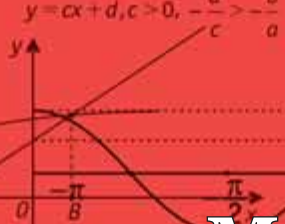


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика



Вавилов Валерий Васильевич

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и школы имени А.Н. Колмогорова. Заслуженный преподаватель и лауреат Ломоносовской премии МГУ. Автор 21 книги, более 250 статей научного, методического и научно-популярного характера.



Махров Антон Владиславович

Студент 1-го курса географического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Теорема Архимеда о площади параболического сегмента

Изучению квадратных уравнений, а также аналитических свойств графика $y = ax^2 + bx + c$ (параболы) в процессе обучения вполне заслуженно отводится значительное время. Но часто при этом в стороне остаются геометрические свойства. Рассмотрению чисто геометрических свойств параболы – кривой, одной из важнейших для приложений, и посвящена эта работа. Доказывается теорема Архимеда о площади параболического сегмента и сформулирован проект для самостоятельных исследований.

1. *Парабола* как кривая на плоскости определяется заданием прямой линии d и точки F (не принадлежащей d) как множество всех точек плоскости P , равноудалённых как от прямой d , так и от точки F . Прямая d называется *директрисой* параболы, а точка F – её *фокусом*.

Для построения точек параболы проведём какую-либо окружность радиуса r с центром в точке F и прямую p , параллельную директрисе d и на расстоянии r от неё (рис. 1); при этом прямая p выбирается в той же

полуплоскости, где расположен фокус F . Если у такой окружности и

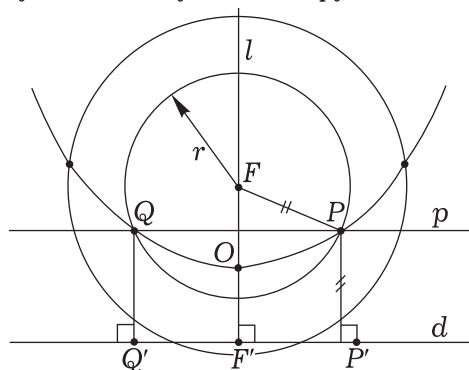


Рис. 1

прямой p имеются точки пересечения P и Q , то они, конечно, принадлежат параболы. Проводя многократно такие построения, мы можем построить много точек параболы. Из описанного построения следует, что парабола имеет ось симметрии l , которой служит прямая, проходящая через точку F и перпендикулярная прямой d . Ясно, что середина отрезка FF' (точка O) принадлежит параболы, и эта точка называется *вершиной* параболы.

В частности, график функции $y = x^2$ является параболы, директрисой которой служит прямая $y = -\frac{1}{4}$, а её фокус находится в точке $F(0; \frac{1}{4})$. Действительно, любая точка рассматриваемого графика имеет координаты $(x_0; x_0^2)$ при некотором x_0 . Тогда квадрат расстояния от этой точки до точки $(0; \frac{1}{4})$ равен

$$\begin{aligned} (x_0 - 0)^2 + \left(x_0^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \\ &= x_0^4 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{16} = \left(x_0^2 + \frac{1}{4}\right)^2, \end{aligned}$$

что равно квадрату расстояния от этой же точки до прямой $y = -\frac{1}{4}$.

Упражнение 1. Найти фокус и директрису параболы, заданной уравнением

$$y = x^2 + bx + c.$$

2. Заметим, что точки параболы могут быть построены ещё и по-другому. Выберем на директрисе произвольную точку P' (на рис. 2 выбраны две произвольные точки P' и Q') и проведём через P' перпендикуляр к директрисе d ; точка P , которая явля-

ется точкой пересечения этого перпендикуляра с серединным перпендикуляром отрезка FP' , конечно, принадлежит параболы. Это следует из того, что серединный перпендикуляр отрезка состоит из точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

Отметим, что если провести достаточно много описанных выше серединных перпендикуляров к отрезку FP' , меняя выбор точки P' , но не проводя перпендикуляров в точке P' , мы отчётливо «увидим» параболы (на ПК это видно очень ясно и красиво; рекомендуем попробовать).

Сказанное выше и проделанные чертёжные эксперименты мотивируют следующее определение.

Касательной к параболы в точке P мы назовём прямую, которая является *серединным перпендикуляром* к отрезку FP' (рис. 2), где точка P' такова, что прямая PP' и директриса параболы d перпендикулярны.

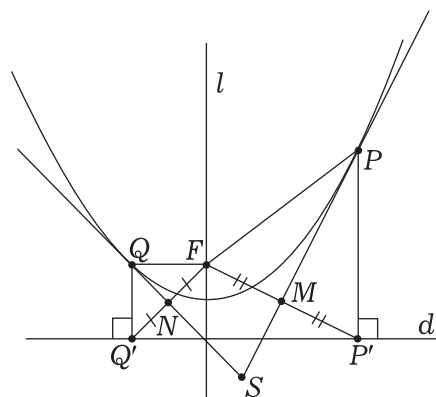


Рис. 2

Важно, что данное нами *конструктивное* определение касательной к параболы равносильно другому, в котором касательной в точке P называется прямая, не параллельная оси параболы и имеющая только одну

общую точку с ней. Действительно, предположим, что серединный перпендикуляр к отрезку FP' имеет другую, отличную от P точку R , принадлежащую параболе (рис. 3). Тогда $FR = RR'$ по определению параболы, а $FR = RP'$, так как точка R расположена на серединном перпендикуляре к отрезку FP' . Следовательно, если $P \neq R$, то мы получаем прямоугольный треугольник $RP'R'$, у которого катет равен гипотенузе. Полученное противоречие и доказывает нужное нам свойство серединного перпендикуляра.

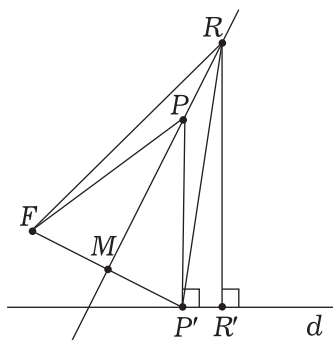


Рис. 3

Итак, парабола расположена полностью по одну сторону по отношению к любой своей касательной.

Упражнение 2. Парабола делит плоскость на две части. Докажите, что одна из этих частей является выпуклым множеством (т. е. таким, в котором вместе с любыми двумя его точками содержатся все точки отрезка, его соединяющего).

Упражнение 3. (Оптическое свойство). Докажите, что если $PA \parallel l$ (рис. 3 а), то прямые PA и FA образуют одинаковые углы с касательной к параболе в точке A (для параболического зеркала угол падения луча света равен углу отражения).

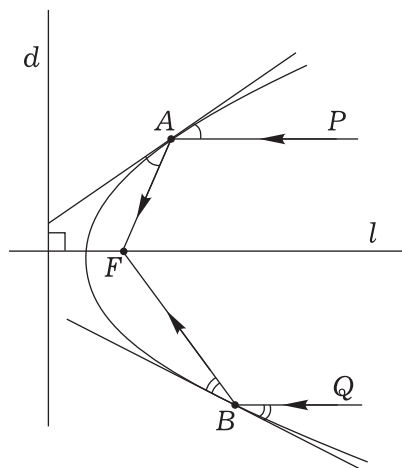


Рис. 3 а

Упражнение 4. На рис. 3 б в точке P параболы проведены касательная t и нормаль n (прямая, содержащая P и перпендикулярная t), которые пересекают ось l параболы в точках Q и S ; через T обозначена ортогональная проекция точки P на ось l параболы. Доказать, что

$$F'F = TS \text{ и } QF = FS.$$

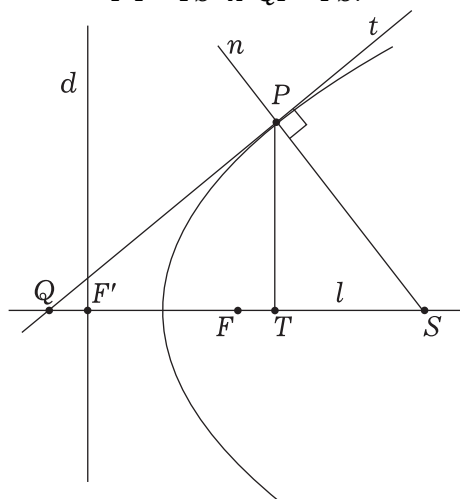


Рис. 3 б

3. Как построить касательную к параболе, проходящую через заданную точку S ? Если точка S расположена

«внутри параболы» (в той из двух частей, на которые парабола делит плоскость и в которой находится фокус параболы), то касательной не существует; докажите это самостоятельно.

Если точка S расположена во внешности параболы, то таких различных точек две. Для поиска алгоритма их построения предположим, что они уже построены (рис. 4).

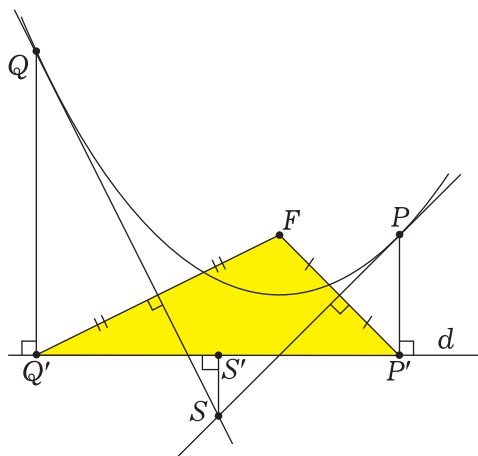


Рис. 4

Тогда точка S является пересечением двух серединных перпендикуляров к отрезкам FP' и FQ' , т. е. является центром окружности, описанной около треугольника $FP'Q'$. И теперь построение касательной становится вполне ясным: сначала мы проводим окружность с центром точке S и радиусом SF ; эта окружность пересечёт директрису d параболы в некоторых точках P' и Q' , и тогда серединные перпендикуляры к отрезкам FP' и FQ' являются искомыми касательными.

Из того, что точка S является центром описанной окружности треугольника $FP'Q'$, следует, что точка S также принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку $P'Q'$ (и, тем самым, на рис. 4 точка S' делит

пополам отрезок $P'Q'$). Поэтому если точка S принадлежит директрисе d , (т. е. совпадает с точкой S'), то S делит сторону $P'Q'$ пополам и является центром описанной окружности. Следовательно, $\angle Q'FP' = 90^\circ$.

Таким образом, мы установили одно из характеристических свойств параболы: *из каждой точки директрисы парабола видна под прямым углом*.

4. Пусть A и B – две различные точки параболы; отрезок AB в дальнейшем мы будем называть *хордой* параболы. Как построить касательную к параболе, которая параллельна хорде AB ? Если предположить, что касательная в точке T параллельна хорде AB , то $AB \perp FT'$ (рис. 5), так как эта касательная является серединным перпендикуляром к отрезку FT' . Заметив это, нетрудно построить сначала точку T' как точку пересечения перпендикуляра к AB , проходящего через фокус F параболы, с директрисой d , а затем, восстанавливая перпендикуляр в точке T' , по-

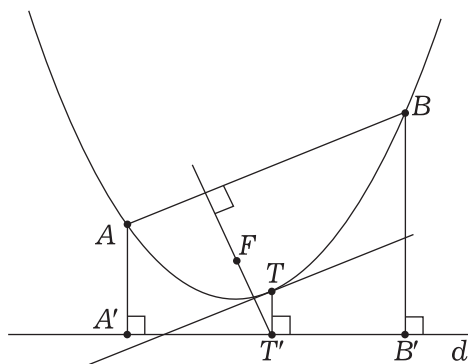


Рис. 5

лучить и искомую точку T (в которой касательная параллельна AB).

Установим одно важное свойство точки T , в которой касательная па-

параллельна хорде AB . А именно, докажем, что точка T' является серединой отрезка $A'B'$ (рис. 6).

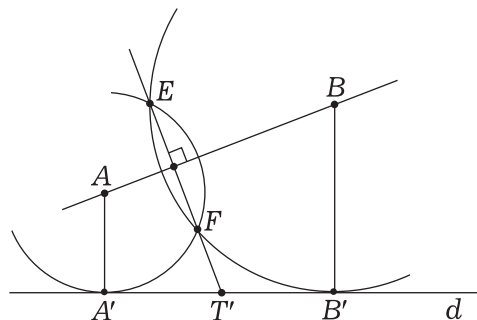


Рис. 6

Для доказательства этого проведём окружности с центрами в точках A и B радиусами AF и BF соответственно. Эти окружности касаются директрисы параболы в точках A' и B' , а их общая хорда EF перпендикулярна линии их центров AB , поэтому точка пересечения прямой EF с директрисой параболы даёт точку T' .

По теореме о квадрате касательной (сначала для одной окружности, а потом для другой) имеем равенства:

$$(A'T')^2 = T'F \cdot T'E,$$

$$(T'B')^2 = T'F \cdot T'E,$$

поэтому $A'T' = T'B'$.

Замечание. Для функции $y = f(x)$, непрерывной и дифференцируемой внутри некоторого интервала Δ , имеет место теорема Лагранжа о конечных приращениях: для любых $a, b \in \Delta$ существует такая точка ξ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что (рис. 7) для любой «хорды AB » графика функции $y = f(x)$ внутри отрезка $[a, b]$ найдётся по крайней мере одна такая

точка $x = \xi$, что касательная к графику функции в точке $(\xi, f(\xi))$ будет параллельна прямой AB . Например, на рис. 7 из прямоугольного треугольника ABC заключаем, что

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

что согласуется с геометрическим смыслом величины $f'(\xi)$, которая равна тангенсу угла наклона касательной к графику в точке $(\xi, f(\xi))$. В ситуации, указанной на рис. 7, таких точек две.

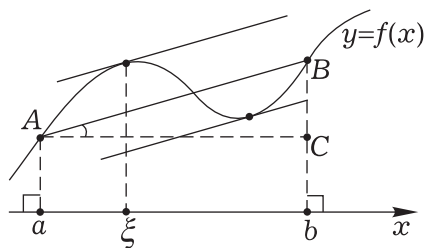


Рис. 7

Доказанное выше свойство параболы означает, что для квадратичной функции $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$, $\alpha \neq 0$, при любом выборе чисел a и b на оси Ox точка ξ всегда находится в середине отрезка $[a, b]$, то есть $\xi = \frac{a+b}{2}$.

Верно и обратное утверждение: если в теореме Лагранжа о конечных приращениях для функции $y = f(x)$, определённой, непрерывной и дифференцируемой на всей числовой прямой при любых a и b , $a < b$, имеет место равенство $\xi = \frac{a+b}{2}$, то $f(x)$ — многочлен степени не выше 2.

Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно!

Если продлить прямую ST до пересечения с хордой AB (рис. 8), то SR

по доказанному является средней линией трапеции $ABB'A'$, и поэтому SR — медиана треугольника SAB .

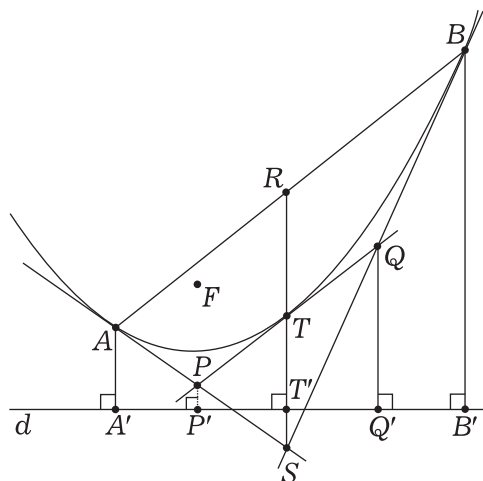


Рис. 8

Кроме того, если прямые PQ и AB параллельны, то PQ является *средней линией* треугольника SAB (тем самым, точка T – середина медианы SR). Это является следствием того, что точки P' и Q' (рис. 8) являются по доказанному ранее серединами отрезков $A'T'$ и $T'B'$ (через P и Q проходят по две касательных к параболе). Тогда, например, прямая PP' делит пополам любой отрезок с концами на параллельных прямых AA' и RS и, в частности, отрезок AS .

5. Касательные к параболе в точках A , B и касательная PQ в точке T на рис. 9 образуют треугольник PQS , причём эти три касательные являются серединными перпендикулярами к отрезкам FA' , FB' и FT' соответственно. Заметим теперь, что ортогональные проекции фокуса F на стороны (или на их продолжения) треугольника PQS , т. е. точки K , L и M (рис. 9) лежат на одной прямой, а именно, на касательной

к параболе в её вершине O , т. к. эта касательная параллельна директрисе, а O – середина отрезка FF' .

Так как точки K, L и M лежат на одной прямой (рис. 9) то $\angle KLP = \angle QLM = \alpha$. Точки F, Q, M и L лежат на одной окружности, так как отрезок FQ из точек M и L виден под прямым углом; следовательно, $\angle QFM = \angle QLM = \alpha$ как углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, точки F, K, P и L лежат на одной окружности, так как отрезок FP из точек K и L виден под прямым углом, и, тем самым, $\angle KFP = \angle KLP = \alpha$ (как углы, опирающиеся на одну дугу).

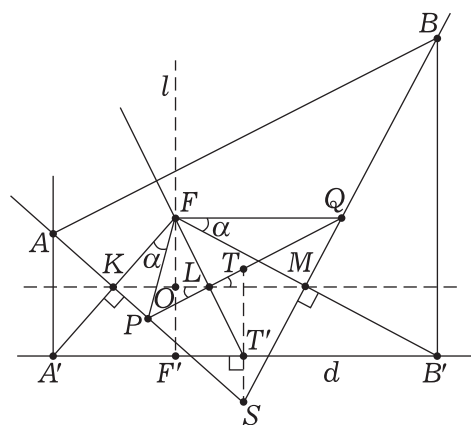


Рис. 9

Вокруг четырёхугольника $KFMS$ можно описать окружность, так как отрезок FS виден из точек K и M под прямым углом, поэтому

$$\angle KFM = 180^\circ - \angle PSQ = \angle PFQ.$$

Другими словами, фокус F параболы расположен на описанной окружности треугольника SPQ .

Подводя итоги проведённым исследованиям, сформулируем их в виде доказанной нами теоремы.

Теорема. Для параболы с фокусом F и директрисой d , её хорды AB , ка-

сательные к которой в точках A и B пересекаются в точке S , имеют место следующие утверждения (рис. 8):

1) медіана SR трикутника SAB паралельна осі параболы, т. е. перпендикулярна директрисе d ;

2) медиана SR пересекает параболу в точке T , касательная PQ в которой параллельна хорде AB , и отрезок PQ является средней линией треугольника SAB .

3) фокус F параболы принадлежит описанной окружности треугольника SPQ .

Замечание. а) Третье утверждение теоремы справедливо для любых трёх различных касательных к параболе в точках A, B, C и образующих треугольник PQS (рис. 10). Более того, каждая точка описанной окружности треугольника SPQ , за исключением его вершин S, P и Q , является фокусом некоторой параболы.

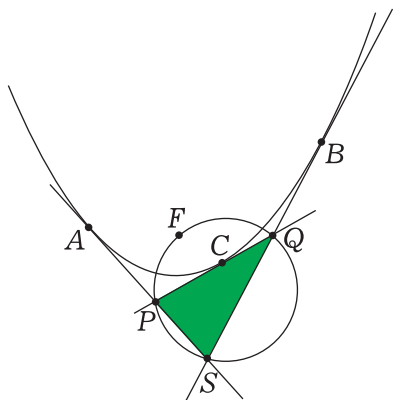


Рис. 10

лы, касающейся трёх сторон (или их продолжений) треугольника SPQ . Таким образом, так называемых *вневписанных парабол* для наперёд заданного треугольника SPQ бесконечно много, и их фокусы целиком заполняют описанную окружность треугольника SPQ с удалён-

ными от неё вершинами этого треугольника.

б) В основе доказательства, сформулированного выше в п. а) общего утверждения, лежат свойства прямой Симпсона треугольника SPQ . В рассмотренном нами случае на рис. 9 такой прямой служит прямая, содержащая точки K, L, M .

Более подробно см. [2], [3], а мы ограничимся здесь только формулировками двух задач.

Задача 1. Докажите, что треугольники SAF и SBF подобны (в обозначениях рис. 8).

Задача 2. Докажите, что ортоцентр треугольника, описанного около параболы (прямые, содержащие стороны треугольника, являются касательными), принадлежит директрисе параболы.

Указание. Это очень красивое утверждение доказывается с помощью другого не менее красивого факта из геометрии треугольника: *прямая Симпсона точки Р относительно треугольника ABC делит отрезок PH пополам, где H – ортоцентр треугольника.*

Сама же теорема Симпсона (возникающая в ней прямая и называется прямой Симпсона) формулируется так: *ортогональные проекции точки P на стороны (или их продолжения) треугольника ABC лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC .*

Подробности см. в [2] и [3].

6. Пусть A и B – две различные точки параболы, касательные в которых пересекаются в точке S (рис. 11); T – середина медианы SR треугольника SAB и PQ – средняя линия треугольника SAB (напомним, что PQ касается параболы в точке T).

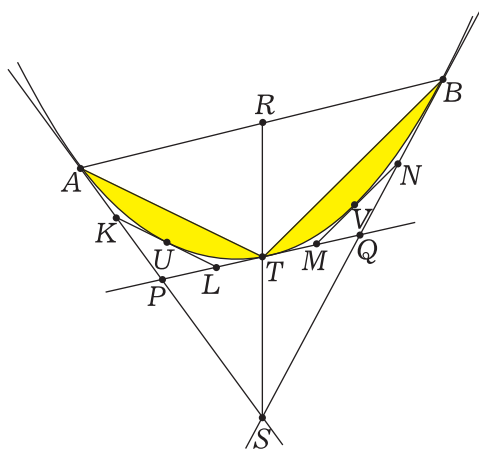


Рис. 11

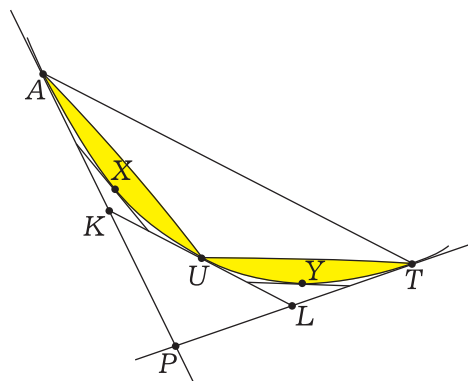


Рис. 12

Тогда, если через $[\Phi]$ обозначить площадь фигуры Φ , то

$$[SPQ] = \frac{1}{4}[SAB], \quad [PABQ] = \frac{3}{4}[SAB],$$

$$[TAB] = \frac{1}{2}[SAB].$$

Если U и V – точки параболы, в которых касательные KL и MN параллельны соответственно AT и BT , то

$$\begin{aligned} [UAT] + [VTB] &= \frac{1}{2}([PAT] + [QBT]) = \\ &= \frac{1}{2}([ABQP] - [ABT]) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)[SAB] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [SAB]. \end{aligned}$$

Рассматривая теперь сначала тре-

угольник PAT (рис. 12; X и Y – точки, в которых касательные параллельны UA и UT), а затем треугольник QTB (рис. 13; D , C – точки, в которых касательные параллельны VT и VB) и

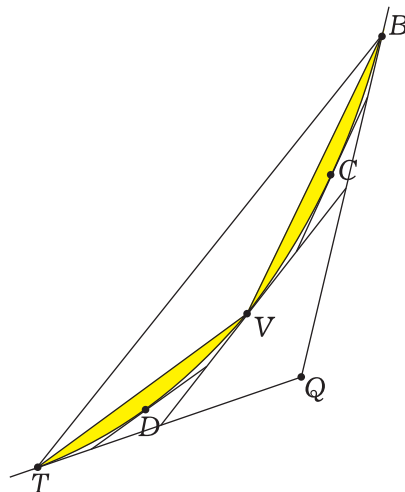


Рис. 13

проведя сравнение площадей аналогично тому, что было сделано выше, получим

$$\begin{aligned} &[TAB] + ([UAT] + [VTB]) + \\ &([XAU] + [YUT]) + ([DTV] + [CVB]) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [SAB] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot [SAB] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot [SAB]. \end{aligned}$$

Рассуждая дальше точно таким же образом, можно заключить, что площадь параболического сегмента (ограниченного хордой AB и дугой параболы) равна

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot [SAB] \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} [SAB] = \frac{2}{3} \cdot [SAB]. \end{aligned}$$

Полученное равенство принадлежит великому Архимеду и является

одной из первых теорем теории, которая через двадцать веков получила название интегрального исчисления.

Теорема Архимеда. *Площадь параболического сегмента, ограниченного хордой AB и дугой параболы, равна $\frac{2}{3}$ от площади треугольника SAB, где S – точка пересечения касательных к параболе, проведённых в точках A и B.*

Следствие. Если треугольник SPQ образован тремя касательными к параболе в точках A, B, C (рис. 14), то $[ABC] = 2[SPQ]$.

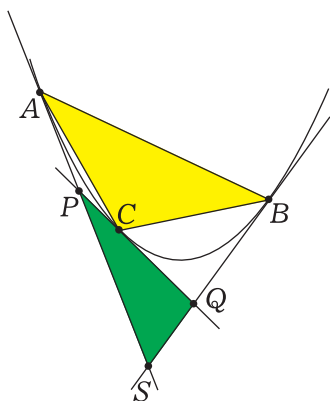


Рис. 14

Для доказательства заметим, что $[Сегмент ACB] = [ABC] + [Сегмент AC] + [Сегмент CB]$, а с другой стороны, по теореме Архимеда

$$[Сегмент ACB] = \frac{2}{3} \cdot [SAB] =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot ([SPQ] + [PAC] + [QBC] + [ABC]).$$

Вычтя одно равенство из другого, получим нужное соотношение между площадями треугольников SAB и SPQ.

7. В заключение приведём научно-исследовательский проект, который может послужить основой для подготовки доклада на научной конференции учащихся.

Три параболы, которые проходят через каждые две вершины данного треугольника ABC и касаются двух его сторон, образуют криволинейный (параболический) треугольник PQR (рис. 15). Найти $[PQR]/[ABC]$.

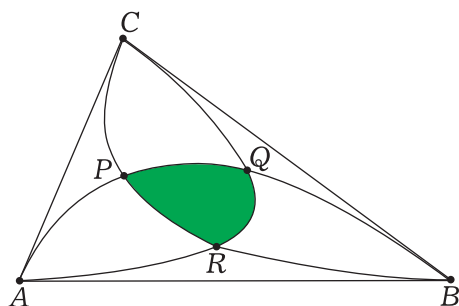


Рис. 15

Указание. Построение точек таких парабол может быть основано на том, что каждая парабола проходит через середину средней линии треугольника (и касается её в этой точке). Попробуйте самостоятельно построить по 5 точек каждой из этих парабол. Точки P, Q и R принадлежат медианам треугольника ABC и делят их в отношении 8:1, считая от вершины.

Литература

1. Архимед. Квадратура параболы. – М.: Физматгиз, 1962.
2. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
3. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.