

Златопольский Дмитрий Михайлович
Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики Московского городского педагогического университета.

Об уравновешенной троичной системе счисления

В статье описывается система счисления, в которой используется отрицательная цифра, отмечаются её особенности (в том числе преимущества) и приводятся примеры использования.

Уравновешенной, или симметричной[1], троичной системой называется система счисления с основанием 3, но использующая для записи чисел цифры 0, 1 и –1. В 1840 году её предложил французский математик и изобретатель механических устройств для вычислений Леон Лаланн.

Строго говоря, работа Лаланна первой не была [1]. Так, ещё в 1811 году английский математик Питер Барлоу, описывая разные системы счисления, показал в одном из примеров, что десятичное число 716 в троичной системе будет равно 222112, или же $3^6 - 3^2 - 3 - 1$. Сейчас мы бы сказали, что в развёрнутой форме записи[2] последнее выражение можно представить в виде:

$$1 \cdot 3^6 + 0 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + (-1) \cdot 3^1 + (-1) \cdot 3^0,$$

то есть с использованием цифры –1.

Обсудим связь «обычной» троичной системы и уравновешенной.

Некоторое десятичное число X можно представить в троичной системе как:

$$X = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_3,$$

то есть в развёрнутой форме записи:

$$X = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 3 + a_0,$$

где цифры $a_0, a_1, \ldots, a_n$ могут принимать значения 0, 1 или 2.

Можно доказать, что

$$2 \cdot 3^m = 3^{m+1} - 3^m.$$

Введём «отрицательную цифру» 1 и обозначим её $\overline{1}$. Тогда последнее равенство можно записать в виде:

$$2 \cdot 3^m = 3^{m+1} + \overline{1} \cdot 3^m.$$

[1] Почему систему называют «симметричной», понятно – значения её цифр (–1, 0 и 1) на числовой оси расположены симметрично относительно нуля. А почему «уравновешенной» – см. в конце данной статьи.

[2] Развёрнутой записью числа вида $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ в системе счисления с основанием p называют запись вида: $a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0$.

А это означает, что любое целое число X можно изобразить в троичной системе счисления с помощью цифр 0, 1 и $\overline{1}$ (заменив в его развёрнутой записи цифры 2 на соответствующую разность):

$X = b_m \cdot 3^m + b_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 3 + b_0$,

где каждый из коэффициентов b_m, $b_{m-1}, \ldots$, b_0 может быть равным 0, 1 или $\overline{1}$.

Иными словами, для преобразования обычной троичной записи в запись в уравновешенной троичной системе нужно для каждой двойки выполнить следующие действия:

1) заменить её на цифру $\overline{1}$;

2) в соседнем слева разряде добавить 1 (если в этом разряде в результате получается 2, то для него указанные действия повторяются).

Например, число 100, которое обычным образом записывается в троичной системе как 10201, во втором варианте будет иметь вид

$11\,\overline{1}\,01$ $(3^4 + 3^3 - 3^2 + 1 = 100)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Запишите в уравновешенной системе троичные числа:

1) 210;

2) 1202.

2. Запишите в уравновешенной троичной системе десятичные числа:

1) 17;

2) 53.

Уравновешенная троичная система счисления обладает многими весьма привлекательными свойствами.

Во-первых, она даёт возможность единообразно выражать как положительные, так и отрицательные числа (при использовании двоичной системы отрицательные числа в компьютере представляются в «искусственном» дополнительном коде). В ней знак числа определяется первым символом в «естественной» записи числа в этой системе: если он равен 1, то число положительное, а если –1 $(\overline{1})$, то отрицательное.

Очень просто перейти к противоположному числу, заменив 1 на –1 $(\overline{1})$ и наоборот. В самом деле:

$-8_{10} = \overline{1}\,01_3$; $8_{10} = 10\,\overline{1}_3$.

Для округления вещественного троичного числа до ближайшего целого достаточно отбросить его дробную часть. Это свойство также достаточно очевидно, поскольку самая большая возможная положительная дробная часть, $(0, 111\ldots)_3$, представляет сумму $1/3 + 1/9 + 1/27 + \ldots$, которая всегда меньше, чем $1/2$ (а, соответственно, самая большая по модулю отрицательная дробная часть, $(0\ldots)_3$, всегда больше, чем $1/2$).

Арифметические операции в троичной симметричной системе практически не сложнее двоичных, а если учесть, что в случае чисел со знаком двоичная арифметика использует искусственные коды, то окажется, что троичная даже проще. Операция сложения всякой цифры с нулём даёт в результате эту же цифру. Сложение +1 с –1 даёт нуль. И только сумма двух +1 или двух –1 формируется путём переноса в следующий разряд цифры того же знака, что и слагаемые, и установки в текущем разряде цифры противоположного знака. Полностью таблица сложения, которую будем использовать для обычного сложения чисел «столбиком», имеет вид:

+	$\overline{1}$	**0**	**1**
$\overline{1}$	$\overline{1}1$	$\overline{1}$	0
0	$\overline{1}$	0	1
1	0	1	$1\overline{1}$

Примечание. Запись $1\,\bar{1}$ означает, что результат равен $\bar{1}$ и ещё 1 переносится в следующий разряд, запись $\bar{1}\,1$ – что результат равен 1 и ещё $\bar{1}$ переносится в следующий разряд. Здесь же заметим, что по аналогии с битами двоичной системы счисления разряды чисел в такой троичной записи называют «тритами».

Сложим в уравновешенной троичной системе числа 412 и 181:

$412_{10} = 120021_3 = 1\,\bar{1}\,\bar{1}\,01\,\bar{1}\,1_3.$

$181_{10} = 20201_3 = 1\,\bar{1}\,1\,\bar{1}\,0\,1_3.$

	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1
+		1	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0	1
	1	$\bar{1}$	1	1	0	0	$\bar{1}$

Легко проверить, что $1\,\bar{1}\,1100\,\bar{1}_3 = 593_{10}$.

Задание для самостоятельной работы

3. Найдите в уравновешенной троичной системе сумму чисел:

1) $10\,\bar{1}\,1\,\bar{1}$ и $1\,\bar{1}\,0\,\bar{1}$;

2) $1\,\bar{1}\,\bar{1}\,011$ и $1\,\bar{1}\,011$.

Результаты представьте в десятичной системе.

Столь же просто производится вычитание: для этого достаточно изменить знак вычитаемого на противоположный и сложить число с уменьшаемым. Конечно, можно проводить и «непосредственное» вычитание. Для этого удобно составить таблицу вычитания. Обсудим её, поскольку при составлении такой таблицы получается ряд интересных результатов.

Для следующих случаев ничего необычного нет:

1) $0 - 0 = 0$;

2) $1 - 0 = 1$;

3) $1 - 1 = 0$;

4) $0 - \bar{1} = 1$ (это следует из правил алгебры и из таблицы сложения, приведённой выше);

5) $\bar{1} - \bar{1} = 0$ (по тем же причинам).

А теперь – то самое, интересное.

Сколько будет $1 - \bar{1}$? Конечно, $1\,\bar{1}$ (по правилам алгебры $1 - (-1) = 2 = 1\,\bar{1}$). Но возникает вопрос, что происходит в соседнем слева разряде при вычитании многозначных чисел – единица заимствуется или добавляется? Для ответа рассмотрим пример: $10_{10} - 2_{10} = 101_3 - 1\,\bar{1}_3$:

	1	0	1
–		1	$\bar{1}$
	1	0	$\bar{1}$

(Результат равен 8_{10}.)

Анализ второго справа разряда показывает, что $\bar{1}$, «перешедшая» из крайнего правого разряда, *складывается* с цифрами 0 и 1!

Аналогично, для варианта $\bar{1} - 1 = \bar{1}\,1$ цифра $\bar{1}$ переносится в следующий разряд, где также добавляется.

Задания для самостоятельной работы

4. Составьте полную таблицу вычитания в уравновешенной троичной системе, в которой учитывается возможный перенос из разряда справа:

Вычитаемое	**Перенос из разряда справа**								
	0			$\bar{1}$			1		
	Уменьшаемое								
	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$									
0									
1									

5. Найдите разность в уравновешенной троичной системе (используя составленную таблицу или заменив вычитание сложением):

1) $10\bar{1}1 - \bar{1}\,\bar{1}1$;

2) $11\bar{1}\,\bar{1}0 - 1\bar{1}11$.

Результаты представьте в десятичной системе.

Таблица умножения – совсем простая: умножение на нуль даёт нуль, умножение на 1 повторяет множимое, умножение на –1 инвертирует множимое (заменяет 1 на –1, а –1 на 1, то есть изменяет знак числа – см. выше):

×	$\bar{1}$	**1**
$\bar{1}$	1	$\bar{1}$
1	$\bar{1}$	1

Умножение многозначных чисел сводится к простым операциям изменения знака (при необходимости) и сложения. Умножим, например, 5_{10} на 12_{10}:

$5_{10} = 1\bar{1}\bar{1}_3$

$12_{10} = 110_3$

		1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	
	×		1	1	0
		1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	
1		$\bar{1}$	$\bar{1}$		
1		$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0

или:

		1	1	0
	×	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
		1	1	0
1		1	0	
1		1	0	
1		$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0

Переведя для проверки троичное число $1\bar{1}1\bar{1}0$ в десятичную систему, получим 60 (то есть результат правильный).

В заключение заметим, что уравновешенная троичная система счисления применялась в электронно-вычислительной машине «Сетунь»[1], разработанной в 1958 году в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова под руководством Николая Петровича Брусенцова (1925 – 2014).

Ещё один пример применения этой системы связан с такой старинной задачей: «В лавке бедного торговца вместо гирь было всего 4 камня. Однако с помощью этих камней он на рычажных чашечных весах совершенно правильно взвешивал предметы массой 1, 2, ..., 40 кг. Какого веса были камни?»[2].

Оказывается, что для получения ответа, который равен 1, 3, 9 и 27 кг, следует использовать троичную систему счисления («обычную»). А для того чтобы определить, какие камни (или гири такого же веса) надо класть вместе с грузом, а какие – на свободную чашку, чтобы при грузе массой X кг весы были в *равновесии*, применяется *уравновешенная* троичная система счисления [2].

[1] Сетунь – название речки, протекающей неподалёку от МГУ.

[2] Обычно эту задачу называют «задачей Баше на взвешивание», потому что она была упомянута в книге Клода Гаспара Баше «Problémes plaisans et délectables» («Приятные и восхитительные задачи»), опубликованной в 1612 году. Баше спрашивал, какое минимальное количество гирь необходимо для того, чтобы уравновесить любой вес от 1 до 40 фунтов. За 400 лет до Баше её сформулировал Фибоначчи (Леонардо Пизанский). Упомянутый в начале статьи пример, приведённый Питером Барлоу, был связан с решением задачи Баше.

Литература

1. *Шилов В.В.* Уравновешенная троичная система счисления и Томас Фаулер. / http://housea.ru/index.php/history/51167.

2. *Фомин С.В.* Системы счисления. – М.: Наука, 1987.

3. *Уоррен Г.* Алгоритмические трюки для программистов. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Неожиданные определения

Невежество – это ночь нашего разума – ночь беззвёздная и безлунная.

Конфуций

Предрассудок – дитя невежества.

У. Хэзлитт

Природа – единственная книга, каждая страница которой полна глубокого содержания.

И. Гёте

Знание – начало сомнений.

В. Кротов

Закон – рубеж, отвоёванный у непонимания.

Р. Степанов

Трудолюбие – душа дела и краеугольный камень процветания.

Ч. Диккенс

Желание – враг разумной цели.

Ахмед Недим

Суеверие – это почитание пустоты в облике тайны.

В. Кротов

Ценность – то, чему нет цены.

А.Круглов