

Мирошин Владимир Васильевич

Учитель гимназии № 1522 г. Москва, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.



Параллельное проектирование в задачах

Изображение пространственной фигуры играет важную роль в решении большинства стереометрических задач. Существуют общепринятые и часто используемые изображения основных стереометрических объектов – призм, пирамид, конусов и т.д. Но изображение – плоское, и поэтому фигура может изображаться в различных ракурсах.

В рассматриваемых ниже задачах к решению приводит построение изображений многогранников, отличающееся от обычных.

Задача 1. (МГУ, мехмат) На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1 (рис. 1). Найдите отношение $MN : AC_1$.

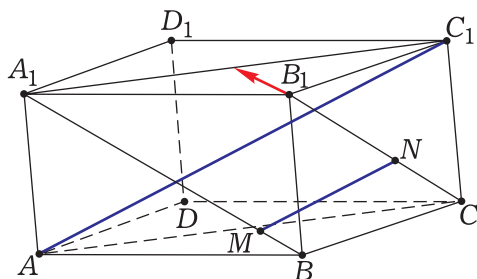


Рис. 1

Решение. Посмотрим на параллелепипед «вдоль» диагонали $B_1 D_1$ (рис. 2).

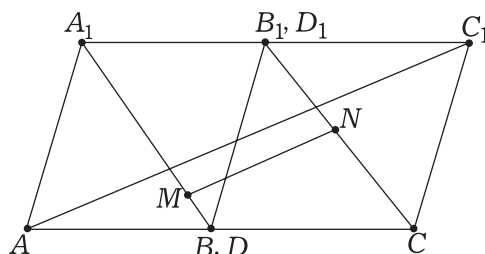


Рис. 2

Образы вершин B и D совпадут с серединой AC , аналогично образы вершин B_1 и D_1 совпадут с серединой $A_1 C_1$. При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому образы диагоналей $A_1 B$ и $B_1 C$ разделят образ AC на три равных

отрезка, средний из которых будет равен образу MN . Поэтому

$$MN : A_1C = 1 : 3.$$

Ответ: 1:3.

Задача 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$ (рис. 3). Найдите отношение $EF : BN$.

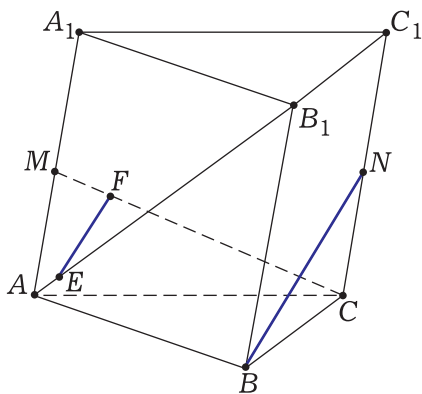


Рис. 3

Решение. Выберем в качестве плоскости проектирования плоскость основания призмы (ABC), а в качестве прямой проектирования – прямую MC . При таком выборе образом боковой грани AA_1C_1C призмы будет отрезок, расположенный на прямой AC , а образом боковой грани BB_1C_1C – параллелограмм, одной из сторон которого будет BC (рис. 4).

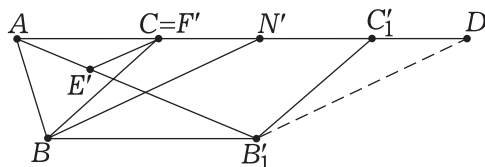


Рис. 4

Так как N – середина ребра и $A_1N \parallel MC$, то $AC = CN' = N'C'_1$, где N', C'_1 – образы соответствующих точек. Проведём $B'_1D \parallel BN'$. Получим:

$$\frac{EF}{BN} = \frac{E'F'}{BN'} = \frac{AF'}{AD} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1:4.

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ точки M, F и K – середины рёбер BC, AD, CD соответственно. На прямых AM и CF взяты соответственно точки P и Q так, что $PQ \parallel BK$ (рис. 5). Найдите отношение $PQ : BK$.

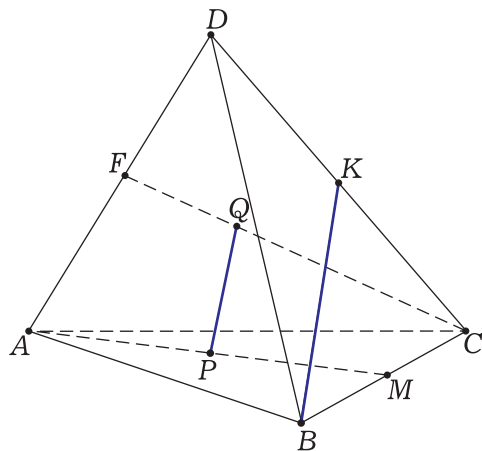


Рис. 5

Решение. Следуя предыдущим примерам, мы должны выбрать плоскость проектирования и прямую проектирования так, чтобы наиболее простым образом найти нужное нам отношение. В качестве плоскости проектирования изберём плоскость основания (ABC), а в качестве прямой проектирования – прямую FC . образом отрезка $FK = \frac{1}{2}AC$ будет отрезок $CK' = \frac{1}{2}AC$. образом отрезка PQ будет отрезок $PC \parallel BK'$ (рис. 6).

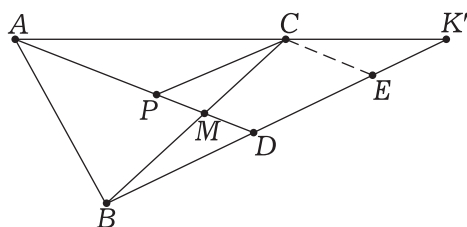


Рис. 6

Продолжим AM до пересечения с BK' в точке D и проведём $CE \parallel AD$. Получим:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BD}{PC} = \frac{1}{1}, \frac{CK'}{CA} = \frac{K'E}{ED} = \frac{1}{2}.$$

И так как $PC = ED$, получим, что

$$\frac{PQ}{BK} = \frac{PC}{BK'} = \frac{2}{2+2+1} = \frac{2}{5}.$$

Ответ: 2:5.

Задача 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбраны точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости (BDC_1) и $AM:AD=1:5$ (рис. 7). Найдите отношение $CN:CA_1$.

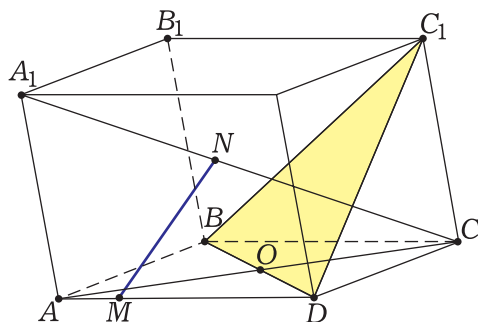


Рис. 7

Решение. Как и в первой задаче, построим проекцию параллелепипеда на плоскость (AA_1C_1C) вдоль прямой BD . Так как прямая проектирования лежит в плоскости (BC_1D) , то эта плоскость отобразится в прямую OC_1 , а параллельный плоскости от-

резок MN – в отрезок $M'N \parallel OC_1$
(рис. 8).

Продолжим C_1O и NM' до пересечения с AA_1 . Имеем:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AM'}{M'O} = \frac{1}{4}, \quad \frac{M'O}{OC} = \frac{NP}{PC} = \frac{4}{5}.$$

Так как O – середина AC , то

$$AQ = AA_1, \quad \frac{AR}{RQ} = \frac{1}{4}, \quad \frac{A_1R}{RQ} = \frac{6}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{CN}{A_1C} = \frac{9}{4+5+6} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 3:5.

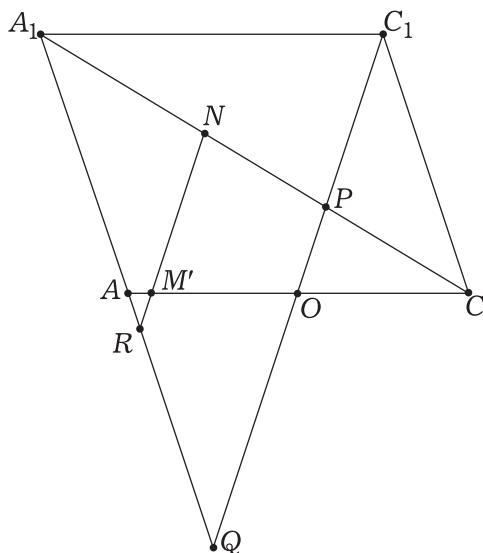


Рис. 8

Задача 5. (МФТИ, 1981 г., конкурс абитуриентов 2007/2008 года по решению задач вступительных испытаний МФТИ) Точка D – середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью треугольника ABC , вершина M лежит на продолжении AC , причём $CM =$

$= \frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D , а ребро SP пересекает отрезок BB_1 (рис. 9). В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

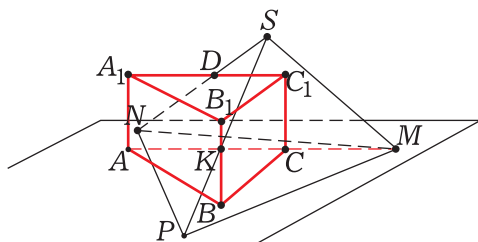


Рис. 9

Решение. Прежде всего, посмотрим «сверху», т.е. спроектируем оба многогранника на их общую плоскость основания. Вершина S пирамиды спроектируется в центр треугольника MNP (рис. 10).

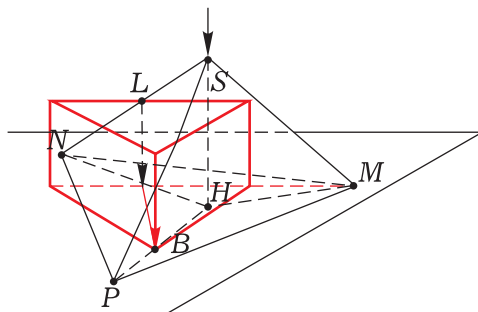


Рис. 10

Образами боковых рёбер будут служить радиусы описанной возле него окружности, проведённые в вершины. Образы точек D и K будут лежать на перпендикуляре, проведённом к AM из вершины B . Но самое интересное, что точка M , точка B и образ точки D будут видны из образа вершины пирамиды под углами $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, точка H —

точка Торричелли для прямоугольного треугольника MBD (рис. 11).

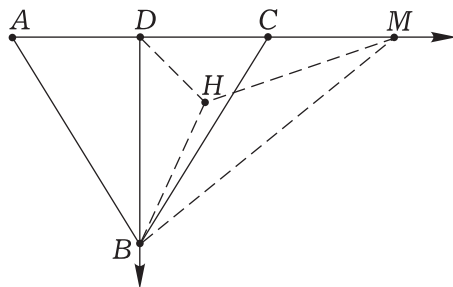


Рис. 11

Не меняя общности, образ точки D мы обозначили также. Напомним, что точкой Торричелли называется точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Из условия задачи можно найти отношение $BD:DM = b:a = \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi = \angle DMB$.

Следует установить отношение расстояний от точки H до вершин прямоугольного $\triangle MBD$. Введём систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в точке D , ось абсцисс была направлена по лучу DM , а ось ординат — по лучу DB .



Точка H будет точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников DHB и MHD , углы в вершинах H которых равны $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 12). Кроме того, окружность, описанная около первого треугольника, пройдёт, очевидно, через точку A . Следовательно, AB – её диаметр, а её уравнение:

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4}.$$

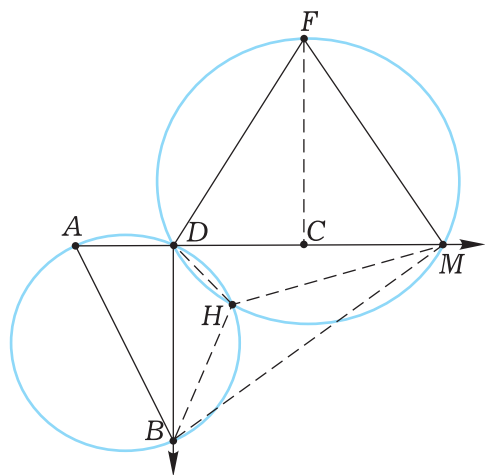


Рис. 12

Аналогично, точка H будет лежать на окружности, описанной возле равно-
стороннего треугольника DMF , сто-
рона основания которого равна a . Её
уравнение будет иметь вид:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Для нахождения координат точки N решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ x^2 - ax + y^2 + \frac{a\sqrt{3}}{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ \frac{3a}{2}x = \left(b + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}a}{2(a+b\sqrt{3})}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}x + y^2 - by = 0, \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)}x, \\ x^2 \left(1 + \frac{27}{4(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)^2} \right) + x \left(\frac{a}{2} - \frac{3\sqrt{3}a \cdot \operatorname{tg}\varphi}{2(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi)} \right) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что первое решение системы $(0; 0)$, т.к. обе окружности проходят через начало координат.

Найдём второе решение системы, обозначив $\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi = k$:

$$\begin{aligned} x \left(\frac{4(1+k)^2 + 27}{4(1+k)^2} \right) &= \frac{a}{2} \left(\frac{2k-1}{1+k} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= a \cdot \frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2 + 27}. \end{aligned}$$

Соответственно

$$\begin{aligned} y &= \frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)} \cdot a \cdot \frac{2(2k-1)(k+1)}{(4(k+1)^2+27)} = \\ &= a \frac{3\sqrt{3}(2k-1)}{4(k+1)^2+27}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $k = \frac{3}{2}$, получим ко-

ординаты точки H :

$$x = \frac{5}{26}a, \quad y = a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{26}.$$

Найдём искомые расстояния:

$$DH = \sqrt{\frac{25}{676} + \frac{27}{676}} \cdot a = \sqrt{\frac{52}{676}} \cdot a = \frac{a}{\sqrt{13}};$$

$$HM = \sqrt{\left(\frac{5}{26} - 1\right)^2 + \frac{27}{676}} \cdot a =$$

$$= \sqrt{\frac{441 + 27}{676}} \cdot a = \frac{3a}{\sqrt{13}};$$

$$HB = \sqrt{\frac{25}{676} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{26} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cdot a =$$

$$= \sqrt{\frac{325}{676}} \cdot a = \frac{5a}{2\sqrt{13}}.$$

Для получения окончательного решения сделаем ещё вот что: совместим треугольники SHM , SHP и SHN (рис. 13). Так как

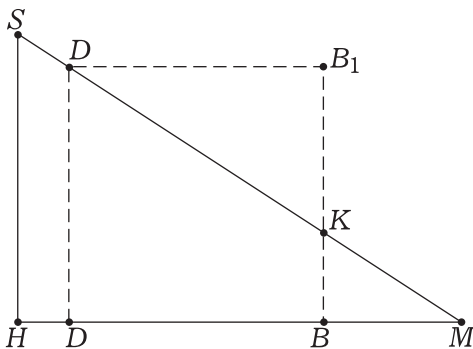


Рис. 13

$$HD = \frac{1}{3}HM, \quad HB = \frac{5}{6}HM, \quad \text{то}$$

$$\frac{B_1K}{KB} = \frac{DK}{KM} = \frac{DB}{BM} = \frac{3}{1}.$$

Действительно, «сверху и сбоку» виднее.

Ответ: 3:1.

Упражнения.

1. На диагоналях AC и BA_1 боковых граней параллелепипеда

$ABCA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда DB_1 . Найдите отношение $MN:DB_1$.

2. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ взята точка M , а на прямой B_1C — точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

3. Точка E — середина ребра MQ правильной четырёхугольной пирамиды $SMNPQ$. Куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что плоскость грани $ABCD$ совпадает с плоскостью $MNPQ$, вершина B_1 лежит на ребре SN , точка E лежит на прямой AB , причём $EA = AB$. Прямая SP пересекает ребро CC_1 . В каком отношении отрезок CC_1 делится точкой пересечения?

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра A_1C_1 . Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью (ABC) , первое боковое ребро проходит через вершину B , второе — через точку D , а третье пересекает ребро CC_1 . Найдите отношение объёма пирамиды к объёму призмы.

5. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали DB_1 . В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1 ?

Ответы к упражнениям. 1) 1:2; 2) 1:3; 3) 5:1; 4) 16:21; 5) 5:1, считая от точки B .