



Мукушев Базарбек Агзашулы

*Профессор Казахского агротехнического университета
им. С.Сейфуллина, доктор педагогических наук,
г. Нур-Султан, Республика Казахстан*

Небесная механика в компьютерных экспериментах

В течение нескольких веков физические явления и объекты исследовались с двух позиций физической науки – теоретической и экспериментальной. С момента появления компьютеров (впервые они оказались в руках физиков в связи с созданием атомной бомбы) существенно расширились возможности исследований – возник новый мощнейший инструмент. В области экспериментальной физики появилась возможность обработки необозримо больших массивов экспериментальных данных, о которых раньше физики не могли даже и помыслить.

И в теоретическую физику компьютеры вошли почти мгновенно. Первые нетривиальные результаты были получены уже в 50-е годы великим итальянским физиком Э. Ферми (и великим теоретиком, и великим экспериментатором – уникальный случай) в работе, выполненной совместно Дж. Пастой и С. Уламом. Исследователи пытались, рассмотрев одномерную цепочку частиц, соединенных пружинками,

проследить переход цепочки в состояние термодинамического равновесия. Для этого они взяли не привычные для школьников пружинки, а пружинки, в которых действующие между частицами силы содержат нелинейные члены (силы не просто пропорциональные удлинению пружинки). Задали некоторое начальное возмущение в цепочке частиц, ожидая, что через достаточно большое время в движение будут в равной степени вовлечены все частицы цепочки. Результат удивил: система через некоторое время вернулась в исходное состояние. Видимо, это была *первая задача по теоретической физике*, решенная на компьютере.

В наше время никому из физиков не надо доказывать важность компьютера. Разумеется, компьютерная программа не делает нового физического открытия. В компьютерные программы чаще всего заложены обычные законы и закономерности физики (кроме особых случаев поисковых исследований). Однако уравнения физики далеко не

всегда позволяют получить аналитические (в буквах) решения. К тому же весьма часто они оказываются чрезвычайно громоздкими и трудно-

обозримыми. Современные компьютеры обходят эту трудность, делая решения еще и наглядными. Как? Это будет показано в статье.

Введение

С помощью вычислительных экспериментов ученые стали исследовать физические явления с применением достаточно реальных компьютерных моделей, недоступных для аналитических методов теоретической физики. Это позволяло получать более достоверные результаты, чем при использовании методов теоретической физики. С другой стороны, компьютерный эксперимент может быть проведен в условиях, недоступных для обычных (натурных) экспериментов. Поэтому вычислительный эксперимент широко применяется в физике твердого тела, плазмы, неидеального газа и жидкости, астрономии и т.д. [1].

Компьютерный (вычислительный) эксперимент – это эксперимент над математической моделью объекта исследования на ЭВМ, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие её параметры, и на этой основе делаются выводы о свойствах объекта, описываемого математической моделью.

Для реализации вычислительных экспериментов нужно придерживаться следующей последовательности действий: создание физической модели исследуемого объекта – построение математической модели объекта – создание и реализация компьютерной программы – оформление результатов эксперимента.

Результаты компьютерного эксперимента могут быть следую-

щими: вычисление параметров физического объекта, целостное изучение физических процессов и явлений, построение графика зависимости между физическими величинами, нахождение траектории движения материальных точек или частиц, моделирование физических явлений в виде анимации (имитационное моделирование) и др. Математическая модель создается посредством численных методов математики, в качестве языка программирования можно использовать Microsoft Excel, MathCAD, Pascal, C⁺⁺, Python и др[2].

Мы рассмотрим некоторые компьютерные эксперименты, предназначенные для изучения закономерностей небесной механики. Нами использован в качестве языка программирования пакет прикладных программ (ППП) MathCAD.

Пакет прикладных программ MathCAD – вычислительное средство, позволяющее проводить на компьютере разнообразные научные и технические расчеты, предоставляющее пользователю инструменты для работы с уравнениями, формулами, числами, графиками и текстами, снабженное простым в освоении графическим интерфейсом. Вычислительные средства Mathcad обеспечивают расчеты по сложным математическим формулам, включая численные методы и аналитические преобразования.

ППП Mathcad имеет большой набор встроенных математических

функций и прикладных программ, что позволяет вычислять ряды, суммы, произведения, интегралы, производные, работать с комплексными числами, решать линейные и нелинейные уравнения, а также дифференциальные уравнения и системы, проводить минимизацию и максимизацию функций, выполнять векторные и матричные операции, статистический анализ и т.д. Пакетом прикладных программ Mathcad автоматически ведётся контроль размерностей и пересчёт в разных системах измерения (СИ, СГС и др.). Благодаря этим математическим и техническим возможностям MathCAD стал самым популярным компьютерным инструментом для школьников, студентов, ученых и инженеров.

Вычислительные средства MathCAD, сильно отличаются от традиционных языков программирования (Pascal, C⁺⁺ и др.), которые изучаются учениками средней школы. В отличие от классического инструмента программирования или электронных таблиц интерфейс Mathcad отображает на дисплее естественный математический знак (деление, умножение, квадратный корень, интеграл, сумма и т.д.)), понятный даже людям, далеким от компьютеров. Программы в среде MathCAD особо не отличаются от записей математических уравнений и очень близки к стандартному математическому языку, что создает простоту применения этой системы и наглядность математических действий.

Несмотря на то, что эти программы в основном ориентированы на пользователей-непрограммистов, MathCAD также используется в компьютерном моделировании разнообразных природных и общест-

венных процессов. Изучение пакета MathCAD школьниками в элективных курсах должно повысить качество их знаний по информатике.

1 эксперимент. Нужно построить посредством ППП MathCAD двумерный график потенциальной энергии тела $m = 1$ кг в гравитационном поле Земли в зависимости от расстояния r до центра Земли. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м., гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ н·м²/кг². Можно считать плотность Земли постоянной. Следует воспользоваться формулой распределения потенциальной энергии гравитационного поля для однородной планеты в интервале $0 \leq r \leq R$:

$$U(r) = \frac{GmM}{2R^3}(3R^2 - r^2).$$

Необходимо найти значения потенциальной энергии этого тела в центре и на поверхности Земли.

Физическая модель. Потенциальная энергия системы взаимодействующих тел – это физическая величина, численно равная работе, совершаемой силами взаимодействия при взаимном удалении всех тел системы из данного расположения на бесконечное расстояние друг от друга. Потенциальная энергия взаимного тяготения между двумя телами или между телом и системой тел носит название «энергия связи» [3].

Рассмотрим изолированную систему, состоящую из двух точечных тел (m и M) на расстоянии r друг от друга. Для расчета гравитационной энергии $U(r)$ нужно вычислить работу силы тяготения по удалению двух

тел на бесконечно большое расстояние друг от друга. Поскольку сила тяготения различна в разных точках, то для вычисления работы ее на всем перемещении нужно просуммировать, т.е. проинтегрировать, работы на элементарных, бесконечно малых перемещениях.

Математическая модель. Обозначим работу перемещения тела из данного положения в бесконечность через $A_{r,\infty}$ и вычислим потенциальную энергию данной системы:

$$U(r) = A_{r,\infty} = -\int_r^{\infty} F dr = \\ = -GmM \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -G \frac{mM}{r}.$$

Рассмотрим два тела массами M и m , которые взаимодействуют друг с другом и являются изолированной системой. Если берем в качестве

нулевого уровня потенциальной энергии этой системы бесконечно удаленное состояние, тогда при любом расстоянии эти тела имеют отрицательную потенциальную энергию, равную $-G \frac{mM}{r}$.

$$U(R) = -G \frac{mM}{R} \text{ — потенциальная}$$

энергия тела для случая, когда оно расположено на поверхности планеты.

$$U(0) = -\frac{3GmM}{2R} \text{ — потенциальная}$$

энергия тела, когда оно находится в центре планеты.

Создание и реализация компьютерной программы. Физические величины и небольшую программу для вычисления потенциальной энергии системы «тело – Земля» напишем на языке MathCAD (Листинг 1).

$M := 6,00 \cdot 10^{24}$ – масса Земли $R := 6,40 \cdot 10^6$ – радиус Земли

$G := 6,67 \cdot 10^{-11}$ $m := 1$

$$U(r) := \begin{cases} -G \cdot \frac{m \cdot M}{|r|} & \text{if } |r| \geq R \\ \left[G \cdot \frac{m \cdot M}{R} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{3}{2} \right] \right] & \text{if } |r| < R \end{cases}$$

Листинг 1

Результаты эксперимента: На рисунке 1 представлен график потенциальной энергии тела (потенциальная яма) массой $m = 1$ кг в зависимости от расстояния r в гравитационном поле планеты. В центре планеты тело имеет потенциальную энергию

$$U(0) = -\frac{3GmM}{2R} \approx -9,38 \cdot 10^7 \text{ (Дж)},$$

а на поверхности планеты

$$U(R) = -G \frac{mM}{R} \approx -6,25 \cdot 10^7 \text{ (Дж)}.$$

Когда речь идет о «потенциальной яме» изолированных небесных тел, принято использование формулы $U(R) = -G \frac{mM}{R}$.

ППП MathCAD имеет возможность вычисления значения потенциальной энергии на каждой точке графика. Для этого нужно пользоваться командой «Трассировка». Поэтому эти параметры можно вычислить либо графически, либо аналитически. Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ ($U(r)$ – в джоулях, r – в метрах).

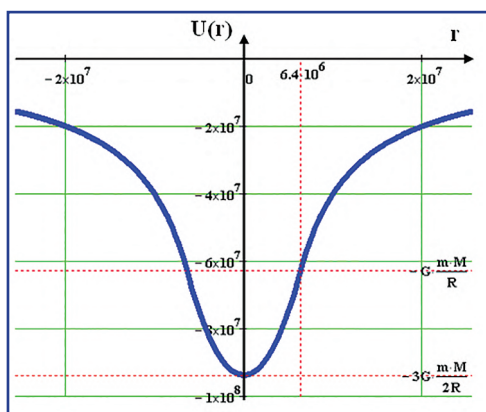


Рис. 1

2 эксперимент. а) Построить двумерный график потенциальной энергии тела $m = 1\text{ кг}$ в суммарном гравитационном поле изолированной системы «Земля-Луна» в зависимости от расстояния r до центра Земли.

б) создать трехмерный график потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле Земли и Луны.

Примечание: Земля и Луна рассматриваются как материальные точки массами $M_З$ и $M_Л$. Нужно использовать данные, представленные в условии первого эксперимента.

а) *Физическая модель:* Единичная масса, находящаяся в гравитационном поле системы Земля-Луна, испытывает силу притяжения двух небесных тел. По этой причине ана-

лиз данного явления становится более сложным по сравнению с ситуацией, которая была рассмотрена в 1 эксперименте. Мы будем использовать принцип суперпозиции для вывода общей формулы потенциальной энергии единичной массы в поле системы Земля-Луна.

Математическая модель: На основе принципа суперпозиции напишем выражение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия единичной массы m с системой Земля-Луна.

$$U(r) = -m \cdot \phi(r) = -G \frac{mM_З}{r} - G \frac{mM_Л}{|r-l|},$$

где r – расстояние от центра Земли до места единичной массы, а l – расстояние между Землей и Луной. Единичная масса находится на прямой, соединяющей центры Земли и Луны [4].

Создание и реализация компьютерной программы: На листинге 2 представлена компьютерная программа.

Результаты эксперимента: На рисунке 2 представлен двумерный график потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле Земли и Луны. В отличие от первого эксперимента Земля и Луна представлены как точечные массы. Из графика видно, что численные значения глубин «потенциальных ям» Земли и Луны представляют собой большую величину. Теоретически эти значения равны отрицательному бесконечному числу. Этот факт несовпадений компьютерных и теоретических результатов связан с ограниченностью вычислительной мощности компьютера. Глубина «потенциальной ямы» до поверхности Луны вычислена нами и она равна $-3,88 \cdot 10^6$ Дж [4].

$$M_1 := 6,00 \cdot 10^{24} - \text{Масса Земли}; \quad M_2 := \frac{M_1}{81} - \text{Масса Луны}; \quad m := 1$$

$$G := 6,67 \cdot 10^{-11} \quad l := 384,4 \cdot 10^6 - \text{Расстояние между центрами Земли и Луны}$$

$$U(r) := -G \cdot \frac{m \cdot M_1}{|r|} - G \cdot \frac{m \cdot M_2}{|l - r|}$$

Листинг 2

В точке С любое небольшое тело испытывает одинаковую силу притяжения со стороны Земли и Луны. Эта место носит название точки «пересадки» [4]. Пользуясь инструментом «Трассировка», нашли величину потенциальной энергии единичной массы в точке С. $U(r_C) \approx -1,28 \cdot 10^6$ Дж. Имеется громоздкое теоретическое решение определения величины по-

тенциальной энергии единичной массы в точке С, или «пересадки» [4]. Здесь демонстрируются явные преимущества компьютерных инструментов перед другими средствами при исследовании сложных астрономических задач. Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ (ордината $U(r)$ – в джоулях, абсцисса r – в метрах).

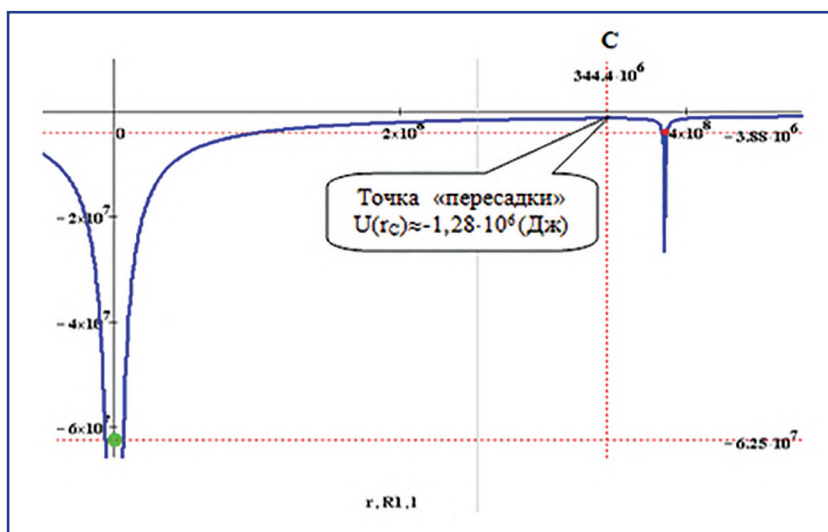


Рис. 2

б) Физическая и математическая модели потенциальной энергии взаимодействия системы «Земля–Луна» и единичной массы в условиях трехмерного пространства создаются, как в предыдущем эксперименте.

Создание и реализация компьютерной программы: На листинге 3 представлена компьютерная программа, составленная в среде MathCAD.

Условные координаты центра Земли: $X1 := 0$ $Y1 := 0$ Единичная масса: $m := 1$
 Условные координаты центра Луны: $X2 := 1$ $Y2 := 0$
 Массы Земли и Луны: $M1 := 6.00 \cdot 10^{24}$ $M2 := \frac{M1}{81}$
 Гравитационная постоянная: $G := 6.67 \cdot 10^{-11}$
 Задание числа узлов сетки: $n := 100$ $k := 0..n-1$ $j := 0..n-1$
 Задание начальных и конечных координат:
 по оси OX: $x1 := X1 - 1$ $x2 := X2 + 1$
 по оси OY: $y1 := Y1 - 1$ $y2 := Y2 + 1$
 Шаг по оси OX: $\Delta x := \frac{x2 - x1}{n}$ шаг по оси OY: $\Delta y := \frac{y2 - y1}{n}$
 Значения координат по оси OX: $x_k := x1 + \Delta x \cdot k$
 Значения координат по оси OY: $y_j := y1 + \Delta y \cdot j$
 Задание потенциальной энергии системы: $U(x, y) := \frac{-G \cdot m \cdot M1}{\sqrt{(X1 - x)^2 + (Y1 - y)^2}} - \frac{G \cdot m \cdot M2}{\sqrt{(X2 - x)^2 + (Y2 - y)^2}}$
 вычисление значений потенциальной энергии в узлах сетки: $M_{k,j} := U(x_k, y_j)$

Листинг 3

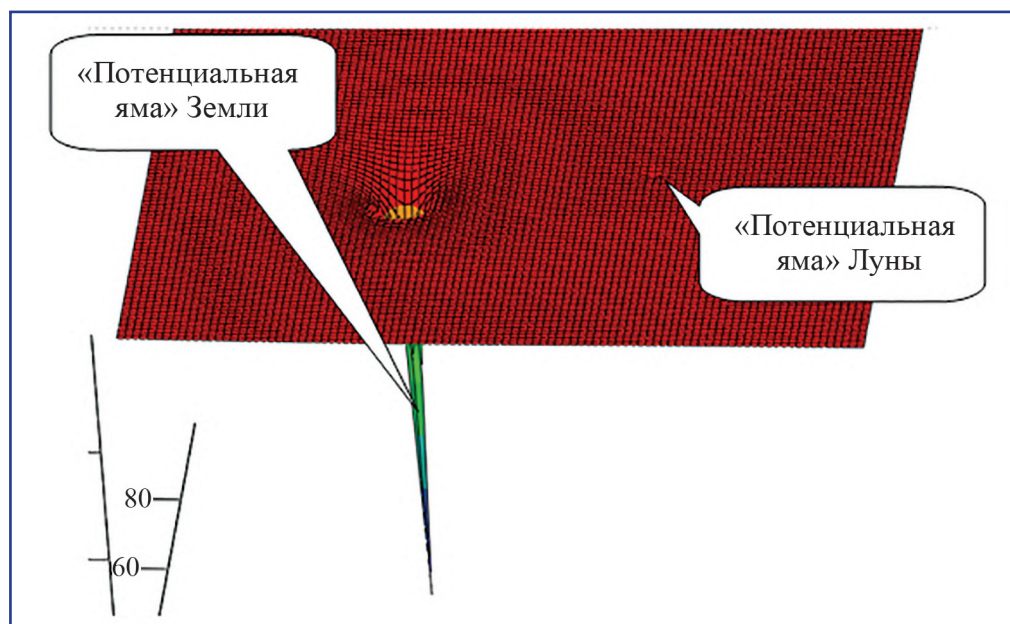


Рис. 3

Результаты эксперимента:

На рисунке 3 представлен трехмерный график потенциальной энергии единичной массы в гравитационном поле Земли и Луны, которые являются точечными массами.

Нами получен не количественный, а качественный трехмерный график, поскольку координаты центра Земли и Луны в компьютерной программе указаны в условных числах. Из графика отчетливо видна «потенциальная яма» Земли и Луны, теоретически она должна быть бесконечно глубокой. Если мы увеличим число узлов сетки (Листинг 3), тогда контуры «потенциальных ям» станут более отчетливыми и глубины более глубокими. Из-за ограниченности мощности компьютера нельзя построить бесконечно глубокую «потенциальную яму». «Потенциальная яма» Луны находится в правой стороне объемного графика, который представляет собой сложную рельефную поверхность. Эта поверхность характеризует потенциальную энергию единичной массы в гравитационном поле системы Земля и Луна.

3 эксперимент. Посредством ППП MathCAD нужно построить траектории движения космического аппарата (КА) около Земли.

а) ИСЗ имеет скорость $v_0 = 7,56$ км/с на высоте от поверхности Земли $h=500$ км под углом 0° к горизонту;

б) Космический корабль приобрел вторую космическую скорость ($v_0 = 11,16$ км/с) в точке, близкой к поверхности Земли под углом 0° к горизонту;

в) ИСЗ стартует в точке, близкой к поверхности Земли со скоростью $v_0 = 9,36$ км/с под углом 0° к горизонту;

г) Баллистическая ракета вылетает с поверхности Земли под углом 45° к горизонту со скоростью $V_0 = 8,76$ км/с. Найдите координаты точек апогея и падения баллистической ракеты.

Физическая модель. Космический аппарат (КА) совершил перемещение около Земли из точки А в точку В. Он только в точке А приобретает скорость $\vec{V}_0$, составляющую угол с горизонтом α . Спутник находится на высоте h от поверхности Земли. φ_0 – угол между радиус-вектором r и осью Х. α_h – угол между радиус-вектором r и осью У (Рис.4). Считаем, что во время движения на КА действует единственная сила – сила тяготения Земли (в любой момент времени она направлена к центру Земли). Масса космического аппарата не изменяется.

Математическая модель. Уравнение движения КА в поле тяготения Земли имеет вид:

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}.$$

Здесь m и M – масса КА и масса Земли, G – гравитационная постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор, задающий положение КА относительно центра Земли, $\vec{a}$ – ускорение спутника.

Из предыдущей формулы напишем уравнение ускорения для любого момента времени в скалярной форме

$$a(t) = -G \frac{M}{(r(t))^2}$$

$$\text{здесь } (r(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2.$$

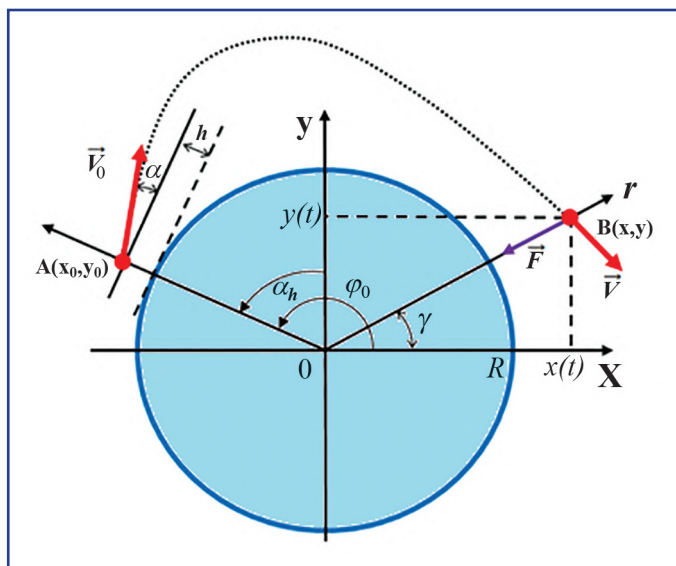


Рис.4

Проекции ускорения на осях X и Y получаются таким образом:

$$a_x(t) = a(t) \cos \gamma \quad \text{здесь}$$

$$\cos \gamma = \frac{x(t)}{r(t)} = \frac{x(t)}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}}.$$

Используя обозначения, приведенные на рисунке 2, проекции ускорения движения КА в произвольный момент времени можно записать в следующем виде:

$$a_x(t) = -G \frac{M}{\frac{3}{2} \cdot (x(t)^2 + y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x(t);$$

$$a_y(t) = -G \frac{M}{\frac{3}{2} \cdot (x(t)^2 + y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot y(t).$$

Используя выражения проекций координаты, скорости и ускорения движения КА на координатных осях X и Y в момент времени t, можно найти значения проекций скорости и координаты КА на этих осях в момент времени (t + Δt):

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x \Delta t;$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y \Delta t$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x \Delta t;$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y \Delta t$$

При этом, чем меньше Δt промежуток времени, тем точнее результаты вычисления. Этот метод называется методом итерации, что относится к численному анализу.

Создание и реализация компьютерной программы. На языке MathCAD сперва нужно написать в виде присваивания в программе следующие постоянные астрономические величины (масса Земли **M**: = 6,00·10²⁴, радиус Земли **R**: = 6,40·10⁶, гравитационное постоянное **G**: = 6.67·10⁻¹¹) и начальные условия: начальный угол между радиус-вектором r и осью X для всех стартов равен π радиану (**φ0**: = $\frac{180 \cdot \pi}{180}$); начальные скорости (**V0**: =

$7.56 \cdot 10^3$, $V0 := 11.16 \cdot 10^3$, $V0 := 9.36 \cdot 10^3$, $V0 := 8.76 \cdot 10^3$); углы начальной скорости КА с горизонтом ($\alpha=0$, $\alpha=0$, $\alpha=0$, $\alpha = \frac{45 \cdot \pi}{180}$); длину траектории ($i:=0..5700$, $i:=0..5700$, $i:=0..11000$, $i:=0..6120$) и высоту КА от поверхности Земли ($h:=5 \cdot 10^5$, $h:=0$, $h:=0$, $h:=0$).

Символ ($:=$) говорит о присваивании значения справа налево. $i:=0..5700$ обозначение следует понимать так: длина траектории имеет 5700 точек.

Ниже представлена основная часть программы построения траектории космического аппарата около Земли (Листинг 4).

$$\begin{aligned}
 \alpha h &:= \phi 0 - \frac{\pi}{2} & x_0 &:= (R + h) \cdot \cos(\phi 0) & y_0 &:= (R + h) \cdot \sin(\phi 0) \\
 Vx_0 &:= V0 \cdot \cos(\alpha + \alpha h) & Vy_0 &:= V0 \cdot \sin(\alpha + \alpha h) & dt &:= 1 & t_0 &:= 0 \\
 ax_0 &:= -G \cdot \frac{M \cdot x_0}{\left[(x_0)^2 + (y_0)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} & ay_0 &:= -G \cdot \frac{M \cdot y_0}{\left[(x_0)^2 + (y_0)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\
 \begin{pmatrix} t_{0+1} \\ ax_{i+1} \\ ay_{i+1} \\ Vx_{i+1} \\ Vy_{i+1} \\ x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} t_i + dt \\ -G \cdot \frac{M \cdot x_i}{\left[(x_i)^2 + (y_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ -G \cdot \frac{M \cdot y_i}{\left[(x_i)^2 + (y_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ Vx_i + ax_i \cdot dt \\ Vy_i + ay_i \cdot dt \\ x_i + Vx_i \cdot dt \\ y_i + Vy_i \cdot dt \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Листинг 4

Результаты эксперимента: На рисунке 5 представлены результаты компьютерных экспериментов, проведенных над движением ИСЗ около Земли, соответствующих начальным условиям (а, б и в). Траектории

движения ИСЗ получены посредством графических инструментов ППП MathCAD. Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ (ордината и абсцисса в метрах).

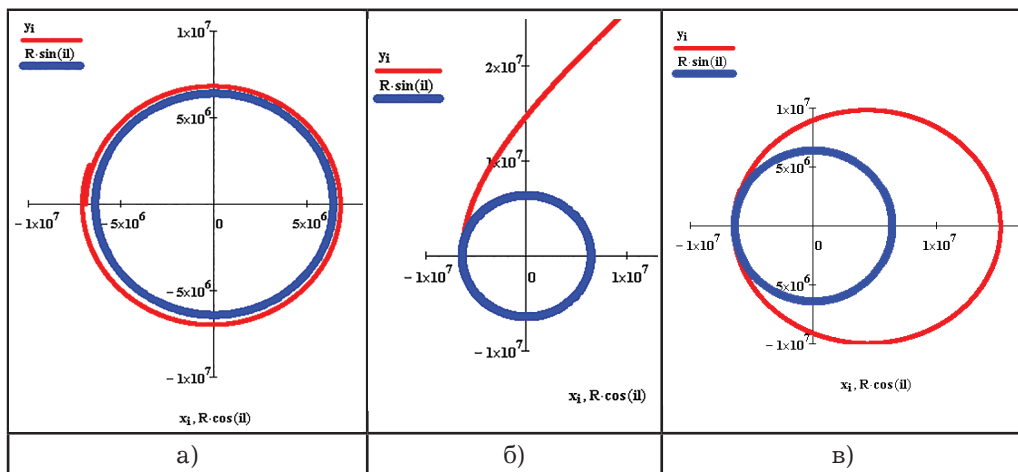


Рис. 5

Анализируя результаты компьютерного эксперимента, делаем выводы: 1) при начальной скорости 7560 м/с ($V_0 := 7,56 \cdot 10^3$), направление которой составляет с горизонтом угол 0° ($\alpha = 0$), КА движется по круговой траектории на высоте от Земли 500 000 ($h := 5 \cdot 10^5$) метров. Значение скорости носит название первой космической скорости; 2) когда КА на поверхности Земли приобретает скорость 11160 м/с (при этом $\alpha = 0$ и $h = 0$), он покидает Землю, и эта величина скорости называется второй космической скоростью; 3) при начальной скорости 9360 м/с КА движется по эллипсоидальной траектории (при $\alpha = 0$ и $h = 0$).

Используя вычислительные возможности ППП Mathcad, находим значения координаты точек апогея и падения баллистической ракеты. Для этого следует пользоваться командой «Трассировка». На рисунке 6 представлены результаты вычислительного эксперимента по исследованию движения баллистической ракеты: получена траектория дви-

жения баллистической ракеты в поле тяготения Земли, определены координаты точек апогея баллистической ракеты $X_A \approx -7,98 \cdot 10^6$ (м), $Y_A \approx 1,18 \cdot 10^7$ (м) и падения $X_{II} \approx 2,68 \cdot 10^6$ (м), $Y_{II} \approx 6,09 \cdot 10^6$ (м). Единицы по осям системы координат представлены в системе СИ (ордината и абсцисса в метрах).

4 эксперимент. Нужно исследовать полет космического аппарата (КА) с Земли к Луне с помощью компьютерного эксперимента. Построить различные виды траектории полета в зависимости от скорости КА, обретенной на поверхности Земли. *Примечание.* КА стартует с Земли под углом 0° к горизонту.

Физическая модель. Известно, что длительность полета КА с Земли до Луны в порядке $(1,0 \div 1,6)$ суток. Можно считать, что за этот промежуток времени Луна двигалась прямолинейно. В связи с тем, что линейная скорость Луны (1023 м/с) при движении вокруг Земли много раз меньше, чем скорость полета КА. Эти

факторы убедительно доказывают, что в данной небесной системе особо не проявляются силы инерции. Рассмотренное нами явление можно отнести к *не возмущенным задачам*. Если выберем такую простую мо-

дель, которую составляют изолированная система «Земля-Луна» и движущийся КА внутри этой системы, тогда при расчете движения космического аппарата не будет больших погрешностей.

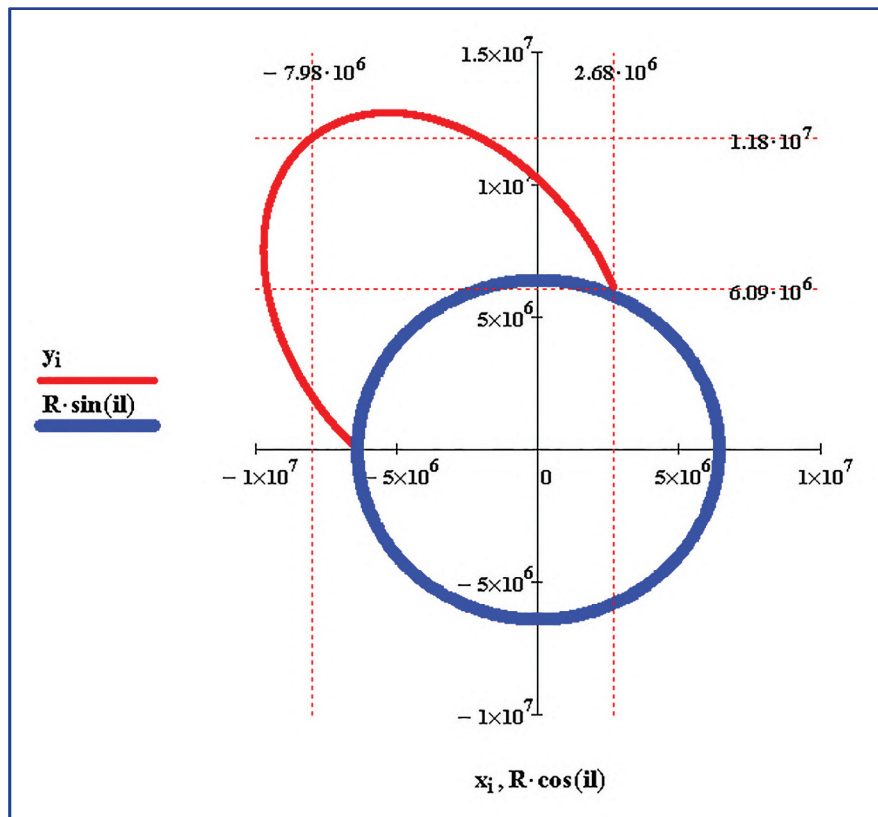


Рис. 6

При таком полете КА испытывает гравитационную силу двух небесных тел: Земли и Луны. По этой причине моделирование движения становится более сложным по сравнению с полетом ИСЗ по околоземной орбите. При исследовании движения КА в гравитационном поле, созданном Землей и Луной, мы практически решаем ограниченную задачу трех тел (Рис.7).

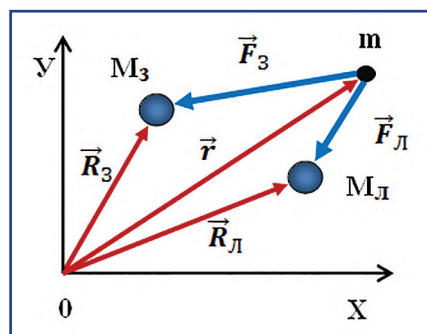


Рис. 7

Математическая модель. КА массой m в некоторый момент времени находится в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ и имеет скорость $\vec{v}$. Земля (M_3) и Луна ($M_{\text{Л}}$) находятся в точках радиус-вектором R_3 и $R_{\text{Л}}$ соответственно. Уравнение движения КА в прямоугольной системе координат будет иметь вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{GmM_3}{|\vec{r}-\vec{R}_3|^3}(\vec{r}-\vec{R}_3) - \frac{GmM_{\text{Л}}}{|\vec{r}-\vec{R}_{\text{Л}}|^3}(\vec{r}-\vec{R}_{\text{Л}})$$

или

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_3}{|\vec{r}-\vec{R}_3|^3}(\vec{r}-\vec{R}_3) - \frac{GM_{\text{Л}}}{|\vec{r}-\vec{R}_{\text{Л}}|^3}(\vec{r}-\vec{R}_{\text{Л}}).$$

Это уравнение относится к классу дифференциального уравнения второго порядка.

Создание и реализация компьютерной программы. На языке ППП MathCAD сперва нужно написать следующие начальные условия:

1. Координаты Земли и Луны (условно): Задание координат Земли: **X1:=0 Y1:=0**

Задание координат Луны (условно): **X2:=38.4 Y2:=0**

2. Масса Земли (M_1) и Луны (M_2) (условно):

$$M1:=81 \quad M2:=1 \quad K:=\frac{M2}{M1}$$

3. Начальные параметры КА (условно):

$$1) \quad rx:=-0.86 \quad ry:=0 \quad vx:=0 \quad vy:=9.48 \\ 2) \quad rx:=-0.86 \quad ry:=0 \quad vx:=0 \quad vy:=9.46$$

Траектории КА построит посредством программы, составленной в среде MathCAD уравнения движения КА в гравитационном поле Земли и Луны. Эта программа предназначена для решения дифференциального уравнения, которое были рассмотрено выше.

4. Задание начальных условий:

$$z:=\begin{pmatrix} rx \\ vx \\ ry \\ vy \end{pmatrix}$$

5. Задание функции возвращающего значения первых производных системы дифференциального уравнения второго порядка.

$$D(t,z):=\begin{pmatrix} z_1 \\ \frac{-4 \cdot \pi^2 \cdot (z_0)}{\left[(z_0)^2 + (z_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K \cdot (z_0 - X_2)}{\left[(z_0 - X_2)^2 + (z_2 - Y_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\ z_3 \\ \frac{-4 \cdot \pi^2 \cdot (z_2)}{\left[(z_0)^2 + (z_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot K \cdot (z_0 - X_2)}{\left[(z_0 - X_2)^2 + (z_2 - Y_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

6. Нахождение решения дифференциального уравнения на интервале [0; 110]:

$$R:=\text{rkfixed}(z,0,110,10^4,D)$$

7. Определение размерностей матрицы R:

$$i:=0..rows(R)-1$$

Результаты эксперимента:

1) При начальных условиях $rx:=-0.86$ $ry:=0$ $vx:=0$ $vy:=9.48$ получим траекторию движения КА, как на рисунке 8.

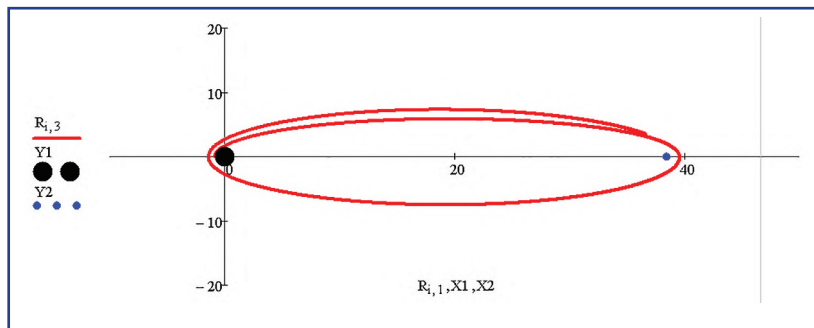


Рис. 8

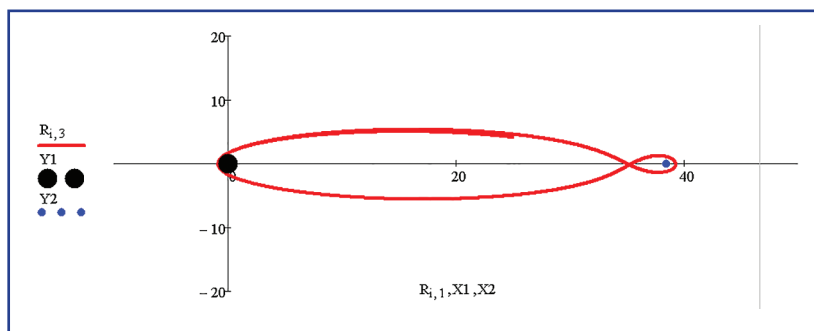


Рис. 9

В связи с тем, что скорость КА и его координаты, расстояние Луны от Земли представлены в условных числах, мы не можем пользоваться системой СИ для анализа движения космического аппарата.

На основе этого компьютерного эксперимента делаем следующие выводы: когда КА около Земли приобретает скорость, равную условно-

му числу 9,48, он может свободно облетать Луну и Землю; при скорости 9,46 КА делает заманчивую траекторию – «восьмерку». При этом аппарат делает облет Луны и Земли.

Подбирая различные значения для начальных условий, можно получить всевозможные траектории космического аппарата около пространства системы «Земля-Луна».

Литература

1. Мукушев Б.А. Движение тела в поле центральной силы // Потенциал.- 2020. – №1.- с.42-47.
2. Можжев В. Движение тел в гравитационных полях // Квант – 1997 – №1. – с. 45-48.
3. Мукушев Б.А. «Энергия связи» в задачах // // Потенциал.- 2011. – №11.- с.27-34.
4. Мукушев Б.А., Мукушев М.А. Характеристики гравитационных полей небесных тел // Потенциал. – 2016. – №6.- с. 34-42.