

Дроздов Виктор Борисович
Преподаватель физики Медицинского университета г. Рязани, кафедра физики. Почётная грамота Министерства просвещения СССР 1979 г.

Знаменитый вывод знаменитой формулы

Из истории алгебры известно, что формулу

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (1)$$

использовал в своей книге «Всеобщая арифметика» величайший английский учёный Исаак Ньютон. Найдя успешные применения у славного преобразователя науки, эта формула вошла затем во все учебники алгебры. Причём везде она доказывалась, исходя из равенства квадратов двух её неотрицательных частей.

Не обошел вниманием эту формулу и Андрей Петрович Киселёв – автор популярнейших в России XX в. учебников по геометрии и по алгебре. Эта формула существовала «у Киселёва» с дореволюционных времён, благополучно прошла вместе с его учебниками через все реформы математического образования, которые принесла с собой революция, и неколебимо утвердилась в современных учебниках для спецшкол.

Чем же так примечательна эта формула?

Многим. Во-первых, она позволяет преобразовывать в виде суммы или разности сложные радикалы, т.е. выражения вида $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$. Уже одно это обстоятельство облегчает работу с радикалами. Но совсем становится легко, если обнаруживается, что выражение a^2-b, стоящее в правой части формулы (1) «под двумя знаками радикала», представляет собой точные квадраты рациональных чисел такие, что $a>0$, $b>0$, $a^2>b$. Приведём примеры.

Пример 1. Упростить

$$A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}\ .$$

Решение. Обилие радикалов не создаст проблем, ибо формулы появляются одна из другой, как матрёшки из матрёшки:

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{13+\sqrt{13^2-48}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\frac{13-\sqrt{13^2-48}}{2}}=\sqrt{12}+1,$$

тогда $A=\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$. Далее

$$\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-12}}{2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-12}}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

Теперь

$$A=2\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Ясно, что с последним выражением, представляющим собой сумму двух чисел, примерные значения которых легко найти, на практике иметь дело значительно проще, чем с выражением для A, заданным изначально.

В геометрии часто применяется формула

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - \sqrt{4R^4 - a_n^2 R^2}},$$

где a_{2n} – сторона правильного вписанного в окружность $2n$-угольника,



a_n – сторона правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность, R – радиус окружности, в которую вписаны одновременно n-угольник и $2n$-угольник.

Формула полезная, но пользоваться ею не очень удобно по причинам, отмеченным выше. Гораздо было бы проще, если бы под знаком радикала стояли не разности, а произведения.

Проиллюстрируем, как этого можно добиться.

Пример 2. Преобразовать формулу

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - \sqrt{4R^4 - a_n^2 R^2}},$$

устранив «сложный» радикал.

Решение. Введём вспомогательные обозначения. Пусть $a = 2R^2$, тогда $a^2 = 4R^4$. Пусть $b = 4R^4 - a_n^2 R^2$. Для будущих преобразований удобно иметь уже упрощённое выражение для $\sqrt{a^2 - b}$. Очевидно, что

$$\sqrt{a^2 - b} = \sqrt{a_n^2 \cdot R^2} = a_n R.$$

Теперь перейдём к непосредственным преобразованиям:

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{2R^2 + a_n R}{2}} - \sqrt{\frac{2R^2 - a_n R}{2}} =$$

$$= \sqrt{R\left(R + \frac{a_n}{2}\right)} - \sqrt{\left(R - \frac{a_n}{2}\right)}.$$

Как видим, требуемый результат получен. Мы имеем разность двух выражений, в каждом из которых под знаком радикала стоит произведение.

Возникает естественный вопрос, как появилась формула (1)? Ведь она совершенно не очевидна. Более того, современные ученики вообще принимают её с некоторым сопротивлением, ибо сначала, в общем виде, она смотрится не очень привлекательно: «простенькое» по виду выражение она заменяет двумя гораздо более сложными слагаемыми. Но потом, при переходе к примерам, её эффективность становится очевидной. Формула как бы постепенно раскрывает свою красоту. Этот факт делает в глазах учащихся обстоятельства её появления ещё более интересными.

Убедительно показать красоту формулы (1) поможет анализ распро-



странённого способа её доказательства.

Оно основано на методе замены переменной. Введём обозначение

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=m.$$

Наличие в этом выражении двух сопряжённых радикалов подсказывает, что полезно было бы провести действие умножения. Но поскольку умножать пока не на что, умножим m само на себя. Получим

$$m^2=2(a+\sqrt{a^2-b}). \qquad (2)$$

Каким должно быть второе обозначение, уже легко предугадать: $\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=n$, а тогда, естественно,

$$n^2=2(a-\sqrt{a^2-b}). \qquad (3)$$

Дальше всё покатится как по маслу: наличие в выражениях для m^2 и для n^2 двух сходных радикалов с разными знаками в формулах (2) и (3) просто вопиет о необходимости их сложения или вычитания. При этих действиях сократятся радикалы, перед которыми стоят разные знаки.

Далее нетрудно предугадать, что надо будет что-то сделать с коэффициентами 2, которые появились и у m^2, и у n^2. Чтобы освободиться от «удвоенности», поделим на 2 то, что у нас вырисовывается. Получим

$$\frac{m+n}{2}=\sqrt{a+\sqrt{b}},\ \frac{m-n}{2}=\sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

Отсюда и следует доказываемая формула. Но для наглядности повторим ещё раз, чему равны m и n:

$$m=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}},\ n=2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Уточним, что на самом деле автору неизвестно, каким именно образом доказывал формулу (1) сам И. Ньютон. Но здесь показана удачная и смелая замена (заменить сумму двух сложных радикалов *одной* буквой – это круто!). Решительный шаг облегчил все дальнейшие преобразования. Он «сам собой» привёл к ряду дальнейших естественных шагов, которые сложились в быстрый путь доказательства.

Надеюсь, что эта заметка поможет учащимся удивиться рассмотренной замене.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Сравнение не в пользу света

– Что распространяется быстрее, свет или звук?

– Конечно, звук.

– ?!!

– Если включаешь телевизор, сначала слышишь звук, а уж только потом появляется изображение!