



Мукушев Базарбек Агзашулы

*Профессор Казахского агротехнического университета
им. С.Сейфуллина, доктор педагогических наук,
г. Нур-Султан, Республика Казахстан*

Пакет прикладных программ MathCAD и сфера их применения

MathCAD – это приложение для математических и инженерных вычислений, промышленный стандарт проведения, распространения и хранения расчетов. MathCAD – продукт компании PTC (Parametric Technology Corporation) – мирового лидера разработки систем САПР, PDM и PLM. MathCAD является универсальной системой, т.е. может использоваться в любой области науки и техники – везде, где применяются математические методы. Следует подчеркнуть, что нами изложена лишь маленькая часть вычислительных возможностей пакета MathCAD. Предлагаемая читателю статья – обзорная и не претендует на руководство по работе в этой системе.

Введение

Документы MathCAD представляют расчеты в виде, очень близком к стандартному математическому языку, что упрощает постановку и решение задач. MathCAD содержит текстовый и формульный редактор, вычислитель, средства научной и деловой графики, а также огромную базу справочной информации как математической, так и инженерной. Редактор формул обеспечивает ес-

тественный многоструктурный набор формул в привычном математическом языке (деление, умножение, квадратный корень, интеграл, сумма и т.д.). Мощные средства построения графиков и диаграмм сочетают простоту использования и эффектные способы визуализации данных и подготовки отчетов. При помощи пакета MathCAD осуществляются не только простые и вспомога-

ные вычисления, но и производятся довольно сложные расчеты и научные исследования, использующие комбинации самых разных численных алгоритмов и аналитических преобразований [1].

Благодаря простоте применения, наглядности математических действий, обширной библиотеке встроенных функций и численных методов, возможности символьных вычислений, а также превосходному аппарату представления результатов MathCAD стал наиболее популярным математическим приложением. Простые правила встроенных функций применения позволяют производить вычисления различной степени сложности, и при этом от пользователя не требуется глубоких знаний в области программирования.

При создании пакета MathCAD сделано все возможное, чтобы пользователь, не обладающий специальными знаниями в программировании, мог в полной мере приобщиться к достижениям современной вычис-

лительной науки и компьютерных технологий. Для работы с редактором MathCAD достаточно базовых навыков пользователя [2,3].

Отличительной чертой MathCAD от других современных математических приложений является следующие: во-первых, нет необходимости сначала писать программу, реализующую те или иные математические расчеты, а потом запускать ее на исполнение. Вместо этого достаточно вводить математические выражения и тут же получать результат. Во-вторых, можно создать страницу в Интернете именно в том виде, который этот документ имеет на экране компьютера при работе с MathCAD. В-третьих, данный пакет предоставляет возможности реализовать разные виды моделирования исследуемых явлений и процессов.

Рассмотрим ряд примеров из школьных дисциплин естественно-математического цикла, которые раскрывают некоторые возможности MathCAD.

Примеры из математики

С помощью системы MathCAD можно решать почти любую математическую задачу символьно либо численно. Эта математическая компьютерная система позволяет выполнять:

- решение линейных, нелинейных, дифференциальных и дифференциально-интегральных уравнений различными численными методами;
- построение двух- и трёхмерных графиков функций;
- выполнение вычислений в символьном режиме;

- выполнение операций с векторами и матрицами;
- символьное решение систем уравнений;
- интеграцию с системами управления, использующих результаты вычислений в качестве управляющих параметров.

Ниже рассмотрим некоторые примеры по использованию пакета MathCAD при изучении вопросов математической науки.

Пример 1. Решение кубического уравнения: $3x^2 + 2x^2 - 7x = 0$. На листинге 1 мы видим три после-

довательные строки вычислительного блока.

Первая строка представляет собой обязательное ключевое слово **Given**. Следующая строка является записью кубического уравнения, а последней строке листинга включается в работу встроенная функция **Find**. После функции **Find** находится оператор символьного вывода ($\rightarrow$), справа

от которого появляется аналитический результат решения уравнения. Первая часть решения уравнения является точным решением. Чтобы получить приближенное решение, нужно ставить после скобки символ численного равенства ($\approx$).

Графическое решение в среде MathCAD этого кубического уравнения представлено на рисунке 1.

$$\begin{array}{l} \text{Given} \\ 3x^3 + 2x^2 - 7x = 0 \\ \text{Find}(x) \rightarrow \left(0 \quad \frac{\sqrt{22}}{3} - \frac{1}{3} \quad -\frac{\sqrt{22}}{3} - \frac{1}{3} \right) = (0 \quad 1.23 \quad -1.897) \end{array}$$

Листинг 1

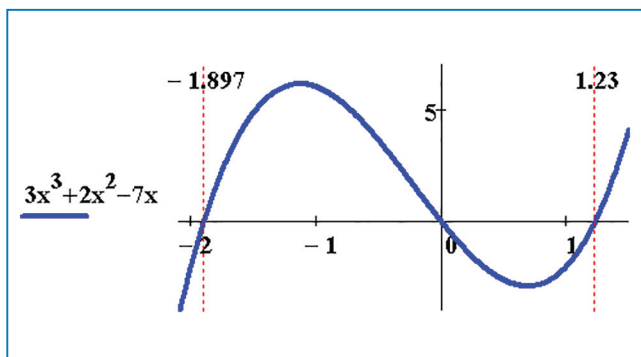


Рис.1

Пример 2. Решение системы двух уравнений:

$$\begin{cases} y - x^2 + 1 = 0, \\ 2y + 1 - x = 0. \end{cases}$$

Решение системы двух уравнений иллюстрирует листинг 2.

Система двух уравнений графически решена с помощью MathCAD (Рис. 2).

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которых неиз-

вестными являются не переменные (т. е. числа), а функции одной или нескольких переменных. Эти уравнения (или системы) включают соотношения между искомыми функциями и их производными. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они называются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). MathCAD решает ОДУ двух типов:

Given

$$y - x^2 + 1 = 0$$

$$2y + 1 - x = 0$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Листинг 2

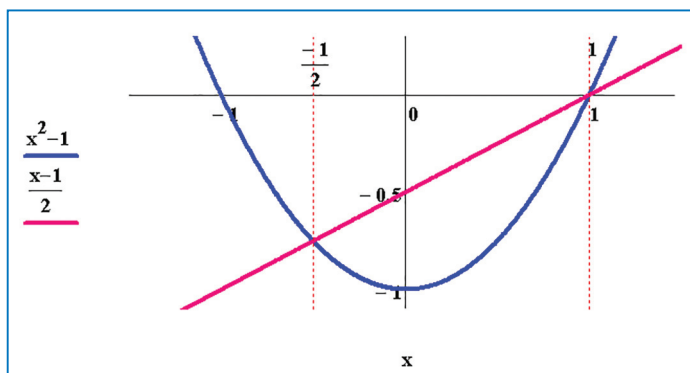


Рис. 2

– задачи Коши – ОДУ с начальными условиями, в которых задаются значения функции и ее производных в начальной точке интервала интегрирования;

– краевые задачи – ОДУ с граничными условиями, где задаются значения функции и ее производных в начале и в конце интервала интегрирования.

Пример 3. Нужно решать дифференциальное уравнение $y'''(x) - 2^{-x}y'(x) = x \sin x$ со следующими начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -0,5$.

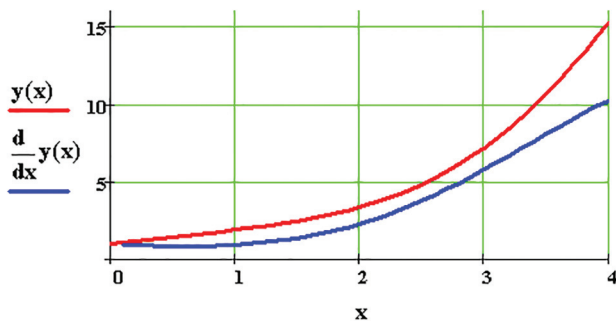
Для численного интегрирования ОДУ можно использовать вычислительный блок **Given – Odesolve** или применить встроенные функции, унаследованные от более ранних версий MathCAD. В результате получим графическое решение дифференциального уравнения (Листинг 3).

С помощью пакета MathCAD можно решать задачи на оптимизацию размеров различных геометрических фигур. Цель оптимизации геометрических фигур заключается в получении максимального объема при минимальном расходе необходимых материалов.

Given

$$y'''(x) - 2^{-x} \cdot y'(x) = x \cdot \sin(x) \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$y'''(0) = -0.5 \quad y := \text{Odesolve}(x, 20) \quad x := 0, 0.1..4$$



Листинг 3

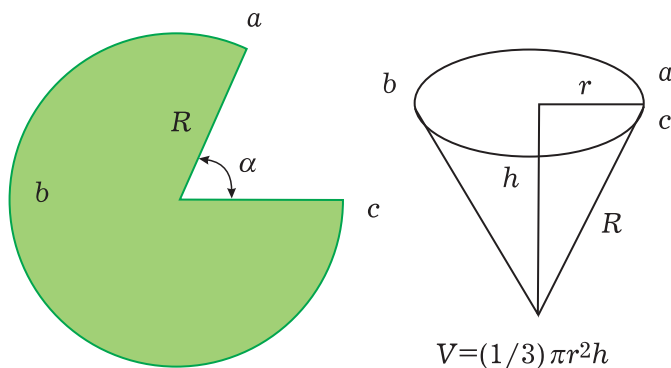
Схема изготовления сосуда

Рис. 3

Пример 4. Из круглой жестины изготавливается конусообразный сосуд. Нужно найти угол вырезки α , при котором объем сосуда будет максимальным (Рис. 3).

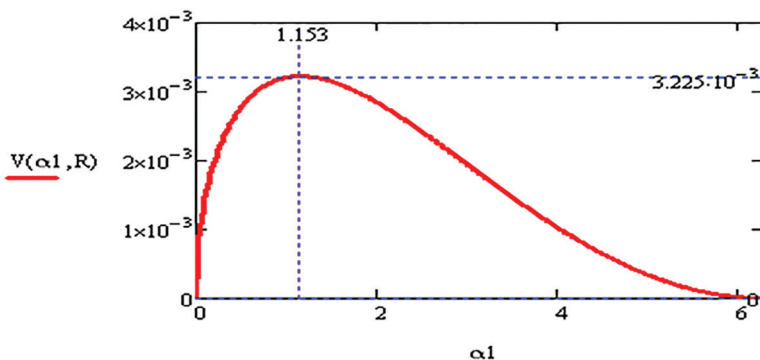
На листинге 4 представлена программа, составленная в среде MathCAD. Посредством программы нашли, что при угле вырезки $\alpha = 1,153$ радиан из жестины получим сосуд с максимальным объемом ($V_{\max} = 3,225$ литр).

$$r(\alpha, R) := 2\pi R - 2\pi \cdot R \cdot \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) = 2\pi r \text{ solve, } r \rightarrow -\frac{R \cdot \alpha - 2 \cdot \pi \cdot R}{2 \cdot \pi}$$

$$h(\alpha, R) := \sqrt{R^2 - r(\alpha, R)^2} \quad V(\alpha, R) := \left(\frac{1}{3}\right) \pi r(\alpha, R)^2 \cdot h(\alpha, R) \quad R := 20 \text{ cm}$$

$$\alpha := 1 \text{ rad} \quad \text{Given} \quad V(\alpha, R) = 4 \text{ L}$$

$$\alpha := \text{Minerr}(\alpha) \quad \alpha = 1.153 \quad V(\alpha, R) = 3.225 \text{ L}$$



Листинг 4

Примеры из физики

Одно из важных прикладных направлений использования пакета MathCAD связано с изучением физики и других смежных дисциплин. Речь идет о моделировании (симуляции) физических явлений и процессов в интерактивном режиме, включая численное решение систем уравнений, графическую интерпретацию решения, анимацию. Рассмотрим примеры, где пакет MathCAD выступает мощным инструментом исследования физических процессов и объектов.

Пример 1. Нить, обернутая вокруг неподвижного диска радиусом r , образует полуокружность (рис. 4). Один конец нити закреплен в точке A , ко второму кон-

цу нити привязан грузик, который удерживается в точке B (точки A и B находятся на одной вертикали). В некоторый момент грузик отпускается. Какая часть нити останется в соприкосновении с диском, когда грузик максимально удалится от начального положения? Трением пренебречь.

По закону сохранения энергии точка B и точка максимального удаления C находятся на одной горизонтали (рис.5). Из рисунка находим

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{CD}{r}.$$

С другой стороны, длина дуги BD равна длине отрезка CD :

$$\cup BD = CD = r\theta. \text{ Итак, } \text{tg} \frac{\theta}{2} = \theta.$$

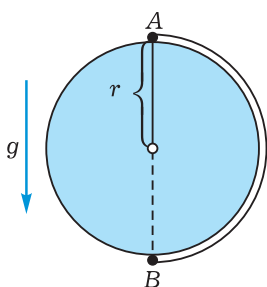


Рис. 4

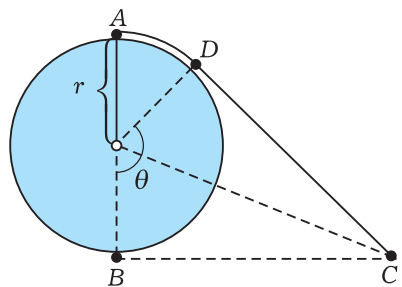


Рис. 5

Это – трансцендентное уравнение, которое не решается аналитическим способом. С помощью графической оценки находим интервал, где лежит корень уравнения. Чтобы определить число корней уравнения в интересующем нас промежутке $0 < \theta < \pi$, построим графики $y = \theta$ и $y = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ в среде MathCAD (Рис. 6).

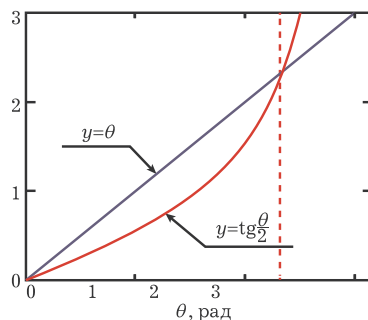


Рис. 6

Из графиков видно, что в интервале $2,00 < \theta < 2,50$ уравнение имеет единственный корень.

Чтобы улучшить точность полученной оценки, воспользуемся методом бисекции (метод деления

отрезка пополам), простейшим численным методом для решения нелинейных уравнений вида $f(x)=0$. Составим программу в среде MathCAD для рационального применения данного метода.

```

biseq(f, a, b, ε) :=
  fa ← f(a)
  while b - a > ε
    z ← (a + b) / 2
    fz ← f(z)
    (break) if fz = 0
    b ← z if fa · fz < 0
    a ← z otherwise
  z

f(z) := tan(z/2) - z
a := 2.0
b := 2.5
ε := 0.001
biseq(f, a, b, ε) = 2.331

```

"Уравнение как функция пользователя
 "Левая граница интервала
 "Правая граница интервала
 "Погрешность уточнения корня
 "Уточненное значение корня уравнения

Программа вычислила значение искомого угла при точности 0,001. MathCAD даст такое решение, $\theta \approx 2,331$ радиан $\approx 133,6^\circ$.

Таким образом,

$$\frac{\angle AD}{\angle AB} = \frac{\pi - \theta}{\pi} \approx 0,258.$$

Пример 2. Масса груза маятника равна $m=1$ кг, длина маятника – $L=0,5$ м, ускорение свободного падения – $g=9,81$ м/с², время продолжительности колебаний $t=10$ с. Начальный угол отклонения от вертикали равен $\alpha=50^\circ$. Необходимо построить анимационную модель в виде колебаний математического маятника.

Для построения модели напишем программу в среде MathCAD. На листинге 6 представлены эта программа, графики координат маятника в зависимости от времени и подпрограмма, необходимая для демонстрации анимации колебаний маятника.

До ключевого слова **Given** задаются параметры маятника и другие данные, необходимые для создания программы. После слов **Given** (до функции **Odesolve**) записываются начальные условия (положение маятника при $t=0$, условие его неподвижности и сила натяжения нити в начальной точке) и три уравнения – одно алгебраическое (координаты x и y груза маятника «связаны» нитью длиной L через теорему Пифагора) и два дифференциальных.

Первое дифференциальное уравнение описывает баланс сил, действующих на груз, по оси x . Второе – баланс сил по оси y . Функция **Odesolve** объединяет три рабочих функций x , y и F в одно выражение,

которое призвано построить графики функций $x(t)$ и $y(t)$.

На листинге 6 после графиков координат расположена подпрограмма в зависимости от времени, необходимая для создания анимации колебаний математического маятника. Анимация – это последовательность кадров, представляющих собой некоторый участок документа (листинга), который выделяется пользователем. Номер кадра задается системной переменной **FRAME**, которая может принимать лишь натуральные значения.

Рассмотрим последовательность действий для создания анимации колебаний. При этом каждый момент времени будет задаваться переменной **FRAME**:

1. Выполнить команду **Tools / Animation / Record** (Сервис / Анимация / Запись).

2. В диалогом окне **Record Animation** (Запись анимации) задать номер первого кадра в поле **FROM** (от), номер последнего кадра в поле **To** (До) и скорость анимации в поле **At** (Скорость) в кадрах в секунду (Рис.7а).

3. Выделить протаскиванием указателя мыши при нажатой левой кнопке мыши область в документе, которая станет роликом анимации.

4. В диалогом окне **Record Animation** (Запись анимации) следует нажать кнопку **Animate** (Анимировать). После этого в окошке появятся результаты расчетов выделенной области, сопровождающиеся выводом текущего значения переменной **FRAME**. По окончании этого процесса на экране появится окно проигрывателя анимации (Рис. 7б).

5. Просмотр анимации в проигрывателе происходит после нажа-

тия кнопки воспроизведения в левом нижнем углу окна.

$m := 1$ $L := 0.5$ $g := 9.81$ $t_{\text{end}} := 10$ $\alpha := 50 \cdot \text{deg}$

Given Начальные условия

$$x(0) = L \cdot \sin(\alpha) \quad x'(0) = 0 \quad y(0) = -L \cdot \cos(\alpha) \quad y'(0) = 0$$

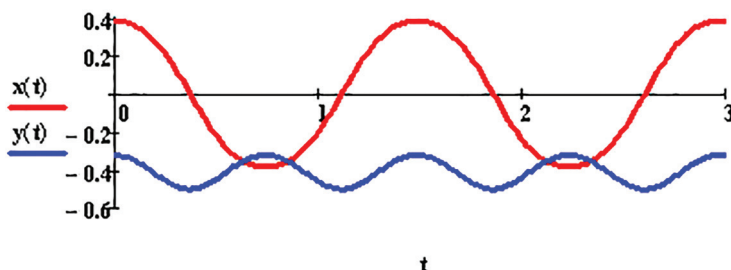
$$F(0) = -m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad \text{Сила натяжения нити}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = L^2 \quad m \cdot x''(t) - F(t) \cdot \frac{x(t)}{L} = 0 \quad \text{Баланс сил по оси } x$$

$$m \cdot y''(t) + m \cdot g - F(t) \cdot \frac{y(t)}{L} = 0 \quad \text{Баланс сил по оси } y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ F \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ F \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} \right]$$

$$t := 0, 0.01 \dots t_{\text{end}}$$

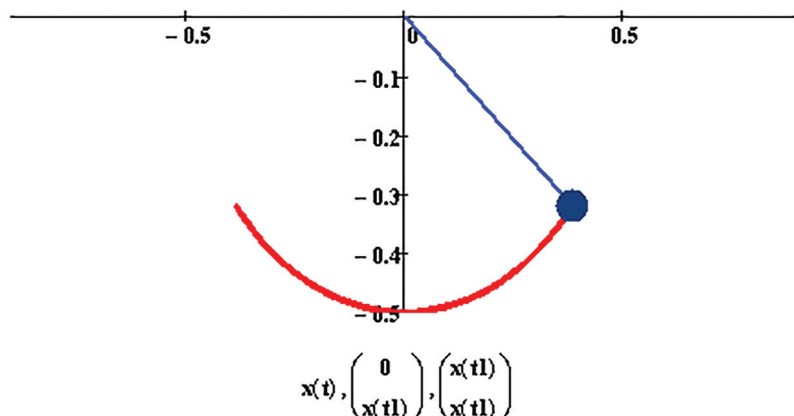


$$t1 := \text{FRAME} \cdot \frac{t_{\text{end}}}{100}$$

$$y(t1) = -0.321$$

$$x(t1) = 0.383$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ 0 \\ y(t1) \\ y(t1) \\ y(t1) \end{pmatrix}$$



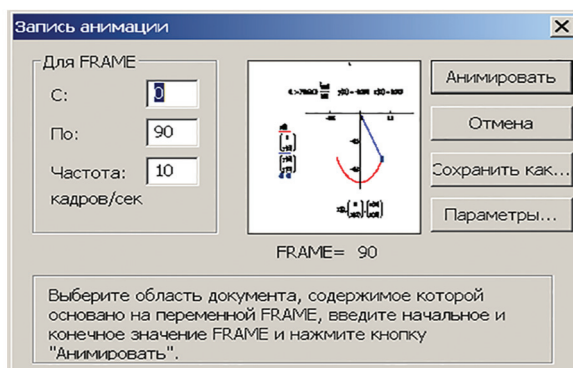


Рис. 7а

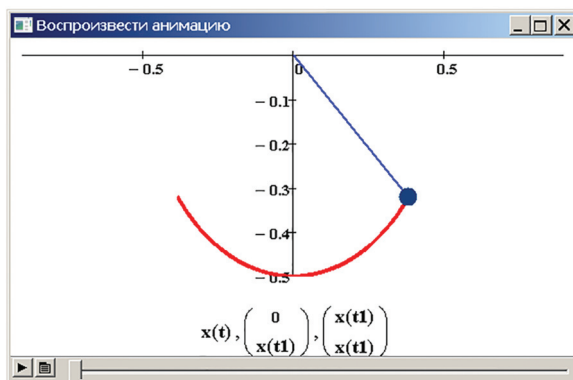


Рис. 7б

Пример из химии

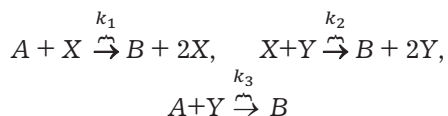
В некоторых химических реакциях наблюдаются периодические изменения концентраций реагирующих веществ во времени. Эта периодичность имеет зависимость скорости от времени. Такие реакции называются колебательными или периодическими. В настоящее время изучено несколько десятков гомогенных и гетерогенных колебательных реакций. Выявлены следующие условия, необходимые для возникновения устойчивых колебаний скорости реакции и концентраций промежуточных веществ:

– устойчивые колебания возникают в открытых системах, где существует возможность поддерживать постоянными концентрации реагентов;

– сложная химическая реакция должна быть в автокаталитическом режиме [4].

Перечисленные условия являются необходимыми для возникновения в химической среде автоколебаний. Изучение колебательных реакций остается актуальной задачей химической кинетики, поскольку оно имеет громадное значение для понимания сути явления катализа, закономерностей периодических

процессов. Д. А. Франк-Каменецкий использовал закономерности автоколебаний для объяснения процессов горения высших углеводов. Ученым предложена следующая кинетическая схема процесса, протекающего с участием двух типов промежуточных продуктов X и Y:



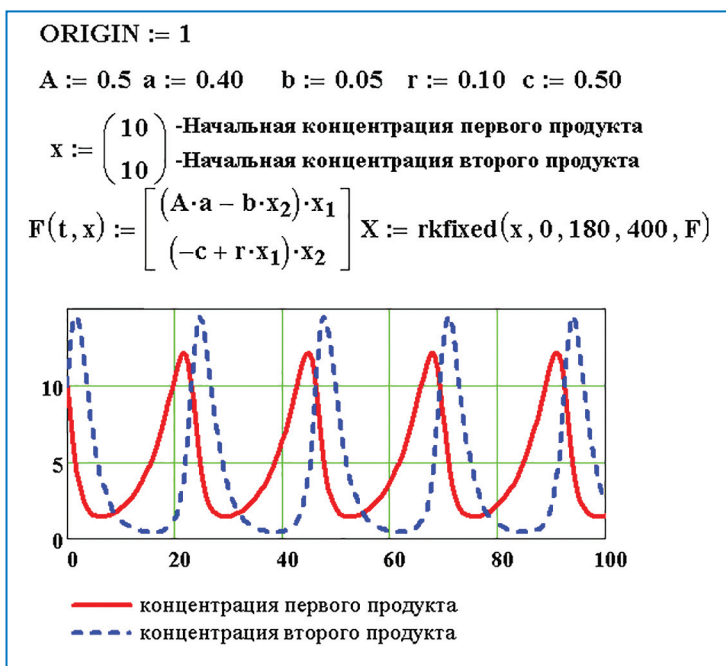
Здесь A – исходное вещество, B – конечный продукт, X – молекулы или радикалы перекисного характера, Y – молекулы и радикалы альдегидного характера. Будем считать, что концентрация реагента не зависит от времени ($A = \text{const}$), т.е. скорость его расходования компенсируется скоростью подачи в реактор. Мы здесь не будем вникать во

все подробности химической кинетики и автокатализа, остановимся в изучении следующей системы уравнений, которые описывают динамику изменения во времени промежуточных продуктов:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = aX(t) - bX(t)Y(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} = cX(t)Y(t) - rY(t). \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений показывает периодический характер изменения искомых функций во времени. Приведем численное решение системы уравнений средствами пакета MathCAD (Листинг 7).

Первая строка представляет собой встроенную переменную **ORIGIN**. Встроенная функция **rkfixed** используется для поиска решения с помощью метода Рунге-Кутты.



Листинг 7

Пример из биологии

Рассмотрим популяцию живых организмов, насекомых и животных, которые являются основными объектами науки биологии. Известно, что изолированная популяция развивалась бы по экспоненциальному закону (по закону Мальтуса) в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко. Впервые системный фактор, ограничивающий рост популяции, описал Ферхюльст в дифференциальном уравнении логистического роста [5]:

$$\frac{dx}{dt} = kx \left(1 - \frac{x}{K} \right).$$

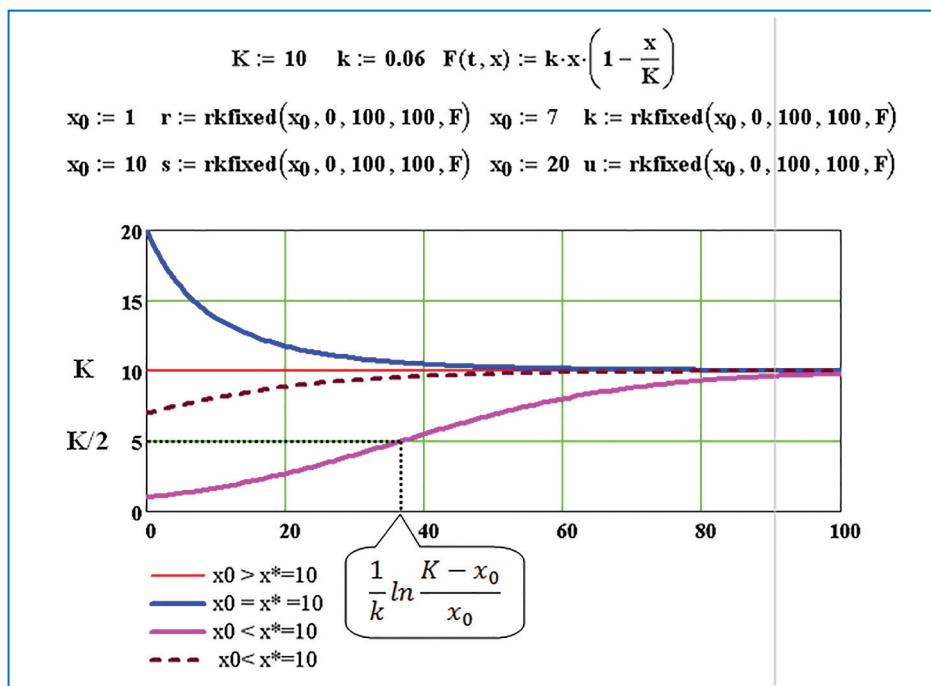
Данное уравнение обладает двумя важными свойствами. При малых значениях x численность

возрастает экспоненциально, при больших — приближается к определенному пределу K .

Эта величина K , называемая емкостью экологической ниши популяции, определяется ограниченностью пищевых ресурсов, мест для гнездования, многими другими факторами, которые могут быть различными для разных видов. Таким образом, емкость экологической ниши представляет собой системный фактор, который определяет ограниченность роста популяции в данном ареале обитания.

Аналитическое решение уравнения имеет вид:

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{kt}}{K - x_0 + x_0 e^{kt}}.$$



Листинг 8

Эта формула описывает кинетическую кривую. То есть зависимость численности популяции от времени. Ход кинетических кривых для разных начальных условий представлен на листинге 8. Если начальное значение $x_0 < K/2$, кривая роста имеет точку перегиба. Если $x_0 > K$, численность со временем убывает. В случае если начальная численность меньше половины максимальной, кривая $x(t)$ имеет точку перегиба с координатами

$$\left(\frac{1}{k} \ln \frac{K - x_0}{x_0}, K/2 \right).$$

Литература

1. Мукушев Б.А. Небесная механика в компьютерных экспериментах // Потенциал. – 2021. – №8. – с.64–77.
2. Кирьянов Д. Mathcad 14 в подлиннике. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 682 с.
3. Очков В. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 370 с.
4. Коробов В.И., Очков В. Ф. Химическая кинетика: введение с Mathcad / Maple / MCS. – М.: Горячая линия-Телеком, 2009. – 384 с.:
5. Романов М.Ф., Фёдоров М.П. Математические модели в экологии: Учеб. пособие / СПб.: 2003. – 239 с.

Ордината точки перегиба представляет собой половину максимальной численности, а абсцисса зависит как от емкости популяции K , так и от константы собственной скорости роста k – чем выше генетические возможности популяций, тем скорее наступает перегиб на кривой численности.

Здесь используется встроенная функция **rkfixed**, которая с помощью метода Рунге-Кутты производит расчеты и дает графическое решение дифференциального логистического уравнения.

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Нельзя говорить о каких-то великих достижениях и успехах, доколе на земле существуют несчастные дети.

Все мы гении. Но если вы будете судить рыбу по её способности взбираться на дерево, она проживёт всю жизнь, считая себя дурой.

Среди беспорядка найдите простоту; среди раздора найдите гармонию; в трудности найдите возможность.

Логика может привести вас от пункта А к пункту Б, а воображение — куда угодно.

Альберт Эйнштейн