

Математика

Пиголкина Татьяна Сергеевна

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики МФТИ,
заслуженный работник высшей школы,
заместитель председателя научно-методического
совета ФЗФТИШ при МФТИ.



Тригонометрия. Метод введения вспомогательного угла

Преобразование выражения $a \cos x + b \sin x$ к виду $A \cos(x + \varphi)$ или $A \sin(x + \psi)$ называется методом введения вспомогательного угла (или дополнительного аргумента). Метод применяется при решении тригонометрических уравнений, при оценке значений функций, в задачах на экстремум, и что важно отметить, некоторые задачи не могут быть решены без введения вспомогательного угла. В школьном курсе этому простому и важному методу не всегда уделяется достаточно внимания, и в некоторых учебниках он рассматривается лишь в разделе «Задачи повышенной трудности». В то же время, задачи на применение этого метода предлагаются на разных олимпиадах, конкурсах и даже на гуманитарных факультетах университетов.

1. Введение вспомогательного угла

Основой преобразования выражения $F(x) = a \cos x + b \sin x$ при a и b отличных от нуля является тождество

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right). \quad (1)$$

В некоторых частных случаях дальнейшие шаги очевидны, например:

$$1. \cos x - \sin x =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right), \text{ т. е. вспомогатель-}$$

ный угол $\frac{\pi}{4}$.

$$2. \sin x + \sqrt{3} \cos x =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x \right) =$$

$$= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right), \text{ вспомогательный угол } \frac{\pi}{3}.$$



В общем случае обратим внимание на то, что новые коэффициенты в правой части формулы (1) удовлетворяют равенству:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Если два числа u и v таковы, что сумма их квадратов равна 1, т. е. $u^2 + v^2 = 1$, то на координатной плоскости и точка $M(u; v)$, и точка $N(v; u)$ лежат на окружности радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 1). Для точки $M(u; v)$ существует единственный угол φ такой, что $u = \cos \varphi$, $v = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Аналогично, для точки $N(v; u)$ существует единственный угол ψ , для которого $v = \cos \psi$, $u = \sin \psi$, $0 \leq \psi < 2\pi$.

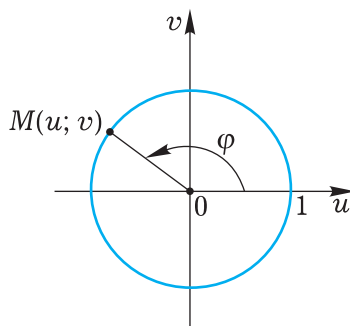


Рис. 1

Введём вспомогательный угол φ , удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Из формулы (1) получим

$$a \cos x + b \sin x =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cdot \cos x + \sin \varphi \cdot \sin x) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi). \quad (2)$$

Если же выберем вспомогательный угол, определяемый формулами:

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{cases}$$

то из (1) придём к другой функции:

$$a \cos x + b \sin x =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \psi \cdot \cos x + \cos \psi \cdot \sin x) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \psi). \quad (3)$$

У некоторых учащихся возникают затруднения при записи значения вспомогательного угла. Покажем, что трудностей можно избежать, выбирая всегда вспомогательный угол в первой координатной четверти.

Выполним основное преобразование (1) и рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $|a|$ и $|b|$, один из его острых углов и выбира-

ем в качестве вспомогательного угла. Поясним на примерах.

$$\begin{aligned} 1. F(x) &= -5\cos x + 12\sin x = \\ &= 13 \left(\frac{12}{13} \sin x - \frac{5}{13} \cos x \right). \end{aligned}$$

В прямоугольном треугольнике с катетами 5 и 12 гипотенуза равна 13 (рис. 2). Выберем вспомогательный угол α , для которого $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ и

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= 13(\cos \alpha \cdot \sin x - \sin \alpha \cdot \cos x) = \\ &= 13\sin(x - \alpha). \end{aligned}$$

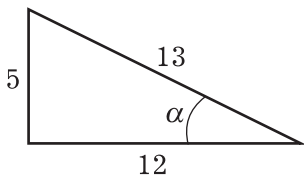


Рис. 2

Угол α – острый, он равен каждому из трёх значений:

$$\alpha = \arccos \frac{12}{13} = \arcsin \frac{5}{13} = \operatorname{arctg} \frac{5}{12},$$

можно выбрать любое из них.

$$\begin{aligned} 2. \Phi(t) &= -3\cos t - 2\sin t = \\ &= -(3\cos t + 2\sin t) = \\ &= -\sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \cos t + \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \right) = \\ &= -\sqrt{13}(\cos \varphi \cdot \cos t + \sin \varphi \cdot \sin t) = \\ &= -\sqrt{13} \cos(t - \varphi), \end{aligned}$$

вспомогательный угол φ выбран такой, что $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$

2. Решение простейших уравнений

Уравнение $a\cos t + b\sin t = c$ при $a \cdot b \cdot c \neq 0$ имеет решение лишь в

случае $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$, т. е. $c^2 \leq a^2 + b^2$

(это следует из формул (2) и (3)).

Пример 1. Решить уравнения:

(рис. 3). Для φ можно выбрать любое из значений:

$$\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

Если по каким-то причинам надо привести к выражению со знаком «плюс», то по формулам приведения:

$$-\sqrt{13} \cos(t - \varphi) = \sqrt{13} \cos(\pi - t + \varphi).$$

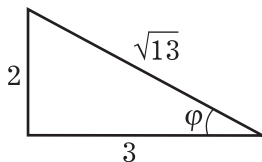


Рис. 3

Выводы:

1. Выражение $a\cos x + b\sin x$ преобразуется по формуле (1), а вспомогательный угол выбирается после размышлений.

2. Преобразование с введением вспомогательного угла есть равносильное преобразование.

3. Из формул (2) и (3) следует, что при любых значениях a и b справедливо неравенство

$$|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

4. Выбором вспомогательного угла рассматриваемое выражение можно привести и к функции косинус, и к функции синус.

5. Вспомогательный угол всегда можно выбрать острым (в первой координатной четверти), тогда проще всего записываются его значения.

а) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2},$

б) $2\cos \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2} = \sqrt{6},$

в) $5\cos x + 2\sqrt{6} \sin x = 8,$

г) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5.$



Решение. а) $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, неравенство $c^2 \leq a^2 + b^2$ выполняется, поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x - \cos x &= \sqrt{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} &= \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, \\ \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

б) В этом примере удобно вначале вынести общий множитель за скобку, тогда $a=1$, $b=1$. Т. к. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, неравенство $c^2 \leq a^2 + b^2$ выполняется, то имеем

$$\begin{aligned} 2 \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) &= \sqrt{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{2} \right) &= \sqrt{6} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} &= \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} \frac{5}{6}\pi + 4\pi n, \\ \frac{1}{6}\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

в) $5 \cos x + 2\sqrt{6} \sin x = 8$. Здесь $c=8$, $a^2 + b^2 = 49$, нарушено условие $c^2 \leq a^2 + b^2$. Уравнение не имеет решений.

г) Находим $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, неравенство $c^2 \leq a^2 + b^2$ выполняется, тогда

$$\begin{aligned} 3 \sin 3x - 4 \cos 3x &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \left(\frac{3}{5} \sin 3x - \frac{4}{5} \cos 3x \right) &= 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin(3x - \varphi) &= 1. \end{aligned}$$

Вспомогательный угол выбран из условий

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{3}{5}, \\ \sin \varphi = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} 3x &= \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x &= \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Уравнения рассмотренного типа можно также решать заменой «тангенс половинного аргумента». Например, решим уравнение г) таким способом. Используем формулы

$$\cos 2\varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{и} \quad \sin 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Полагая $\operatorname{tg} \frac{3}{2}x = t$, сделаем в уравне-

нии г) замену, получаем $3 \frac{2t}{1+t^2} -$

$-4 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5$, откуда получаем квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} t^2 - 6t + 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t &= \operatorname{tg} \frac{3}{2} x = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} 3 + \frac{2}{3} \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Кроме того, следует проверить, не

является ли корнем исходного уравнения значение $\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

когда $\operatorname{tg} \frac{3}{2}x$ не определён. В данном случае $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, корнем уравнения не является. Значит, имеем ответ: $x = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} 3 + \frac{2}{3} \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

3. Решение уравнений вида

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos kt, \quad a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin kt$$

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \cos 7x$,

б) $3 \sin 3x - 4 \cos 3x = 5 \sin 11x$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \cos 7x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos 7x = 0.$$

Используем формулу разности косинусов

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

(справа – удвоенное произведение синуса полусуммы на синус обратной полуразности аргументов):

$$2 \sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = \pi n, \\ 3x + \frac{\pi}{6} = \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, \\ -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) $5 \left(\frac{3}{5} \sin 3x - \frac{4}{5} \cos 3x \right) =$
 $= 5 \sin 11x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin(3x - \psi) = \sin 11x \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin 11x - \sin(3x - \psi) = 0, \text{ где } \psi \text{ таково:}$$

$$\begin{cases} \cos \psi = \frac{3}{5}, \\ \sin \psi = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Используем формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}:$$

$$2 \sin \left(4x + \frac{\psi}{2} \right) \cdot \cos \left(7x - \frac{\psi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\psi}{2} = \pi n, \\ 7x - \frac{\psi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} -\frac{1}{8} \arccos \frac{3}{5} + \frac{1}{4} \pi n, \\ \frac{\pi}{14} + \frac{1}{14} \arccos \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Замечание 1. Совершенно аналогично решается, например, уравнение

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{5} \right).$$

Замечание 2. Иногда учащиеся допускают ошибку в решении уравнений вида $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos 7x$ и подобного для синусов. Они считают, что раз косинусы равны, то их ар-

гументы отличаются на $2\pi n$, т. е. записывают $x - \frac{\pi}{3} = 7x + 2\pi n$, откуда выражают $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$. Получают

только одну серию решений! Посмотрим на пересечение прямой $y = a$ с графиком функции $y = \cos x$ (рис. 4). Как видим,

$$x_3 = x_1 + 2\pi, \text{ но } x_2 \neq x_1 + 2\pi.$$

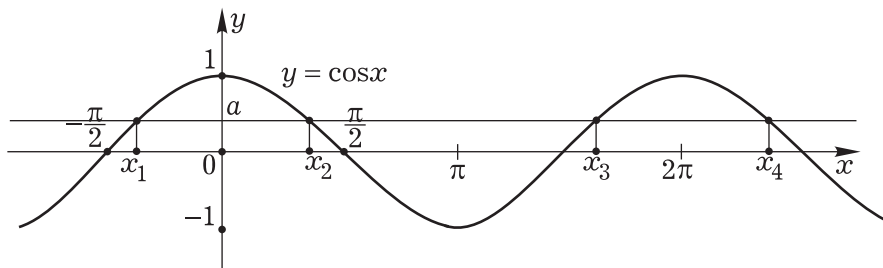


Рис. 4

4. Примеры конкурсных задач

Не всегда уравнение задаётся в таком «чистом» виде, когда путь решения очевиден. Часто требуются предварительные преобразования с использованием тригонометрических формул.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $\sqrt{3} \sin 2x + 6 \sin^2 x - 5 = 0$,

б) $8 \cos^2 2x + 6 \sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{7} \sin x = 7$.



Решение.

а) По формуле $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$ преобразуем уравнение:

$$\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} =$$

$$= \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, \\ \frac{2}{3} \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Кроме формулы, используемой в решении задачи а), используем также формулу $2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t$, получим:

$$4(1 + \cos 4x) + 3(1 - \cos x) - \sqrt{7} \sin x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos 4x - (3 \cos x + \sqrt{7} \sin x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos 4x - 4 \left(\frac{3}{4} \cos x + \frac{\sqrt{7}}{4} \sin x \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x - \cos(x - \alpha) = 0, \\ \alpha = \arccos \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x-\alpha}{2}\sin\frac{3x+\alpha}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\alpha=2\pi n, \\ 3x+\alpha=2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{1}{5}\arccos\frac{3}{4}+\frac{2\pi n}{5}, \\ -\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{4}+\frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Приведём ещё пример, где требуется отбор решений.

Пример 4. Решить уравнение

$$(1+\cos x) \cdot \operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - \sin x.$$

Решение.

$$(1+\cos x) \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} - \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x - \sin^2 x, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение, условие $\sin x \neq 0$ учтём позже:

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Итак, исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \pi + 2\pi k, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$$

Остаётся один ответ:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

5. Исследование на экстремум

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 7\sin x - \cos x + 3\sqrt{2} - 1.$$

Решение. Не стоит прибегать к вычислению производной и последующему исследованию. Гораздо проще ввести вспомогательный угол:

$$7\sin x - \cos x =$$

$$= \sqrt{50} \left(\frac{7}{\sqrt{50}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{50}} \cos x \right) =$$

$$= \sqrt{50} \sin(x - \alpha),$$

где, например, $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{50}}$. Тогда

$$y(x) = \sqrt{50} \sin(x - \alpha) + 3\sqrt{2} - 1. \text{ Так как } -1 \leq \sin(x - \alpha) \leq 1, \text{ то } y(x) \geq -\sqrt{50} + 3\sqrt{2} - 1 =$$

$$= -2\sqrt{2} - 1 \text{ и } y(x) \leq \sqrt{50} + 3\sqrt{2} - 1 = 8\sqrt{2} - 1$$

Итак, $\max y(x) = 8\sqrt{2} - 1$, $\min y(x) = -2\sqrt{2} - 1$. Отметим, что легко указать и точки, где функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y(x) = 1 - \sqrt{13} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right) +$$

$$+ 4\sqrt{3} \sin^2\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos x.$$

Решение. Конечно, выражение справа требует упрощения. Используем формулы, приведённые в решении примера 3, будем иметь:

$$y(x) = 1 - \sqrt{13} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right) +$$

$$+ 2\sqrt{3} \left(1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right)\right) +$$

$$+ (1 + \cos x) - \cos x =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{13} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right) +$$

$$+ 2\sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right)\right) =$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} -$$

$$- 5 \left(\frac{\sqrt{13}}{5} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{5} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{7}\right) \right)$$

$$= 2 + 2\sqrt{3} - 5 \sin\left(2x + \frac{2\pi}{7} + \varphi\right),$$

где, например,

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{13}}{5}.$$

Далее очевидно, что $y(x) \leq 2 + 2\sqrt{3} + 5 = 7 + 2\sqrt{3}$ (равенство достигается,

когда $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{7} + \varphi\right) = -1$, и $y(x) \geq 2 + 2\sqrt{3} - 5 = 2\sqrt{3} - 3$ (равенство достигается, когда $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{7} + \varphi\right) = 1$).

6. Метод оценок

Пример 7. Решить уравнение

$$(\cos 3x + \sin 3x)^4 = 7 - 3\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right).$$



Решение. Выполнив преобразование (1), получим:

$$\cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right),$$

поэтому уравнение примет равносильный вид:

$$4\cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 7 - 3\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Левая часть уравнения не превосходит 4, а правая $7 - 3\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \geq 7 - 3 = 4$. Следовательно,

равенство может достигаться лишь в случае, когда правая и левая части принимают значение 4, т. е.

когда $\cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ (что равносильно

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$) и $\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Решаем систему:

$$\begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \pi k, \\ 4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi m.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2\cos x.$$

Решение. Стандартный подход к иррациональному уравнению приводит к рассмотрению непростой системы:

$$\begin{cases} 5 + \sin^2 3x = (\sin x + 2\cos x)^2, \\ \sin x + 2\cos x \geq 0 \end{cases}$$

Подумав, можно заметить, что если ввести вспомогательный угол:

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5} \cos(x - \varphi),$$

где $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$, то уравнение примет

вид $\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sqrt{5} \cos(x - \varphi)$. Тогда

видно, что $\sqrt{5 + \sin^2 3x} \geq \sqrt{5}$, а

$\sin x + 2\cos x \leq \sqrt{5}$. Уравнение может иметь решение лишь в случае равенства левой и правой частей значению $\sqrt{5}$. Это выполняется лишь при усло-

вии $\sin^2 3x = 0$ и $\cos(x - \varphi) = 1$. Имеем систему

$$\begin{cases} 3x = \pi n, \\ x = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, \\ x = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k \end{cases} \quad (4)$$

Сравним, например, значения косинусов: $\cos \frac{\pi n}{3}$ принимает значения $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ в зависимости от n , а

$$\begin{aligned} \cos \left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k \right) &= \\ &= \cos \left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что система (4) несовместна, решений нет.



7. Важный частный случай

Отдельно остановимся на том частном случае простейших уравнений $a \cos x + b \sin x = c$ при $a \cdot b \cdot c \neq 0$, когда либо $|a| = |c|$, либо $|b| = |c|$.

Пример 9. Решить уравнения

а) $\sin x - 2 \cos x = 2$,

б) $4 \sin 2x + \cos 2x = 4$.

В уравнении а) сразу угадываются решения из условия

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1, \end{cases} \quad \text{т. е. } x = \pi + 2\pi n,$$

а в уравнении б) — из условия

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \cos 2x = 0, \end{cases} \quad \text{т. е. } x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Применяя метод введения вспомогательного угла, значения этого угла следует выбирать так, чтобы очевидные решения не «затерялись».

а) $\sin x - 2 \cos x = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos x \right) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + (-1)^n \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \pi n.$$

Выбор очевиден: $\alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$,

тогда ответ будет таков:

$$x = \left(1 + (-1)^n \right) \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \pi n, \text{ или}$$

$$x = \begin{cases} \pi + 2\pi k, \\ 2 \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) $4 \sin 2x + \cos 2x = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17} \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2x \right) = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2x - \varphi) = \frac{4}{\sqrt{17}}, \\ \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{17}} = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \varphi \pm \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n.$$

Здесь выбор менее очевиден. Если вспомним, что при любом $a \in [-1; 1]$ справедливо тождество $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, то выбор становится

ясен: $\varphi = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$. Будем иметь:

$$2x = \begin{cases} \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}} + \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n, \\ \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}} - \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ \frac{\pi}{2} - 2 \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n. \end{cases}$$

Итак, $x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{4}{\sqrt{17}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Уравнения рассмотренного вида можно решать, используя замену «тангенс половинного аргумента». Мы предложим ещё один метод через равносильные преобразования.

а) $\sin x - 2\cos x = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2(1 + \cos x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 4\cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} \pi + 2\pi n, \\ 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) $4\sin 2x + \cos 2x = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 4(1 - \sin 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 4(\cos x - \sin x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0, \\ \cos x + \sin x = 4(\cos x - \sin x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



8. Задачи для самостоятельного решения

1. $10\cos t - 2\sqrt{2}\sin t = 9$.

(Ответ:

$$\pm \frac{\pi}{6} - \arccos \frac{5}{3\sqrt{3}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.)$$

2. $6\sin x + 5\cos x = 5$.

(Ответ: $2\pi n, 2\operatorname{arctg} \frac{6}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$)

3. $\pi \sin z + \sqrt{6} \cos z = \pi + 1$.

(Ответ: $\emptyset$.)

4. Найти множества значений функции $y(x) = \sin^2 x - 12\sin x \cdot \cos x + 7\cos^2 x - \sqrt{20}$.

(Ответ: $[4 - 5\sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}].$)

5. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = 2\sin x$.

(Ответ:

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.)$$

6. $3 + (4\sin x - \sqrt{7})\operatorname{tg} x - 4\cos x = 0$.

(Ответ: $\arccos \frac{3}{4} + 2\pi n,$

$$-\frac{1}{3}\arccos \frac{3}{4} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.)$$

7. $\sin 5x - \cos 3x =$

$$= \sqrt{3}(\sin 3x + \cos 5x).$$

(Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.)$

8. $4\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 =$

$$= 2\sqrt{3}\cos x - 2\sin x.$$

(Ответ: $-\frac{\pi}{6} \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.)$

9. Найти решения уравнения $\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}|\sin x|$ на отрезке

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

(Ответ: $\frac{3\pi}{4}, \frac{13}{12}\pi, \frac{7\pi}{4}.$)

10. $8|\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x| =$

$$= \cos 18x + 12\cos 9x + 27.$$

(Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.)$