



Виноградов Олег Павлович

*Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теории вероятностей Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова.*



Задача о разорении игрока

Одной из самых известных задач теории вероятностей является задача о разорении игрока. Впервые она была сформулирована в трактате Х. Гюйгенса «О расчетах в азартных играх» в 1657 году. Ее решением занимались такие выдающиеся математики как Я. Бернулли, Н. Бернулли, Ж. Лагранж, П. Лаплас, А. Муавр.

Дадим строгую формулировку этой задачи.

Два игрока играют в некоторую игру, которая состоит из отдельных партий. В каждой партии выигрывает тот или иной игрок (ничьи исключены). Перед началом игры первый игрок имеет n рублей, а второй $-(a-n)$ рублей. В случае выигрыша в одной партии, победитель получает от соперника один рубль. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не разорится. Пусть для всех $i \geq 1$ событие H_i заключается в том, что i -ю по порядку партию выигрывает первый игрок, а $\bar{H}_i$ событие, которое заключается в том, что i -ю по порядку партию выигрывает второй игрок. Предполагается, что события,

связанные с разными партиями, независимы. Положим $P(H_i) = p$, $P(\bar{H}_i) = q$ ($p + q = 1$).

Если $a = \infty$, то говорят об игре с бесконечно богатым противником, так как в этом случае капитал второго игрока бесконечен. Нас будет интересовать вероятность того, что первый игрок, в конце концов, разорится.

Возможны еще две интерпретации этой задачи, связанные с физической и актуарной (страховой) математикой [1], [2].

Замечание. Обратим внимание, что для нахождения этой вероятности будет использована формула полной вероятности. Читатель, незнакомый с этой формулой, может принять без доказательства систему (2), которая носит интуитивно понятный характер.

Обозначим через A_n событие, которое заключается в том, что имея начальный капитал n , первый игрок, в конце концов, разорится. По формуле полной вероятности получаем

$$P(A_n) = P(A_n / H_1)P(H_1) + P(A_n / \bar{H}_1)P(\bar{H}_1). \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что

$$P(A_n / H_1) = P(A_{n+1}), P(A_n / \bar{H}_1) = P(A_{n-1}).$$

Действительно, если первую партию выиграет первый игрок, т.е. произойдет событие H_1 , то капитал первого игрока увеличится на один рубль и станет равным $(n+1)$ рублей. Если же первую партию выиграет второй игрок, т.е. произойдет событие $\bar{H}_1$, то капитал первого игрока уменьшится на один рубль и станет равным $(n-1)$ рублей.

Обозначим $P(A_n) = q_n$. Тогда для всех n ($1 \leq n \leq a-1$) равенство (1) запишется в виде

$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}.$$

Естественно положить $q_0 = 1$, $q_a = 0$, т.к. в этих случаях весь капитал находится у одного из игроков. Таким образом, мы показали, что вероятности q_n для $1 \leq n \leq a-1$, удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = pq_2 + q, \\ q_2 = pq_3 + qq_1, \\ \dots\dots\dots \\ q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}, \\ \dots\dots\dots, \\ q_{a-2} = pq_{a-1} + qq_{a-3}, \\ q_{a-1} = \quad \quad qq_{a-2}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Тем самым, доказана

Теорема 1. Для всех n ($1 \leq n \leq a-1$) вероятности q_n являются решением системы уравнений (2).

С двумя способами нахождения явного выражения для q_n из равенств (2) можно ознакомиться в [1] и [3]. Мы продемонстрируем другой способ, а именно: применим аппарат производящих функций.

Определение 1. Производящей функцией последовательности $\{q_n\}_{(1 \leq n \leq a-1)}$ будем называть многочлен $Q(z) = \sum_{n=1}^{a-1} q_n z^n$.

Термин «производящая функция» принадлежит П. Лапласу. Задолго до Лапласа, Л. Эйлер использовал аппарат производящих функций в задачах теории чисел и комбинаторики. В теории вероятностей производящие функции были впервые использованы П. Лапласом и А. Муавром. В настоящее время аппарат производящих функций широко применяется в различных разделах математики (алгебра, теория функций, теория чисел, комбинаторика, теория вероятностей и др.).

Умножая левую и правую часть равенства $q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$ на z^n и суммируя по n от 1 до $a-1$, получим равенство

$$\begin{aligned} Q(z) &= p(q_2z + \dots + q_{a-1}z^{a-2}) + \\ &+ qz(1 + q_1z + \dots + q_{a-2}z^{a-2}) = \\ &= \frac{p}{z}(Q(z) - q_1z) + qz(1 + Q(z) - q_{a-1}z^{a-1}). \quad (3) \end{aligned}$$

Из (3) вытекает, что

$$Q(z) = \frac{z(qq_{a-1}z^a - qz + pq_1)}{qz^2 - z + p}.$$

Положим $\alpha = \frac{q}{p}$. Так как $p+q=1$,

то $p = \frac{1}{1+\alpha}$, $q = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ и предыдущее равенство можно записать в виде

$$Q(z) = \frac{z(\alpha q_{a-1} z^a - \alpha z + q_1)}{\alpha z^2 - (1+\alpha)z + 1}. \quad (4)$$

В правую часть (4) входят неизвестные вероятности q_1 и q_{a-1} . Для их нахождения заметим, что нули знаменателя правой части (4) должны совпадать с нулями числителя, т.к. в противном случае модуль многочлена $Q(z)$ в окрестностях этих точек будет неограниченным, что противоречит свойству модуля многочлена быть конечным в любой конечной части плоскости z .

Необходимо отдельно рассмотреть два случая:

а) $p \neq q$; б) $p = q = 0,5$.

В случае а) знаменатель правой части (3.10) обращается в нуль в точках, которые являются корнями квадратного уравнения

$$\alpha z^2 - (1+\alpha)z + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим, что его корнями будут числа

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Как показано выше, z_1, z_2 являются корнями числителя правой части (4), поэтому для нахождения вероятностей q_1 и q_{a-1} получаем линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \alpha q_{a-1} + q_1 = \alpha, \\ q_{a-1} + \alpha^{a-1} q_1 = \alpha^{a-1}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$q_1 = \frac{\alpha - \alpha^a}{1 - \alpha^a}, \quad q_{a-1} = \frac{\alpha^{a-1} - \alpha^a}{1 - \alpha^a}. \quad (5)$$

Из первого уравнения системы (2) и равенств (5) вытекает, что

$$q_2 = \frac{q_1 - q}{p} = \frac{\alpha^2 - \alpha^a}{1 - \alpha^a}. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (2) и равенств (5) и (6) вытекает, что

$$q_3 = \frac{\alpha^3 - \alpha^a}{1 - \alpha^a}.$$

Из системы (2), используя метод полной математической индукции, получаем, что для всех $1 \leq n \leq a-1$ справедливо равенство

$$q_n = \frac{\alpha^n - \alpha^a}{1 - \alpha^a}.$$

Так как $q_0 = 1, q_a = 0$, то в случае б) система (2) примет вид

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ 2q_1 = q_2 + q_0, \\ 2q_2 = q_3 + q_1, \\ \dots\dots\dots \\ 2q_n = q_{n+1} + q_{n-1}, \\ \dots\dots\dots \\ 2q_{a-2} = q_{a-1} + q_{a-3}, \\ 2q_{a-1} = q_a + q_{a-2}, \\ q_a = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что вероятности $q_0, q_1, \dots, q_{a-1}$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью

$$d = \frac{q_a - q_0}{a} = -\frac{1}{a}.$$

Поэтому $q_n = 1 - \frac{n}{a}$.

Тем самым, справедлива

Теорема 2. Если $p \neq q$, то

$$q_n = \frac{\alpha^n - \alpha^a}{1 - \alpha^a} \text{ и если } p = q = 0,5, \text{ то}$$

$$q_n = 1 - \frac{n}{a}.$$

Покажем, что даже если игра невыгодна для первого игрока, то иногда вероятность разорения у него меньше, чем у второго игрока. Предположим, что в случае выигрыша в одной партии победитель получает от соперника не один рубль, а пятьдесят копеек. Обозначим через q_n^* – вероятность разорения первого игрока в этом случае. Изменение единицы с рубля на половину рубля эквивалентно удвоению начальных капиталов.

Тем самым, справедлива

Теорема 3. Если $p \neq q$, то

$$q_n^* = \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{2a}}{1 - \alpha^{2a}} \text{ и если } p = q = 0,5, \text{ то}$$

$$q_n^* = 1 - \frac{n}{a}.$$

Определение 2. Будем называть игру невыгодной для первого игрока (выгодной для второго), если $\alpha > 1$. В этом случае $p < q$ и вероятность выиграть каждую отдельную у первого игрока меньше, чем у второго.

Замечание. Сравним вероятности q_n и q_n^* .

Если $p = q = 0,5$, то $q_n = q_n^*$.

Если $p \neq q$, то

$$\begin{aligned} q_n^* &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{2a}}{1 - \alpha^{2a}} = \frac{\alpha^n - \alpha^a}{1 - \alpha^a} \times \frac{\alpha^n + \alpha^a}{1 + \alpha^a} = \\ &= q_n \frac{\alpha^n + \alpha^a}{1 + \alpha^a}. \end{aligned}$$

Если игра невыгодна для первого игрока ($\alpha > 1$), то очевидно, что $\frac{\alpha^n + \alpha^a}{1 + \alpha^a} > 1$ и, значит, $q_n^* > q_n$. Таким образом, если ставка в одной игре уменьшается в два раза, а начальные капиталы игроков остаются неизменными, то вероятность разорения первого игрока увеличивается, если игра для него невыгодна. Таким образом, в этом случае ($\alpha > 1$) первому игроку выгодно играть по большей ставке. Приведем численный пример. Если у первого игрока 10 рублей, а у второго один рубль и $p = 0,45$, то вероятность разорения первого игрока равна приблизительно 0,866, если ставка в одной игре равна одному рублю, и приблизительно 0,210, если ставка в одной игре равна 10 рублям.

Литература

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.1, М.: Мир, 1984.
2. Виноградов О.П. Элементы теории риска. ЛЕНАРД, Москва, 2020
3. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей, МЦНМО, Москва, 2015.