

Канин Евгений Степанович

1926 г. рождения,

участник Великой Отечественной войны.

Кандидат педагогических наук (1965 г.),

профессор (1988 г.) кафедры математического анализа и МПМ

Вятского государственного гуманитарного университета.

Автор 130 работ, в том числе 35 книг и брошюр, изданных на 7 языках, в том числе на немецком, чешском, китайском. Один из авторов книги для учащихся "Математическая шкатулка".



Из истории возникновения и развития понятия функции

С древних времён человечество использовало различные функциональные зависимости, но чёткое представление о понятиях, связанных с функцией, – величина, зависимость, переменная – сформировались не сразу.



У Рене Декарта (латинизированное имя Картезий, 1596–1650 гг.) переменная выступает в двух формах: как отрезок переменной длины и постоянного направления и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, выражающих этот отрезок. На этой базе он и создал метод координат.

И. Ньютон (Newton Isaac, 1643 – 1727 гг.) интерпретировал перемен-

ные x , y (координаты движущейся точки), v (скорость движения) и другие как «флюентные (текущие) величины», «флюенты». Производные флюент по времени он называл «флюксиями».

Г.В. Лейбниц (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646–1716 гг.) называл функцией любую линию, которая в общепринятом смысле «выполняет свою функцию», иначе говоря, «играет роль» касательной, нормали, подкасательной и так далее и таким образом «функционирует».

И лишь в 1718 году в печати появилась формулировка Иоганна Бернулли (Bernulli Iogann, 1667–1748 гг.), в которой «функция вообще» рассматривалась как результат некоторых операций над независимыми переменными. Бернулли определил функцию как «аналитическое выражение». Необходимость определения функции возникла при решении проблемы о колебаниях струны. В дальнейшем этой проблемой занимались известные математики середины XVIII века: академик Петербургской академии наук Леонард Эйлер (Euler Leonard, 1707–1783 гг.) и Даламбер

(D'Alambert Jean Le Rond, 1717–1783 гг.). Для Даламбера, последователя школы И. Бернулли, «произвольная функция» означала «произвольное аналитическое выражение». Эйлер считал, что «функция есть кривая, начертанная произвольным влечением руки» (1748 г.). Каждый из них утверждал, что его взгляд на функцию более общий. Итог этим разногласиям подвёл в 1807 г. французский математик Жан Фурье (Fourier Jean Baptiste, 1768–1830 гг.). Он установил, что два различных аналитических выражения могут давать одинаковые результаты на одном промежутке (участке) и различные – на других, что уравнение всякой кривой может быть записано единым аналитическим выражением, даже если оно составлено из разнородных частей.

После работ Ж. Фурье и Огюстена Луи Коши (Cauchy Augustin Louis, 1789–1857 гг.), опубликовавшего в 1821 г. свой знаменитый «Курс алгебраического анализа», Лежен П. Г. Дирихле (Dirichlet Lejeune Peter Gustav, 1805–1859 гг.) смог сформулировать общее определение понятия функции (1837 г.), которое удовлетворяло запросам науки до конца XIX века. Вот его определение: *«у есть функция от x, если всякому определённое значение у, причём совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие»*. Незадолго до этого русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792–1856 гг.) дал своё определение функции (1834 г.): *«Функция от x есть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытывать*

все числа. Зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Множества

Не всякое понятие математики можно определить через другие, уже известные понятия математики же. Существуют первичные, неопределяемые понятия, на базе которых путём специализации (мыслительной операции, обратной обобщению) строятся другие понятия, а на базе этих «других» – новые понятия математики.

Пожалуй, наиболее общим в математике является понятие «множество», первичное, неопределяемое понятие. Основоположник теории множеств Георг Кантор (Cantor Georg, 1845–1918 гг.) предлагал интуитивное описание этого понятия: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Конечно, эту формулировку нельзя считать определением.



Синонимами термину «множество» являются термины «совокупность», «набор», «коллекция», «собрание» и другие. Многие множества имеют специальные названия, например, «стадо», «отара», «команда», в математике «класс», «группа», «геометрическое место точек», в биологии «тип», «отряд», «класс», «семейство», «род», «вид» и другие. Имеется немало других синонимов слову множество. Обозначают множества обычно прописными буквами A, B, C, ... латинского алфавита.

Второе неопределяемое понятие – «быть элементом множества» или «принадлежать множеству». Кроме того, в записях применяется символ « $\in$ ». Так, предложение « x есть элемент множества A » записывается символически $x \in A$, « y не является элементом множества B » (или « y не принадлежит множеству B ») обозначается так: $y \notin B$. Обычно множество элементов множества (если оно конечно) записывается перечислением их в фигурных скобках: $A = \{a; b; c; p; k\}$. Для бесконечного же множества указывается в квадратных скобках характеристическое свойство его элементов. Например, множество всех действительных чисел отрезка $[-2,3; 0]$ записывается следующим образом:

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid -2,3 \leq x \leq 0\}.$$

Множества могут быть связаны отношением включения, что определяется следующим образом.

Определение. Множество A называется подмножеством множества B , если каждый элемент A является и элементом B .

Обозначается: $A \subseteq B$. Иначе про это отношение говорят: «множество A включено в множество B ».

Можно определить равенство множеств.

Определение. Два множества называются равными ($A=B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A . Иными словами, $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Заметим ещё, что множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\emptyset$. Порядок элементов в записи множества не является существенным, повторяющиеся элементы не допускаются.

Функции

В окружающей действительности всюду наблюдаются явления, различным образом связанные между собой. Нередко такие связи существуют между теми или иными величинами, между какими-то множествами, между переменными. Так, каждому человеку соответствует его рост. Множеству действительных чисел отрезка $[0;1]$ соответствует множество квадратов этих чисел: каждому числу $x \in [0;1]$ соответствует

$x^2 \in [0;1]$. И третий пример: если

$P_1P_2 \perp AC$, то каждой точке P диагонали AC квадрата $ABCD$ соответствуют точки P_1 и P_2 его контура – рис. 1. При этом каждой внутренней точке диагонали AC соответствуют две точки контура, а точки A и C соответствуют каждая себе. Не ставя задачу строго определить понятие соответствия между множествами, отметим, что из всех соответствий особо выделяются *однозначные* соответствия.

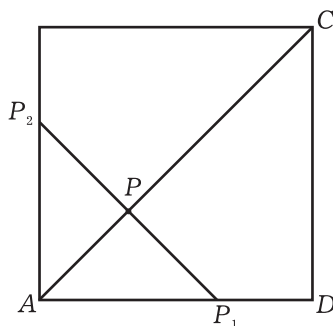


Рис. 1

Определение. Пусть заданы два произвольных множества: X и Y . Говорят, что на множестве X задана функция, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие

единственный элемент y множества Y . Множество X при этом называется областью определения функции.

Закон соответствия обычно обозначается какой-нибудь буквой: $f, g, h, \dots$. Тогда функция записывается в виде $y = f(x)$. По определению, областью определения X числовой функции одного действительного переменного, как и множеством Y , является подмножество множества всех действительных чисел $\mathbf{R}$. Какое именно это множество, зависит от вида конкретной функции. Область определения функции $y = f(x)$ часто обозначается как $D(f)$.

Какие функции считать равными?

Определение. Две функции f и g называются равными, если $D(f) = D(g)$ и $f(x) = g(x)$ для любого x из области определения.

Пример 1.

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ и

$\varphi(x) = x + 1$. Хотя $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ при

$x \neq 1$, это разные функции. Область определения функции f (обозначают $D(f)$) есть множество $\mathbf{R}$ без числа 1, $D(f) = \mathbf{R}$. Это хорошо видно на графиках заданных функций (рис. 2).

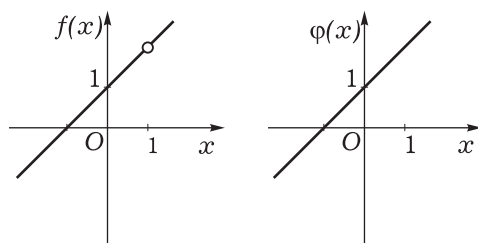


Рис.2

Пример 2.

Функции $r(x) = \sqrt{x^2}$ и $h(x) = (\sqrt{x})^2$ внешне «похожи», но это разные функции. $D(r) = \mathbf{R}$, а $D(h) = [0; +\infty)$, и $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ лишь при $x \geq 0$.

Пример 3.

$p(x) = \lg x^2$ имеет $D(p) = \mathbf{R}/0^{1)}$, а для $q(x) = 2\lg x$ $D(q) = (0; +\infty)$.

Пример 4.

$f(x) = \arccos(\cos x)$ – функция с областью определения $D(f) = \mathbf{R}$, а «похожая» функция $\varphi(x) = \cos(\arccos x)$ определена лишь на $[-1; 1]$ ($D(\varphi) = [-1; 1]$).

Пример 5.

Функция $y = x^3$ имеет областью естественного определения всё множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Но если ставится задача вычислить объём куба по заданной длине его ребра a , то функция $V = a^3$ рассматривается уже не на всём множестве $\mathbf{R}$, а лишь на его подмножестве $a \geq 0$.

Нет сомнения, что понятие функции под воздействием новых требований науки, прежде всего самой математики, физики, химии, возможно, биологии будет изменяться, и это изменение будет приводить к новым открытиям науки.

$\mathbf{R}/0$ обозначают множество $\mathbf{R}$ без числа 0.



¹⁾ $\mathbf{R}/0$ обозначают множество $\mathbf{R}$ без числа 0.