Математика

Закарян Ваник Суренович
Доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Армении, декан факультета прикладной математики Государственного инженерного университета Армении (Политехник).



Аракелян Арман Гомеросович
Кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель декана заочного факультета Государственного инженерного университета Армении (Политехник).



О последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос

Рассматриваются три разные последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос. Для радиуса n-й окружности этих последовательностей получены некоторые соотношения, выраженные через радиус окружности, вписанной в Арбелос.

В течение последних десятилетий интерес геометров к фигуре, названной Архимедом «Арбелос» (греч. $\alpha\rho\beta\varepsilon\lambda\sigma\sigma$ – нож сапожника, на рис. 1 она выделена цветом) значительно возрос [1–4]. Для этой фигуры выявлено множество знаменательных свойств, некоторые из них описаны в работах [5, 6]. В частности, в [5] рассчитан радиус окружности, вписанной в Арбелос, а в [6] приведено доказательство теоремы Паппа о последовательности окружностей Паппа, вписанных в Арбелос.

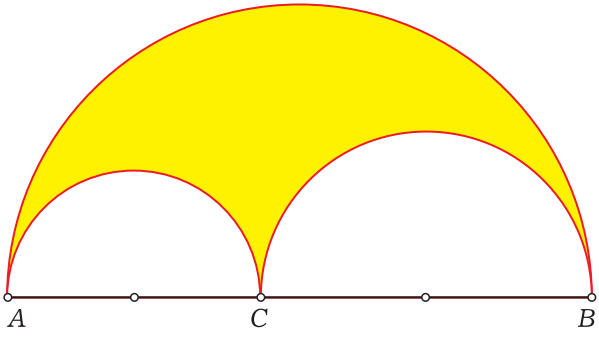


Рис. 1

Радиус полуокружности ω_{AB} с диаметром AB обозначим через R, а радиус левой полуокружности ω_{AC} с диаметром AC – через r. Отсюда очевидно, что радиус полуокружности ω_{CB} с диаметром CB будет $R - r$.

Если вписанную в Арбелос окружность ω_1 соединим с бесконечной последовательностью окружностей $\omega_i\,(i=2,3\ldots)$, каждая из которых касается соседних окружностей ω_{i-1} и ω_{i+1}, а также двух дуг, ограничивающих Арбелос, то последовательность полученных окружностей назовём *цепью Паппа*. Заметим, что для любого Арбелоса можно сконструировать три разные цепи Паппа (см. рис. 2). Цепи Паппа, стремящиеся к точкам A, B и C, обозначим соответственно символами Ω_A, Ω_B и Ω_C. Отметим, что, в сущности, теорема Паппа касается только цепей Ω_A и Ω_B, и согласно формулам, полученным в [4] и [6], для n-ых ($n = 1, 2, \ldots$) окружностей этих цепей имеем следующие соотношения:

$$R_n^A = \frac{R\cdot r\cdot(R-r)}{n^2r^2+R\cdot(R-r)}, \qquad (1)$$

$$R_n^B = \frac{R\cdot r\cdot(R-r)}{n^2(R-r)^2+R\cdot r}. \qquad (2)$$

В данной работе, применяя теорему Декарта и метод математической индукции, получаем аналог формул (1) и (2) для радиуса R_n^C n-й (n=1, 2, ...) окружности цепи Ω_C.

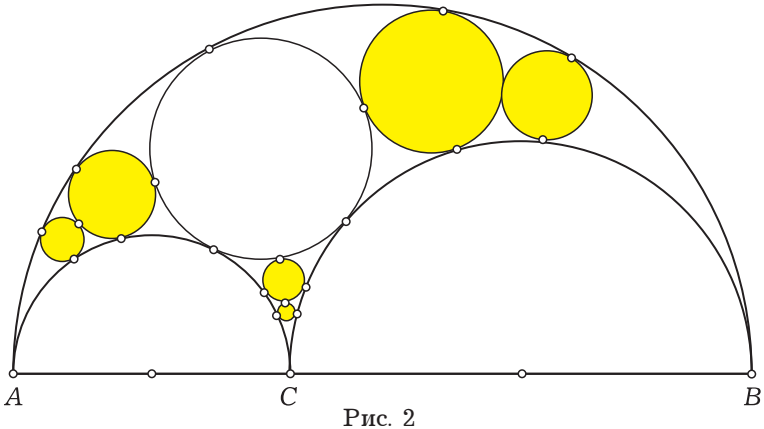


Рис. 2

Теорема Декарта

Рассмотрим четыре окружности B_1, B_2, B_3, B_4, взаимокасающиеся в шести разных точках, любые три из которых не имеют общей касательной. Такое расположение окружностей называется *конфигурацией Декарта*, все возможные варианты которой приведены на рис. 3. Здесь считаем возможными те конкретные случаи, когда некоторые окружности являются прямыми. Обозначим радиус окружности $B_i\,(i=\overline{1,4})$ через r_i, а их соответствующие кривизны – через $\beta_i = 1/r_i$, $i=\overline{1,4}$ (величина, обратная радиусу окружности, называется *кривизной* окружности). Примем, что прямая имеет бесконечный радиус, следовательно, её кривизна равна нулю.

Выявление соотношений между радиусами окружностей в конфигурациях Декарта является одной из древнейших задач геометрии. Например, Архимед, изучая свойства Арбелоса, получил некоторые соотношения в нескольких частных случаях для конфигурации типа (*c*) на рис. 3 [7].

В 1643 г. Р. Декарт в своём письме принцессе Элизабет отмечает одно соотношение между четырьмя

радиусами, содержание которого, в терминах кривизны окружностей, выражается в следующей теореме.

Теорема (Декарт). *В конфигурации Декарта кривизны взаимокасающихся окружностей удовлетворяют следующему соотношению:*

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2 = \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \beta_i \right)^2 . \qquad (3)$$

Декарт рассматривал только конфигурацию типа (a), но его теорема применима для всех типов конфигураций (a) – (d), если только для каждой из окружностей знак её кривизны определим следующим образом: если участвующая в конфигурации окружность B_i с радиусом r_i имеет с другими только внешнее касание, её кривизна принимается равной $1/r_i$, а если она имеет с остальными окружностями только внутреннее касание, то равной $-1/r_i$.

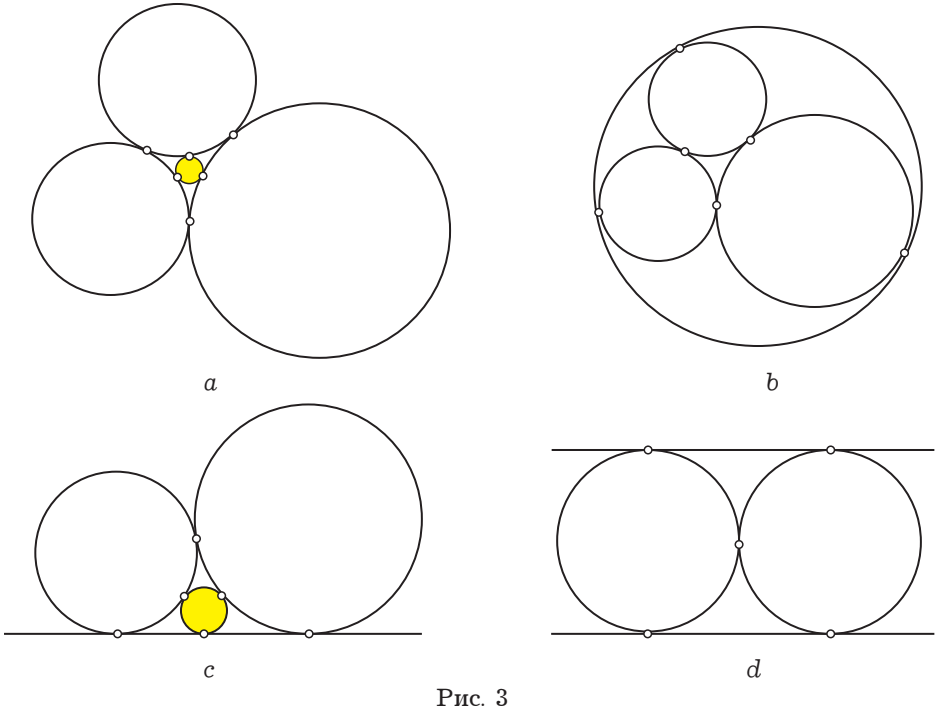


Рис. 3

В математической литературе часто встречаются самые разные доказательства теоремы Декарта, с некоторыми из которых можно познакомиться, например, в [8, 9].

В данной работе приводится такое доказательство этой теоремы, где изящество и загадочность конфигураций Декарта наиболее выявлены.

Доказательство. Сначала отметим, что окружности B_i, $i = \overline{1,4}$ определяют иную конфигурацию четырёх окружностей Γ_i, $i = \overline{1,4}$, взаимокасающихся в одних и тех же шести точках (рис. 4). В частности, Γ_1 проходит через три точки касания окружностей B_2, B_3, B_4, а Γ_2 – через три точки касания окружностей B_1, B_3, B_4 и т. д. Обозначим кривизну окружности Γ_i через γ_i.

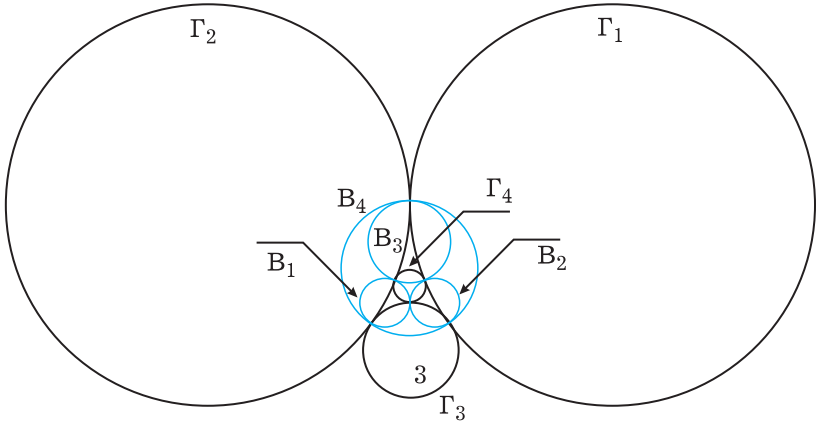
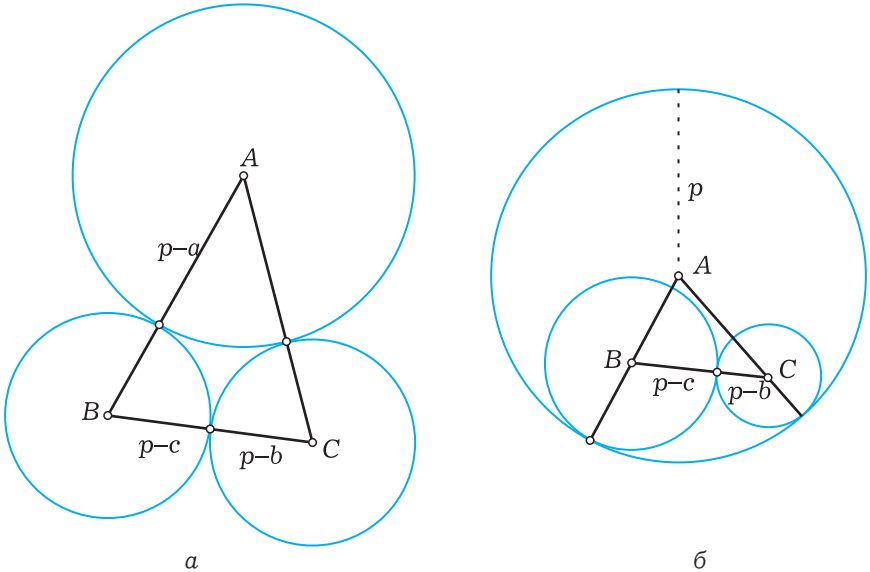


Рис. 4

Нетрудно заметить, что если центры окружностей B_1, B_2, B_3 образуют треугольник ABC, то Γ_4 является вписанной или вневписанной окружностью этого треугольника. В частности, если окружности B_1, B_2, B_3 имеют расположение, приведённое на рисунке 5 *а*, то Γ_4 будет вписанной окружностью треугольника ABC. Для этого случая будем иметь:



а *б*

Рис. 5

$$\beta_1 = \frac{1}{p-a},\ \beta_2 = \frac{1}{p-b},\ \beta_3 = \frac{1}{p-c},\ \gamma_4 = \pm\frac{1}{r},$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC, противоположные соответственно вершинам A, B, C; p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Если окружности B_1, B_2, B_3 имеют расположение, приведённое на рисунке 5 *б*, то $Г_4$ будет вневписанной окружностью треугольника *ABC*. В этом случае будем иметь:

$$\beta_1 = -\frac{1}{p},\ \beta_2 = \frac{1}{p-b},\ \beta_3 = \frac{1}{p-c},\ \gamma_4 = \pm\frac{1}{r_a},$$

где r_a – радиус вневписанной окружности, противоположной вершине *A* треугольника *ABC*.

Применяя известные формулы для радиусов вписанных и вневписанных окружностей

$$r^2 = \left(\frac{S}{p}\right)^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p},$$



$$r_a^2 = \left(\frac{S}{p-a}\right)^2 = \frac{p\cdot(p-c)(p-b)}{p-a}$$

в обоих вышеуказанных случаях, получим следующее соотношение:

$$\beta_1\cdot\beta_2 + \beta_1\cdot\beta_3 + \beta_2\cdot\beta_3 = \left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}\right)\cdot\beta_1\cdot\beta_2\cdot\beta_3 = \gamma_4^2. \quad (4)$$

Аналогично можно показать, что

$$\gamma_1\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot\gamma_3 + \gamma_2\cdot\gamma_3 = \beta_4^2. \quad (5)$$

Очевидно, что перестановка индексов 1, 2, 3, 4 в соотношениях (4) и (5) снова приведёт к равенству. Следовательно:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\beta_i\right)^2 = \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\beta_4^2+2\beta_1\beta_2+2\beta_1\beta_3+2\beta_1\beta_4+2\beta_2\beta_3+2\beta_2\beta_4+2\beta_3\beta_4 = \sum_{i=1}^{4}\beta_i^2+\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^2. \quad (6)$$

Поскольку последнее равенство симметрично относительно β_i и γ_i, то можно утверждать, что оно равно $\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i\right)^2$, т. е.

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\beta_i^2+\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^2. \quad (7)$$

Непосредственно из равенств (6) и (7) получаем следующее соотношение:

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4 = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4 > 0.$$

Проводя следующую последовательность преобразований:

$$(\beta_1+\beta_2+\beta_3-\beta_4)\cdot(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4) = (\beta_1+\beta_2+\beta_3)^2-\beta_4^2 = \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2-\beta_4^2+2\gamma_4^2 =$$

$$= (\gamma_2\gamma_3+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4)+(\gamma_1\gamma_3+\gamma_1\gamma_4+\gamma_3\gamma_4)+(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_4)-(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)+2\gamma_4^2 =$$

$$= 2(\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_4+\gamma_3\gamma_4)+2\gamma_4^2 = 2\gamma_4(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

будем иметь

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3-\beta_4 = 2\gamma_4, \quad (8)$$

откуда за счёт перестановки индексов 1, 2, 3, 4 получим четыре аналогичных соотношения. Возведя обе стороны этих соотношений во вторую степень и складывая их соответствующие стороны, получим

$$\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2 = \sum_{i=1}^{4}\gamma_i^2.$$

Имея в виду последнее равенство, непосредственно из (6) получаем доказательство теоремы:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\beta_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{4}\beta_i^2+\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^2 = 2\sum_{i=1}^{4}\beta_i^2.$$

Согласно обозначениям, сделанным для Арбелоса в пункте 1, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для радиуса R_n^c n-й окружности цепи Ω_c окружностей Паппа, вписанных в Арбелос, имеет место следующее соотношение:*

$$R_n^c = \frac{R\cdot r\cdot(R-r)}{n^2R^2 - r(R-r)}. \qquad (9)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы применим метод математической индукции. В случае $n = 1$ имеем:

$$R_1^c = \frac{R\cdot r\cdot(R-r)}{R^2 - r(R-r)}. \qquad (10)$$

Следовательно, в этом случае утверждение правильно, так как первая окружность цепи Паппа и есть окружность, вписанная в Арбелос, для радиуса которой имеет место формула (10) (см., например, [6]).

Предположим, что формула (9) справедлива для любого натурального числа $k \le n$, и покажем, что она справедлива и для $(n+1)$. Заметим, что окружности ω_n, ω_{n+1} цепи Паппа Ω_c вместе с окружностями Арбелоса ω_{AC} и ω_{CB} образуют конфигурацию Декарта. Следовательно, применяя теорему Декарта, получим:

$$2(\beta_n^2 + \beta_{n+1}^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2) = (\beta_n + \beta_{n+1} + \beta_{AC} + \beta_{CB})^2, \qquad (11)$$

где величины $\beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{AC}, \beta_{CB}$ – кривизны соответственно окружностей $\omega_n, \omega_{n+1}, \omega_{AC}, \omega_{CB}$.



Очевидно, что (11) можно написать в следующем виде:

$$\beta_{n+1}^2 - 2\beta_{n+1}(\beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB}) + \beta_n^2 + \beta_{AC}^2 + \beta_{CB}^2 - 2(\beta_n\beta_{AC} + \beta_{AC}\beta_{CB} + \beta_n\beta_{CB}) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получим $\beta_{n+1} = \beta_n + \beta_{AC} + \beta_{CB} + 2\sqrt{\beta_n\beta_{AC} + \beta_{AC}\beta_{CB} + \beta_n\beta_{CB}}$. Подставляя в последнее равенство $\beta_{AC} = \frac{1}{r}$, $\beta_{BC} = \frac{1}{R-r}$ и $\beta_n = \frac{R\cdot r(R-r)}{n^2R^2 - r\cdot(R-r)}$, будем иметь:

$$\beta_{n+1} = \frac{n^2R^2 - r(R-r)}{R\cdot r(R-r)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R-r} + 2\sqrt{\frac{n^2R^2 - r(R-r)}{R\cdot r^2(R-r)} + \frac{1}{r(R-r)} + \frac{n^2R^2 - r(R-r)}{R\cdot r(R-r)^2}} =$$

$$= \frac{n^2R^2 + R^2 - r(R-r)}{R\cdot r(R-r)} + \frac{2nR}{r(R-r)} = \frac{(n+1)^2R^2 - r(R-r)}{R\cdot r(R-r)}.$$

Следовательно,

$$R_{(n+1)}^C = \frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{R\cdot r(R-r)}{(n+1)^2R^2 - r(R-r)}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что утверждение (9) справедливо также для $(n+1)$, откуда, согласно методу математической индукции, оно будет справедливо для любого целого числа $n \ge 1$.

Литература

1. *Dodge C.W., Schoch T., Woo P.Y.* and *Yiu P.*, Those ubiquitous Archimedean circles, *Math. Mag.*, 72 (1999), 202–213.
2. *Power F.*, Some more Archimedean circles in the arbelos, *Forum Geom.*, 5 (2005), 133–134.
3. *Woo P.Y.*, Simple constructions of the incircle of an arbelos, *Forum Geom.*, 1 (2001), 133–136.
4. *Bankoff L.*, The marvelous arbelos, in *The lighter Side of Mathematics*, 247–253, ed. R.K. Guy and R.E. Woodrow, Mathematical Association of America, 1994.
5. *Закарян В.С., Аракелян А.Г.* Некоторые свойства Арбелоса. – Ереван: Бнагет 5–6 (2003) 61–68.
6. *Закарян В.С., Аракелян А.Г.* Теорема Паппа об Арбелосе. – Ереван: Бнагет 3–4 (2003) 43–48.
7. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962.
8. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. – М., 1988.
9. H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, Second Edition, John Wiley and Sons, New York, (1969).

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

О «вратах учёности» Ломоносова

Как известно, «вратами своей учёности» Михаил Васильевич Ломоносов называл «Арифметику» Л. Магницкого и «Славянскую грамоту» М. Смотрицкого. Они были первыми нецерковными книгами, которые ему удалось прочитать в детстве, и произвели на него огромное впечатление, особенно, что кажется удивительным, сильно поразила его «Арифметика». Неужели изложением простых арифметических действий?

В какой-то мере да, но не только этим. Книга Магницкого была не просто привычным нам учебником только арифметики, а своего рода энциклопедией наук того времени: кроме правил вычисления, она содержала многие сведения по физике, астрономии, геометрии, навигации и др. Причём написана она была простым доступным мальчику языком и давала простор его богатому воображению.