



Пиголкина Татьяна Сергеевна
Кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, заслуженный преподаватель МФТИ, специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал».

Задачи на экстремум

Задачи, где требуется определить условия, при которых некоторая величина принимает наибольшее (максимальное) или наименьшее (минимальное) значение, называются задачами на экстремум, или задачами на максимум и минимум. Латинские слова maximum, minimum и extremum – «крайний», сохранились в математике с тех пор, когда латынь на протяжении полутора тысяч лет была единственным языком культуры, философии и науки в Западной Европе. Эти латинские термины, как и многие другие, вошли во всю мировую науку.

Задачи выбора наиболее эффективного, оптимального в определённом смысле, решения имеют большое практическое значение, они постоянно возникают в технике, естествознании, экономике, в разных областях деятельности людей и в их повседневной жизни. В математической формулировке многие такие задачи приводятся к задачам на максимум и минимум.

Простейшие задачи на максимум и минимум рассматривались на заре развития греческой математики.

В «Началах» Евклида (III век до н. э.) есть, по крайней мере, одна теорема и одна задача на экстремум. Доказывается, что среди прямоугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет квадрат. И решается задача: в данный треугольник ABC вписать параллелограмм наибольшей площади, одна вершина которого совпадает с вершиной A, а остальные лежат на сторонах треугольника.

Задачами на экстремум занимались выдающиеся учёные древности. Архимед (III век до н. э.) и Аполлоний (III – II в. до н. э.) исследовали и решали такие задачи. Зенодор (III – II в. до н. э.) доказал, что

из всех многоугольников с равным числом сторон и одинаковым периметром наибольшую площадь имеет правильный многоугольник. Герон Александрийский (I в. н. э.) сформулировал закон распространения света: луч света должен идти кратчайшим путём.

До возникновения математического анализа задачи на максимум и минимум изобретательно решались многими математиками: Н. Тарталья (1499 – 1557), П. Ферма (1601 – 1665), Э. Торричелли (1608 – 1647) и др. А Галилео Галилей (1564 – 1642) решил задачу на экстремум в механике: наибольшая дальность полёта снаряда соответствует наклону ствола орудия в 45°.

С возникновением дифференциального исчисления и развитием математического анализа началась новая эра в решении задач на экстремум. Были установлены необходимые и достаточные условия достижения локального максимума или минимума функций.

Классические геометрические задачи на экстремум

В решении таких задач, как правило, не прибегают к вычислениям, а используют преобразования – симметрию относительно прямой, поворот относительно точки и, конечно, некоторые основные факты геометрии, например, что отрезок есть кратчайшее расстояние между двумя точками.

Задача 1. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a (рис. 1). Найти на прямой a точку M такую, чтобы сумма расстояний $MA + MB$ имела наименьшее возможное значение.

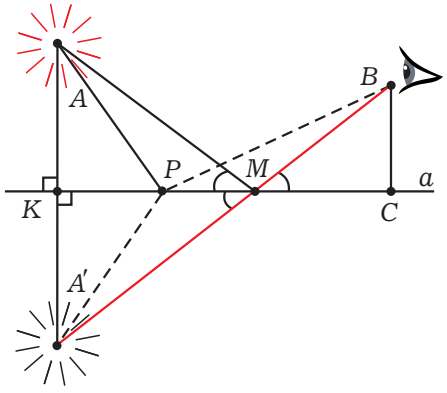


Рис. 1

Решение. Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой a (это означает $AA' \perp a$ и $AK = KA'$), а M – точка пересечения прямых $A'B$ и a. Точка M будет искомой. Действительно, из равенства треугольников MAK и $MA'K$ следует равенство $AM = A'M$, поэтому $AM + MB = A'M + MB = A'B$. Для любой другой точки P на прямой a имеет место $AP + PB = A'P + PB > A'B$. Последнее следует из того, что ломаная длиннее отрезка, соединяющего её концы.

Решение этой задачи приписывают древнегреческому математику и механику Герону Александрийскому, жившему в I веке н. э. Решал он, правда, физическую задачу: если в точке A находится источник света, а в точке B – глаз, то в какой точке M плоского зеркала отразится световой луч, выходящий из точки A, при условии, что свет идёт из одной точки в другую по кратчайшему пути? При отражении от плоского зеркала луча, исходящего из точечного источника A, возникает «мнимое» изображение

источника (точка A'), симметричное источнику A относительно плоского зеркала a. И глаз видит этот «мнимый» источник света, т. е. путь луча света – отрезок $A'B$. Отсюда вывод: угол падения луча света (угол AMK) равен углу отражения (угол BMC).

Другая формулировка условия может придать задаче 1 прикладной характер, например: два посёлка A и B лежат по одну сторону от шоссе a. Где у шоссе надо построить остановку M, чтобы сумма расстояний $MA + MB$ была наименьшей? (Это экономия и труда, и материалов, и затрат на прокладку дорог.)

Ещё один пример, решаемый методом симметрии.

Задача 2. Дан острый угол с вершиной в точке K и точка M внутри угла. Построить треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого находится в точке M, а две другие лежат на разных сторонах данного угла (рис. 2).

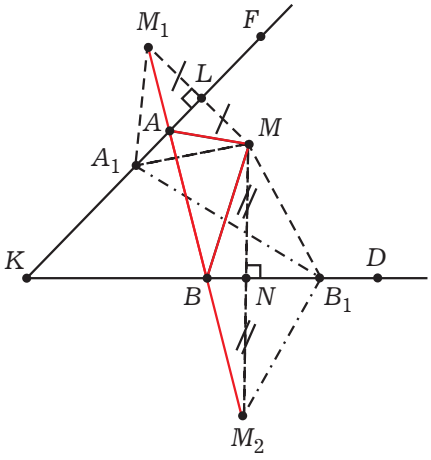


Рис. 2

Решение. Отразим точку M относительно стороны KF данного угла: $ML = LM_1$, $MM_1 \perp KF$ – получим точку M_1. Отразим точку M относительно другой стороны угла – получим точку M_2. Проведём прямую M_1M_2, она пересечёт стороны угла в точках A и B.

Очевидно, что $\Delta MAL = \Delta M_1AL$ (по двум катетам), поэтому $AM = AM_1$.

Также $\Delta MBN = \Delta M_2BN$ и $BM = BM_2$. Периметр построенного треугольника MAB равен $MA + AB + BM = M_1A + AB + BM_2 = M_1M_2$.

При любом другом положении точек A_1 и B_1 будем иметь $MA_1 = M_1A_1$, $MB_1 = B_1M_2$ и периметр треугольника MA_1B_1 будет равен $MA_1 + A_1B_1 + B_1M = M_1A_1 + A_1B_1 + B_1M_2$, т. е. равен длине ломаной $M_1A_1B_1M$, которая длиннее отрезка M_1M_2.

В следующей задаче применим другое преобразование, сохраняющее расстояния, – поворот. Эта задача предложена французским математиком Пьером Ферма (1601 – 1665).

Задача 3. Внутри остроугольного треугольника ABC найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника принимает наименьшее значение.

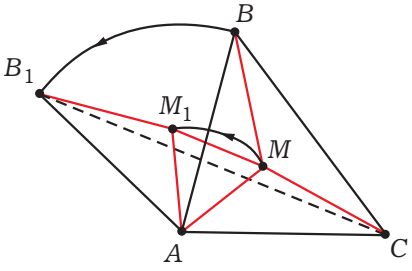


Рис. 3

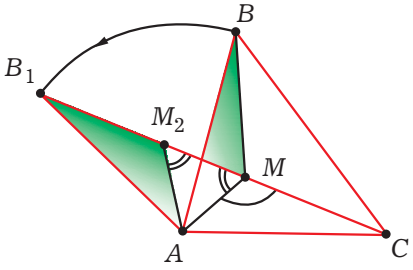


Рис. 4

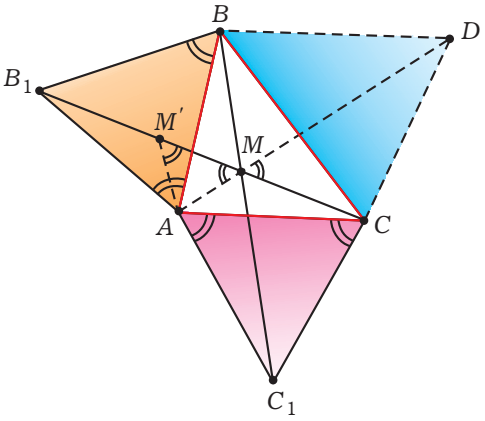


Рис. 5

Решение. Пусть M – некоторая точка внутри остроугольного треугольника ABC (рис. 3). При повороте с центром в точке A на угол 60° треугольник ABM переходит в равный ему треугольник AB_1M_1, при этом треугольник AMM_1 – равносторонний. Имеем $MB + MA + MC = B_1M_1 + M_1M + MC \geq B_1C$, поскольку длина ломаной B_1M_1MC превосходит длину стягивающего её отрезка B_1C. Равенство достигается только в том случае, когда точки M и M_1 лежат на отрезке B_1C (рис. 4). В этом случае $\angle AMC = 120°$, $\angle BMA = \angle B_1M_2A = 120°$, значит, и $\angle BMC = 120°$. Каждая сторона треугольника видна из точки M под углом 120°, и сумма расстояний от точки M до вершин треугольника ABC принимает минимальное значение. Точка M называется точкой Ферма. Построить её можно так: построим на сторонах AB и AC треугольника ABC равносторонние треугольники ABB_1 и ACC_1 (рис. 5). Пересечение отрезков B_1C и BC_1 даст точку M. Нетрудно доказать, что точка M лежит также на отрезке AD, если треугольник BCD – равносторонний.

Точка Ферма является решением и другой известной задачи. Швейцарский математик Якоб Штейнер (1796 – 1863) рассматривал задачу нахождения кратчайшей сети дорог, соединяющих три пункта. Если три пункта образуют остроугольный треугольник, то искомая сеть должна состоять из трех прямолинейных дорог, сходящихся в одной точке, – а это рассмотренная нами задача Ферма.

Применение неравенств в решении задач на экстремум

С развитием дифференциального исчисления в математике были разработаны очень сильные общие методы решения задач на экстремум. Однако многие задачи алгебры, геометрии, физики и задачи прикладного характера удаётся решить элементарными средствами быстрее, проще и изящнее. Чаще всего используются следствия из неравенства Коши[1] о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

[1] В нашем журнале неравенство Коши рассматривалось в нескольких статьях, где приводились его различные доказательства.

Неравенство Коши

Для любых положительных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ справедливо неравенство:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = ... = x_n.$$

Следствие 1. Если сумма произвольных положительных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ равна m, то их произведение $p = x_1x_2...x_n$ достигает *наибольшего* значения, равного $\left(\frac{m}{n}\right)^n$ при равенстве всех чисел.

Следствие 2. Если произведение произвольных положительных чисел $x_1, x_2,..., x_n$ равно p, то их сумма $m = x_1 + x_2 + ... + x_n$ принимает наименьшее значение, равное $n\sqrt[n]{p}$ при равенстве всех чисел.

В простейшем и наиболее часто используемом в школьной математике случае $n = 2$ неравенство о средних для двух положительных чисел a и b следует из того, что определены значения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, и из очевидного неравенства

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0,$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

причём равенство только в случае $a = b$.

Следствие 1°. Если сумма двух положительных чисел a и b равна m, то их произведение ab принимает наибольшее значение при $a = b$ и равно $\left(\frac{m}{2}\right)^2$.

Следствие 2°. Если произведение двух положительных чисел a и b равно p, то их сумма $a + b$ принимает наименьшее значение при $a = b$ и равна $2\sqrt{p}$.

Задача 1. Найти наименьшее значение функции

$$y(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$$

на $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Заметим, что

$$t(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

при всех x. Поделив «уголком» числитель на знаменатель, получим

$$y(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

$$y = t + \frac{1}{t},$$

где $t > 0$.

По следствию 2° сумма $t + \frac{1}{t}$ достигает своего наименьшего значения, равного 2, при $t = \frac{1}{t}$, $t = 1$ (из условия $t > 0$) при $x = 0$. Итак, наименьшее значение $y(x)$ равно 2 и равно $y(0)$.

Ответ. 2.

Задача 2. Биссектриса BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AD = 5$ и $DC = 3$ (рис. 6).

Найти наибольшую возможную площадь такого треугольника.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $AB : BC = AD : DC$, $AB : BC = 5 : 3$. Положим $AB = 5x$, тогда $BC = 3x$.

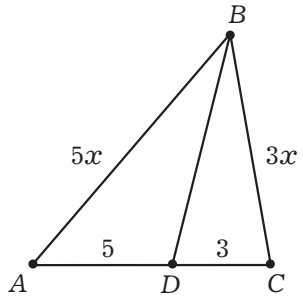


Рис. 6

Находим полупериметр треугольника ABC: $p = 4x + 4$; по формуле Герона его площадь равна:

$$S = \sqrt{p(p-AC)(p-BC)(p-AB)},$$

$$S = \sqrt{(4x+4)(4x-4)(4+x)(4-x)},$$

$$S = 4\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(16-x^2\right)}.$$

Значение S будет наибольшим, когда наибольшее значение принимает подкоренное выражение $F = (x^2 - 1)(16 - x^2)$. Здесь сумма сомножителей равна 15, по следствию 1° наибольшее значение F равно $\left(\frac{15}{2}\right)^2$ при равенстве $x^2 - 1 = 16 - x^2$, т. е. при $x = \sqrt{\frac{17}{2}}$ и $F_{\max} = F\left(\sqrt{\frac{17}{2}}\right) = \left(\frac{15}{2}\right)^2$, тогда $S_{\max} = 4\sqrt{F_{\max}} = 30$.

Ответ. 30.

Задача 3. Доказать, что для любого $x \in [0;+\infty]$ справедливо неравенство:

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)^2 \geq 16x^3.$$

Решение. При $x = 0$ неравенство выполняется. При $x > 0$ сумму в скобке разобьём на два слагаемых:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^3 + 1\right) + \left(x^2 + x\right).$$

В каждой из скобок произведение слагаемых равно x^3, по следствию 2° имеем:

$x^3 + 1 \geq 2\sqrt{x^3}$, равенство при $x^3 = 1$,

$x^2 + x \geq 2\sqrt{x^3}$, равенство при $x^3 = x$.

И то, и другое равенство достигается при $x = 1$. Итак:

$$x^3 + x^2 + x + 1 \geq 4\sqrt{x^3},$$

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1\right)^2 \geq 16x^3,$$

равенство достигается при $x = 0$ и при $x = 1$.

Задача 4. Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку так, чтобы количество отходов было наименьшим. Количество отходов определяется площадью заштрихованной части в сечении бревна (рис. 7), поэтому задачу формулируем так: в круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

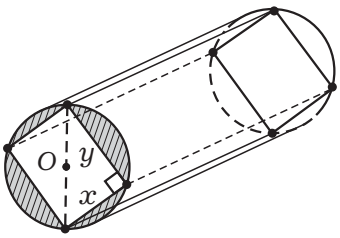


Рис. 7

Решение. Пусть x и y – стороны прямоугольника, тогда его площадь $S = xy$. Прямоугольник вписан в круг, $x^2 + y^2 = 4R^2$, следовательно, $S = x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$.

Заметим, что S будет достигать наибольшего значения тогда же, когда наибольшее значение имеет $S^2 = x^2\left(4R^2 - x^2\right)$. Сумма сомножи-

телей x^2 и $4R^2 - x^2$ постоянна и равна $4R^2$, следовательно, по следствию 1° наибольшее значение их произведения равно $\left(\frac{4R^2}{2}\right)^2$. Наибольшее значение S равно $2R^2$, и оно достигается при равенстве сомножителей, т. е. при $x^2 = 4R^2 - x^2$, когда $x = \sqrt{2}R$. Тогда и $y = \sqrt{2}R$.

Ответ. Количество отходов будет наименьшим, если в сечении балки будет квадрат, вписанный в круг радиуса R.

Задача 5. Доказать, что в любом треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной не превосходит $\frac{1}{2}$ (рис. 8).

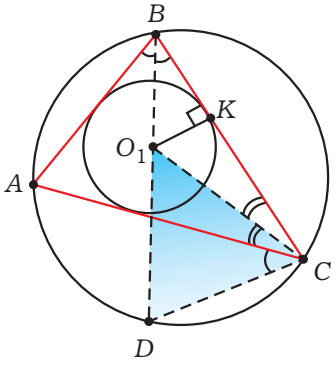


Рис. 8

Решение. 1. Пусть радиус описанной около треугольника ABC окружности равен R, а радиус вписанной окружности r. Центр O_1 вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис BO_1 и CO_1. Пусть прямая BO_1 пересекает описанную окружность в точке D. Рассмотрим треугольник DO_1C. Угол DO_1C – внешний для треугольника BO_1C, поэтому:

$$\angle DO_1C = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C.$$

Далее, вписанные углы DCA и DBA опираются на одну дугу, они равны, и $\angle DCA = \frac{1}{2}\angle B$, откуда следует $\angle DCO_1 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$.

В треугольнике DO_1C углы при стороне O_1C равные, треугольник равнобедренный, $DO_1 = DC$.

2. Хорда $DC = 2R\sin\frac{B}{2}$, значит, и

$$DO_1 = 2R\sin\frac{B}{2}.$$

Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K, $O_1K = r$. Из прямоугольного треугольника BO_1K следует:

$$BO_1 = \frac{O_1K}{\sin\frac{B}{2}}, \text{ т. е. } BO_1 = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}.$$

Точки B, O_1 и D лежат на одной прямой, хорда BD не длиннее диаметра описанной окружности, $BD \le 2R$, $BD = BO_1 + O_1D$, поэтому:

$$\frac{r}{\sin\frac{B}{2}} + 2R\sin\frac{B}{2} \le 2R.$$

Если точка O_1 лежит на диаметре ($BD = 2R$), то $BD \perp AC$, из чего следует $AB = BC$. Итак, при $AB = BC$ неравенство переходит в равенство, и тогда можно выразить отношение:

$$\frac{r}{R} = 2\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)\cdot\sin\frac{B}{2}.$$

Сумма сомножителей:

$$\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right) + \sin\frac{B}{2} = 1.$$

По следствию 1° имеем:

$$\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right)\cdot\sin\frac{B}{2} \le \left(\frac{1 - \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Равенство достигается при равенстве сомножителей:

$$1-\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2},\ \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\angle B}{2}=30^\circ,\ \angle B=60^\circ.$$

Итак, $\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}$.

Ответ. Окончательно имеем $\frac{r}{R}\le\frac{1}{2}$, а равенство достигается при $AB=BC$ и $\angle B=60^\circ$, т. е. в правильном треугольнике.

Задача 6. Найти наименьшее значение рациональной функции

$f(x)=\frac{x^4+x^2+4}{x}$ на интервале $(0;+\infty)$.

Решение. Представим функцию в виде шести слагаемых $f(x)=x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$, произведение которых равно 1. По следствию 2 сумма таких слагаемых достигает наименьшего значения, равного $6\sqrt[6]{1}=6$, при условии $x^3=x=\frac{1}{x}$, откуда следует, что $x=1$, при этом $f(x)=6$.

Ответ. 6.

Задача 7. Для цилиндра объёма V найти, при каком отношении высоты цилиндра к радиусу его основания площадь полной поверхности цилиндра будет наименьшей (такой вопрос связан, например, с наименьшей затратой материала на изготовление цилиндра).

Решение. Пусть H – высота цилиндра, R – радиус его основания (рис. 9).

Объём цилиндра $V=\pi R^2H$, полная поверхность цилиндра равна $S=2\pi R^2+2\pi RH$.

Выражаем H через V и R:

$$H=\frac{V}{\pi R^2}\text{ и получаем }S=2\pi R^2+\frac{2V}{R}.$$

Представляем S в виде трёх слагаемых $2\pi R^2+\frac{V}{R}+\frac{V}{R}$, произведение которых не зависит от R и равно $2\pi V^2$. По следствию 1:

$$2\pi R^2+\frac{V}{R}+\frac{V}{R}\ge3\sqrt[3]{2\pi V^2},$$

причём равенство достигается при равенстве трёх слагаемых:

$$2\pi R^2=\frac{V}{R}=\frac{V}{R},$$

откуда $\frac{V}{\pi R^2}=2R$, т. е. $H=\frac{V}{\pi R^2}=2R$.

Ответ. Площадь полной поверхности цилиндра будет наименьшей, когда высота цилиндра в два раза больше радиуса его основания, т. е. высота и диаметр основания одинаковы.

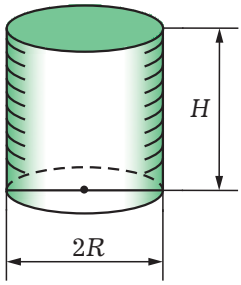


Рис. 9