

Шугалов Борис Сергеевич

*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры естественно-научных
и математических дисциплин
Кузбасского регионального института
повышения квалификации
и переподготовки работников образования.*



Простое свойство равнобедренной описанной трапеции – пути обоснования

Свойства определённой геометрической фигуры выявляются и доказываются в ходе решения ведущего вопроса о равенстве площадей двух неравных многоугольников. Показано, как изменения чертежа к задаче приводят к различным способам её решения. При этом используются основные свойства площади, признаки равенства треугольников, симметрия и другие свойства геометрических фигур.

Задача. Вокруг окружности с центром в точке O описана равнобедренная трапеция. Через вершину меньшего основания и центр O проведена прямая, разбивающая трапецию на два многоугольника. Найдите отношение площадей этих многоугольников.

1. Используем осевую симметрию равнобедренной трапеции. Сделаем чертёж. Окружность с центром O вписана в равнобедренную трапецию $ABCD$. Прямая CO разбивает трапецию на треугольник CDE и трапецию $ABCE$ (рис. 1). Докажем, что площади этих многоугольников равны:

$$S(CDE) = S(ABCE).$$

Через точку O проведём прямую, перпендикулярную основанию AD (а значит, и основанию BC). Пусть M и N – точки пересечения этой прямой с основаниями трапеции.

Прямая MN является осью симметрии трапеции $ABCD$; ось MN разбивает трапецию на две равные трапеции. Поэтому площади этих трапеций равны:

$$S(ABMN) = S(DCMN) = \frac{1}{2} S(ABCD).$$

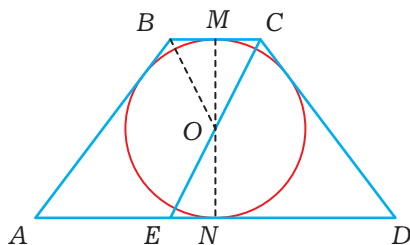


Рис. 1

Трапеция $ABMN$ состоит из пятиугольника $ABMOE$ и треугольника EON . Трапеция $ABCE$ состоит из того же пятиугольника $ABMOE$ и

треугольника COM . Треугольники EON и COM равны. А значит, трапеции $ABMN$ и $ABCE$ – равносоставленные фигуры; их площади равны:

$$S(ABMN) = S(ABCE) = \frac{1}{2}S(ABCD).$$

Отсюда следует, что

$$S(ABCE) = S(CDE).$$

Многоугольники, на которые прямая CO разбивает данную трапецию, равновелики.

Проведённое рассуждение не имеет достаточного обоснования: следует доказать, что треугольники EON и COM равны, а прямая MN – ось симметрии трапеции $ABCD$.

Обоснование представленного решения. Точка N совпадает с точкой касания окружности и прямой AD (рис. 1). В самом деле, соединим точку O с точкой касания окружности основания AD . Получим перпендикуляр к прямой AD , опущенный из точки O (касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, проведённому в точку касания). Совпадение точки N с точкой касания следует из единственности перпендикуляра, проведённого через данную точку к данной прямой.

Аналогично устанавливается, что точка M совпадает с точкой касания

окружности и прямой BC . Треугольники EON и COM равны по стороне ($OM = ON$) и прилежащим к ней углам.

Точка M – середина основания BC (рис. 1). Действительно, углы при основании равнобедренной трапеции равны, $\angle B = \angle C$. А лучи BO и CO – биссектрисы этих углов. Поэтому равны прямоугольные треугольники OBM и OCM ($\angle OBM = \angle OCM$, катет OM – общий). Следовательно, $BM = CM$. Аналогично устанавливается, что точка N – середина основания AD . А значит, преобразование симметрии относительно прямой MN переводит трапецию $ABCD$ в себя. Прямая, проходящая через центр окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, и перпендикулярная её основаниям, совпадает с осью симметрии трапеции.

Приведём другой способ доказательства принадлежности центра O оси симметрии трапеции $ABCD$.

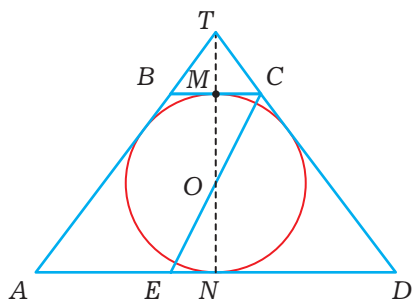


Рис. 2

Продолжим боковые стороны данной трапеции до их пересечения в точке T (рис. 2). Получим равнобедренный треугольник ATD ($AT = TD$). Перпендикуляр TN , опущенный из вершины T на основание AD равнобедренного треугольника, делит угол ATD пополам. Луч TN представляет собой геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла ATD . Так как центр окружности равноудалён от сторон



угла ATD , то он принадлежит прямой TN .

Перпендикуляр TN треугольника ATD является и его медианой, $AN = DN$; аналогично, точка M – середина основания BC . Поэтому прямая TN – ось симметрии трапеции $ABCD$.

2. По-другому докажем равносоставленность данных многоугольников. Из вершин B и C меньшего основания опустим перпендикуляры на большее основания трапеции. Получим прямоугольник $BCHE$ (рис. 3).

Так как $\triangle ABE = \triangle DCH$ и $\triangle BCE = \triangle HEC$, то трапеция $ABCE$ и треугольник CDE – равносоставленные фигуры, а значит, равны их площади:

$$S(ABCE) = S(CDE).$$

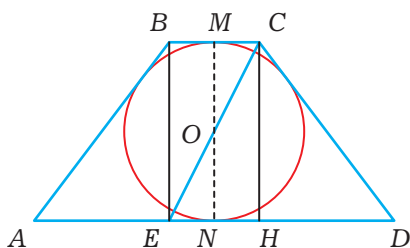


Рис. 3

При таком подходе к решению задачи следует доказать, что основание перпендикуляра, проведённого из вершины B к прямой AD , принадлежит прямой CO .

Доказательство. Соединим точку B с точкой E и докажем, что угол BEA – прямой (рис. 3). Через точку O проведём прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пересечение этой прямой с прямыми BC и AD – точки M и N . Как было доказано выше (пункт 1), треугольники EON и COM равны и точка N – середина отрезка AD . Так как $CM = EN$ и $CM = NH$, то $EN = NH$. Поэтому

$$AE = AN - EN = DN - NH = DH.$$

Треугольники ABE и DCH равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = DC$, $AE = DH$, $\angle A = \angle D$). Следовательно, $\angle BEA = \angle CHD = 90^\circ$.

Итак, прямая, проходящая через вершину меньшего основания равнобедренной трапеции и центр вписанной в неё окружности, проходит и через основание высоты трапеции, проведённой из другой вершины её меньшего основания.

3. Используем центральную симметрию прямоугольника. Через вершины A и D большего основания трапеции проведём прямые, перпендикулярные основанию трапеции. Пусть A_1 и D_1 – точки пересечения этих прямых с прямой BC (рис. 4).

Построен прямоугольник AA_1D_1D . Если центр окружности O совпадает с центром F этого прямоугольника – точкой пересечения его диагоналей, то трапеция AA_1CE симметрична трапеции D_1DEC относительно точки O . Эти трапеции равны, поэтому равны их площади:

$$S(AA_1CE) = S(D_1DEC).$$

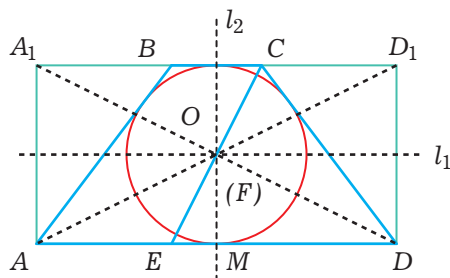


Рис. 4

Трапеция AA_1CE состоит из трапеции $ABCE$ и треугольника AA_1B ; трапеция D_1DEC состоит из треугольников CDE и DD_1C .

$$S(AA_1CE) = S(ABCE) + S(AA_1B),$$

$$S(D_1DEC) = S(CDE) + S(DD_1C).$$

Треугольники AA_1B и DD_1C равны (по гипотенузе и катету), а значит, равны их площади:

$$S(AA_1B) = S(DD_1C).$$

Из выписанных соотношений следует равенство:

$$S(ABCE) = S(CDE).$$

Докажем, что центр окружности O совпадает с центром F прямоугольника AA_1D_1D .

Через центр F проходят две оси симметрии прямоугольника AA_1D_1D . Ось l_1 является геометрическим местом точек, равноудалённых от прямых AD и BC (рис. 4). Так как центр окружности равноудалён от этих прямых, то он принадлежит оси l_1 . Убедимся, что центр окружности O принадлежит и второй оси l_2 прямоугольника AA_1D_1D .

Как установлено в пункте 1, прямая, проходящая через центр O и перпендикулярная основанию трапеции AD , делит это основание пополам. А значит, является осью симметрии l_2 прямоугольника AA_1D_1D .

Центр окружности, как и центр прямоугольника AA_1D_1D , — общая точка двух осей симметрии этого прямоугольника. А значит, центр вписанной в равнобедренную трапецию окружности совпадает с центром построенного по данной трапеции прямоугольника.

4. Применим формулы для площади треугольника и трапеции. Площадь треугольника

$$S(CDE) = \frac{1}{2} DE \cdot CH \text{ (рис. 5).}$$

Рассматривая чертёж, можно предположить, что треугольник CDE равнобедренный: $CD = DE$.

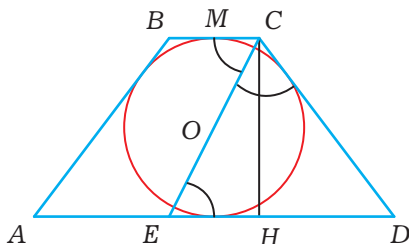


Рис. 5



В самом деле, $\angle BCE = \angle CED$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых) и $\angle BCE = \angle DCE$ (луч CO — биссектриса угла BCD). Следовательно, $\angle CED = \angle DCE$. Треугольник CDE — равнобедренный. Поэтому площадь треугольника CDE можно представить в виде:

$$S(CDE) = \frac{1}{2} CD \cdot CH.$$

Площадь трапеции

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CH.$$

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника равны:

$$AD + BC = AB + CD.$$

Поэтому выражение для площади равнобедренной трапеции принимает вид:

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot CH = CD \cdot CH.$$

Из полученных выражений для площади треугольника и трапеции следует $S(ABCE) = S(CDE)$.

5. А если провести среднюю линию трапеции? Середина средней линии описанной равнобедренной трапеции совпадает с центром вписанной в неё окружности.

В самом деле, прямая KL , содержащая среднюю линию трапеции, есть геометрическое место то-

чек, равноудалённых от прямых AD и BC (рис. 6). Центр окружности O равноудалён от прямых AD и BC , и значит, принадлежит прямой KL .

Прямая MN , проходящая через точку O и перпендикулярная основаниям равнобедренной трапеции, — ось симметрии трапеции. По точке O однозначно определяются две точки трапеции K и L , симметричные относительно оси MN : $OK = OL$, а значит, центр O совпадает с серединой F средней линии трапеции.

Но в *любой* трапеции прямая, проходящая через вершину меньшего основания и середину её средней линии, разбивает трапецию на две равновеликие части!

Действительно, отрезок FL является средней линией треугольника CDE (рис. 6). Поэтому

$$\begin{aligned} S(CDE) &= \frac{1}{2} DE \cdot CH = FL \cdot CH = \\ &= \frac{1}{2} S(ABCD). \end{aligned}$$

К такому же результату приводит использование подобия треугольников CDE и CLF (рис. 6):

$$\begin{aligned} S(CDE) &= 4 \cdot S(CLF) = 4 \cdot \frac{FL}{2} \cdot \frac{CH}{2} = \\ &= \frac{1}{2} KL \cdot CH = \frac{1}{2} S(ABCD). \end{aligned}$$

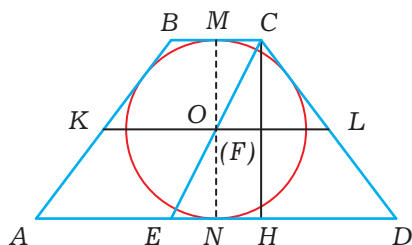


Рис. 6

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор



Нужны оба

— Я по объявлению вашего банка. Вы ищете нового кассира?

— Да. И старого тоже.

Хорошо считает...

Один из бывших одноклассников спрашивает другого:

— Как тебе удаётся шикарно жить при не очень большом бизнесе? Как ты рассчитываешь свой доход и свои возможности? По математике-то ты не блистал.

— Очень просто. Беру, например, тысячу долларов, лечу в Турцию, покупаю там дешёвые вещи и продаю их здесь за две тысячи. Вот так и живу на эти два процента.