к Нейману, чтобы он объяснил, почему так произошло. И тот ответил:

– То, о чём вы рассказали, относится к так называемой теории сильного взрыва. Я рассмотрел её в своей работе 1954 года. В ней вы найдёте всё, что вас интересует!