



Фалин Геннадий Иванович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор около 100 научных работ и 8 книг.



Фалин Анатолий Иванович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор 5 книг и около 50 научных и учебно-методических работ.

Одно замечательное тождество для $\sin(nx)$

Статья посвящена доказательству одного замечательного тождества для представления $\sin(nx)$ через произведение синусов. Эта формула может быть с успехом применена во многих задачах тригонометрии, содержащих большое число синусов и косинусов разных углов при наличии определённой закономерности величин этих углов. Такие задачи часто встречаются на математических олимпиадах разного уровня и вступительных экзаменах в вузы.

На вступительных экзаменах в вузы, а также на математических олимпиадах разного уровня достаточно часто встречаются задачи на преобразование тригонометрических выражений: упростить выражение, вычислить без таблиц, доказать тождество и т. п. Мы выбрали несколько задач, которые предлагались на вступительных испытаниях и олимпиадах в МГУ им. М.В. Ломоносова. Отбор конкретных задач связан с тем, что в каждой из них присутствует произведение некоторого числа синусов и косинусов. Несмотря на то, что решение каждой задачи имеет свои специфические

особенности, все их можно решить с помощью одной красивой формулы для преобразования $\sin(nx)$ в произведение синусов:

$$\sin nx = 2^{n-1} \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{n} \right) \times \sin \left(x + \frac{2\pi}{n} \right) \cdot \dots \cdot \sin \left(x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right). \quad (1)$$

В реальных задачах элементарной математики на преобразование тригонометрических выражений всегда можно ограничиться частными случаями тождества (1) для относительно небольших значений n . Эти случаи можно и обосновать самостоятельно, без ссылок на основ-

ное тождество. Вместо с тем тождество (1) имеет многочисленные связи с глубокими понятиями и результатами высшей математики: формула

Эйлера для разложения $\sin x$ в бесконечное произведение, многочлены Чебышева, формула умножения Гаусса для гамма-функции и т. д.

Важные частные случаи

Формулу (1) в общем случае мы докажем в конце статьи. Вначале рассмотрим частные случаи этой формулы для $n = 2, 3, 4, 5$.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \\ &= 2^2 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sin 4x &= 2^3 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{2\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sin 5x &= 2^4 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{2\pi}{5} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{3\pi}{5} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{4\pi}{5} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Тождество для $\sin 2x$

Тождество (2) почти очевидно. Достаточно вспомнить хорошо известную формулу для синуса двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ и заменить в ней $\cos x$ на $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Тождество для $\sin 3x$

Для доказательства тождества (3) нам придется использовать стандартную формулу для синуса тройного угла

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad (6)$$

и заняться эквивалентными преобразованиями. Прежде всего, в правой части тождества (6) вынесем за скобки общий множитель $2 \sin x$ и заменим $2 \sin^2 x$ на $1 - \cos 2x$. Получим

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 2 \sin x \left(\frac{3}{2} - 2 \sin^2 x \right) = \\ &= 2 \sin x \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\frac{1}{2} = -\cos \frac{2\pi}{3}$, а $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$, то формула (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 2 \sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= 4 \sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Вид формулы (8) очень похож на формулу (3). Для окончательного преобразования учтём, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin(\pi - \alpha), \quad \text{т. е.} \quad \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \\ &= \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Это и заканчивает обоснование тождества (3).

Тождество для $\sin 4x$

Тождество (4) для $\sin 4x$ легко получить двойным применением тождества (2). Но мы проделаем чуть более длинные преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве тождества (3). Позже подобные преобразования позволят доказать тождество для $\sin(nx)$. Итак,

$$\begin{aligned} \sin 4x &= \sin(2 \cdot 2x) = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = \\ &= 4 \sin x \cdot \cos x \cdot \left(\cos 2x - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 8 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \times \\ &\times \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 8 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 2^3 \sin x \times \\ & \times \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Тождество для $\sin 5x$

Более сложным является доказательство тождества для $\sin 5x$. Начнём с очевидного преобразования:

$$\begin{aligned} \sin 5x &= \sin(3x + 2x) = \\ &= \sin 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x. \end{aligned}$$



Применяя формулы для синуса и косинуса двойного и тройного аргумента, мы получим:

$$\begin{aligned} \sin 5x &= (3\sin x - 4\sin^3 x) \cdot \cos 2x + \\ &+ (4\cos^3 x - 3\cos x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \\ &= \sin x((3 - 4\sin^2 x) \cdot \cos 2x + \\ &+ 2\cos^2 x(4\cos^2 x - 3)). \end{aligned}$$

Заменим $2\sin^2 x$ на $1 - \cos 2x$ и $2\cos^2 x$ на $1 + \cos 2x$. Тогда получим $\sin 5x = \sin x(4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1)$. (9)

Подставим в (9) конкретное числовое значение $x = \frac{\pi}{5}$. Так как $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$, мы получим, что

$$\begin{aligned} 4\cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2\cos \frac{2\pi}{5} - 1 &= 0, \quad \text{т. е. } t_1 = \\ &= \cos \frac{2\pi}{5} \text{ является корнем трёхчлена} \\ &4t^2 + 2t - 1. \end{aligned}$$

Аналогично, подставив в (9) конкретное числовое значение $x = \frac{2\pi}{5}$,

мы получим, что вторым корнем будет $t_2 = \cos \frac{4\pi}{5}$.

Поэтому трёхчлен $4t^2 + 2t - 1$ можно разложить на линейные множители:

$$4t^2 + 2t - 1 = 4\left(t - \cos \frac{2\pi}{5}\right)\left(t - \cos \frac{4\pi}{5}\right).$$

Тогда соотношение (9) примет вид:

$$\begin{aligned} \sin 5x &= 4\sin x \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi}{5}\right) \times \\ &\times \left(\cos 2x - \cos \frac{4\pi}{5}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Раскладывая разность косинусов в произведение, мы получим представление для $\sin 5x$ в виде произведения синусов:

$$\begin{aligned} \sin 5x &= 16\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \times \\ &\times \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} + x\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) уже очень похожа на доказываемую формулу (5). Так как $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, перепишем второй и четвертый сомножители в следующем виде

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) &= \sin\left(x + \frac{4\pi}{5}\right), \\ \sin\left(\frac{2\pi}{5} - x\right) &= \sin\left(x + \frac{3\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

Тем самым мы доказали тождество (5).

Замечание. Отметим, что корни квадратного трёхчлена $4t^2 + 2t - 1$ можно найти, непосредственно решив квадратное уравнение $t_{1,2} =$

$$= 4t^2 + 2t - 1 = 0, \text{ что даёт } t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Поскольку $t_1 = \cos \frac{2\pi}{5} > 0$, а $t_2 = \cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} < 0$, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ &= \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \\ \sin 54^\circ &= \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \end{aligned} \quad (12)$$

Примеры решения задач

Задача 1 (ф-т ВМК, 1999, устный экзамен). Доказать, что

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}.$$

Первый способ решения. Будем использовать тождество для $\sin 3x$, записанное нами в виде формулы (8). Причём запишем его не в радианах, а в градусах.

$$\sin 3x = 4 \sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x).$$

При $x = 10^\circ$ (учитывая, что $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$) это соотношение примет вид $\frac{1}{2} = 4 \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$. Задача решена.

Второй способ решения. Преобразуем левую часть требуемого тождества из произведения в сумму (при этом будут появляться значения «красивых» углов — 30° и 60°).

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ &= \\ &= \frac{1}{2} (\cos 40^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \sin 70^\circ = \\ &= \frac{1}{2} \sin 70^\circ \cdot \cos 40^\circ - \frac{1}{4} \sin 70^\circ = \\ &= \frac{1}{4} (\sin 110^\circ + \sin 30^\circ) - \frac{1}{4} \sin 70^\circ = \\ &= \frac{1}{4} \sin 110^\circ + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \sin 70^\circ = \end{aligned}$$

Формулы (12) полезны при решении тригонометрических задач, так как позволяют вычислить без таблиц значения тригонометрических функций аргументов, кратных 18° . Конечно, формулы (12) можно получить и другим способом, без применения формулы (9), например, опираясь на тождество $\sin(2 \cdot 18^\circ) = \sin 36^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \cos 54^\circ$ и формулы для синуса двойного угла и для косинуса тройного угла.

$$= \frac{1}{8} + \frac{\sin 110^\circ - \sin 70^\circ}{4} = \frac{1}{8}.$$

Задача решена.



Третий способ решения. С помощью формулы $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ превратим все синусы в левой части доказываемого тождества в косинусы. Тождество принимает вид

$$\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ = \frac{1}{8}.$$

Умножим и разделим выражение в левой части на $\sin 20^\circ$:

$$\frac{\cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

В числителе применим формулу для произведения $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ сначала для $\alpha = 20^\circ$, затем

для $\alpha = 40^\circ$ и, наконец, для $\alpha = 80^\circ$. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ & \frac{\frac{1}{4} \cos 80^\circ \cdot \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \\ & \frac{\frac{1}{8} \sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\frac{1}{8} \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Задача решена.

Второй и третий способ решения предполагают наличие у читателя достаточно хорошей техники тригонометрических преобразований. Эти преобразования не очень сложны, но в каждом случае надо догадаться до конкретных шагов, которые на первый взгляд далеко не очевидны. Первый же способ сводится к простой подстановке значения $x = 10^\circ = \frac{\pi}{18}$ в формулу (8). Конечно, если школьник её знает.

Задача 2 (физический ф-т, 1961). Вычислить без помощи таблиц

$$\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}.$$

Первый способ решения. Воспользуемся основным тождеством (1) при $n = 7$:

$$\begin{aligned} \sin 7x &= 2^6 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{7} \right) \times \\ & \times \sin \left(x + \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{3\pi}{7} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \sin \left(x + \frac{4\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{5\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{6\pi}{7} \right).$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ эта формула принимает вид числового тождества

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{2} &= 2^6 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7} \right) \times \\ & \times \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{7} \right) \times \\ & \times \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{7} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{6\pi}{7} \right). \end{aligned}$$



Так как $\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,

$\sin \frac{7\pi}{2} = -1$, последнее тождество принимает вид

$$\begin{aligned} -1 &= 2^6 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \times \\ & \times \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7}. \end{aligned} \quad (13)$$

Применяя формулу $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, имеем числовые тождества:

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{7} &= -\cos \frac{4\pi}{7}, \quad \cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}, \\ \cos \frac{6\pi}{7} &= -\cos \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Заменяя соответствующие сомножители в тождестве (13), получим его другой вид:

$$1 = 2^6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \right)^2.$$

Учитывая, что $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \times$
 $\times \cos \frac{4\pi}{7} < 0$, получаем

$$\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$$

Второй способ решения. Будем использовать ту же самую идею, что и в третьем способе решения задачи 1. Умножим и разделим искомое выражение (обозначим его A) на $\sin \frac{\pi}{7}$.

Получим

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}.$$

В числителе применим формулу

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{сначала для}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{7}, \text{ затем для } \alpha = \frac{2\pi}{7}, \text{ и наконец,}$$

$$\text{для } \alpha = \frac{4\pi}{7}. \text{ Получим}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin(\pi + \frac{\pi}{7})}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Задача решена.

Задача 3 (химический ф-т, заочный тур олимпиады, 2002). Доказать, что

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Первый способ решения. Воспользуемся основным тождеством (1) при $n=7$:

$$\begin{aligned} \sin 7x &= 2^6 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{7}\right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{2\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{3\pi}{7}\right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{4\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{5\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{6\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

В правой части этой формулы при $x=0$ возникает нужное нам произведение синусов. Однако наличие в левой и правой частях тождества множителей $\sin 7x$ и $\sin x$ приводит к тому, что при $x=0$ числовое тождество принимает вид $0=0$. Поэтому пойдем другим путем.

Разделим обе части на $\sin x$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 7x}{\sin x} &= 2^6 \sin \left(x + \frac{\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{2\pi}{7}\right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{3\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{4\pi}{7}\right) \times \\ &\times \sin \left(x + \frac{5\pi}{7}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{6\pi}{7}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

и перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$. Первый замечательный предел

счит, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Поэтому предел

левой части формулы (14) равен 7.

Правая часть тождества (14) определена и непрерывна при $x=0$, поэтому предел правой части равен её значению в точке $x=0$. Получаем

$$\begin{aligned} 7 &= 2^6 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \times \\ &\times \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{5\pi}{7} \cdot \sin \frac{6\pi}{7}. \end{aligned}$$

В силу формулы приведения $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} \sin \frac{4\pi}{7} &= \sin \frac{3\pi}{7}, \quad \sin \frac{5\pi}{7} = \sin \frac{2\pi}{7}, \\ \sin \frac{6\pi}{7} &= \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$7 = 2^6 \left(\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \right)^2.$$

Так как синусы углов $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{3\pi}{7}$ положительны, то извлекая корень квадратный из левой и правой частей последнего тождества, получим $\sqrt{7} = 2^3 \sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}$.

Задача решена.

Второй способ решения не будет использовать формулу для $\sin nx$. Число $\sqrt{7}$ совершенно не типично для задач по тригонометрии. Чтобы от него избавиться, возведём обе части доказываемого равенства в квадрат. Получим равносильное тождество

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{7} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}.$$

Теперь понизим степени выражений $\sin^2 x$ в левой части:

$$\left(1 - \cos \frac{2\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7}\right) \cdot \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7}\right) = \frac{7}{8}.$$

Обозначим выражение в левой части через F . Раскрывая скобки, мы получим:

$$F = 1 - A - B + C,$$

где

$$A = \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7},$$

$$B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7},$$

$$C = \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \cos \frac{6\pi}{7}.$$

Выражение A очень похоже на искомое выражение задачи 2. Замена в выражении A один из сомножителей $\cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$ и используя доказанное тождество задачи 2, получаем $A = \frac{1}{8}$.

Выражения B и C могут быть вычислены самостоятельно, однако мы этого делать не будем, достаточно по-

казать, что $B = C$. Для этого в выражении C преобразуем произведение косинусов в сумму косинусов. Получим

$$C = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{10\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right).$$

Поскольку

$$\cos \frac{8\pi}{7} = \cos \frac{6\pi}{7}, \quad \cos \frac{10\pi}{7} = \cos \frac{4\pi}{7},$$

выражение

$$C = B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}.$$

Следовательно,

$$F = 1 - A - B + C = 1 - \frac{1}{8} - B + B = \frac{7}{8},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Предложенный второй способ решения достаточно тяжёлый и к тому же использует решение задачи 2. Первый способ решения тоже не простой, так как использует формулу (1) при $n=7$, но, на наш взгляд, он более красив.

Задача 4 (Олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2008, №8). Вычислить

$$\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ).$$

Первый способ решения. Проблема, очевидно, заключается в вычислении произведения

$$P = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ > 0,$$

которое состоит из 45 сомножителей вида $\sin kx$ для $k=1, 3, \dots, 89$. Чтобы найти P , воспользуемся основным тождеством (1) при $n=90$:

$$\sin 90x = 2^{89} \sin x \cdot \sin(x+2^\circ) \times \sin(x+4^\circ) \cdot \dots \cdot \sin(x+178^\circ).$$

При $x=1^\circ$ это тождество превратится в следующее числовое равенство

$$\sin 90^\circ = 2^{89} \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \dots \cdot \sin 179^\circ.$$

В правой части этого равенства стоит 90 сомножителей. Применяя фор-

муду приведения $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, заменим 45 из них, а именно $\sin 91^\circ$, $\sin 93^\circ$, $\sin 95^\circ$, ..., $\sin 179^\circ$ на $\sin 89^\circ$, $\sin 87^\circ$, $\sin 85^\circ$, ..., $\sin 1^\circ$ соответственно. Поскольку $\sin 90^\circ = 1$, мы получим $1 = 2^{89} P^2$, откуда $P = 2^{-44,5}$. А исходное выражение равно $-44,5$.

Ответ: $\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ) = -44,5$.

Второй способ решения. Применим уже ранее использованную идею – умножить и разделить выражение P на нужный множитель. Только теперь этих дополнительных множителей будет много.

$$\begin{aligned} P &= \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ = \frac{P \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ}{\sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ} = \\ &= \frac{(\sin 1^\circ \cdot \sin 89^\circ) \cdot (\sin 2^\circ \cdot \sin 88^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 44^\circ \cdot \sin 46^\circ) \cdot \sin 45^\circ}{\sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ} = \\ &= \frac{(\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ) \cdot (\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \sin 2^\circ\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 4^\circ\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} \sin 88^\circ\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ} = 2^{-44,5}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\log_2 P = -44,5$.

Задача 5 (ф-т ВМК, 2004, устный экзамен). Доказать равенство

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{179} 2 \sin k^\circ &\equiv \\ &\equiv 2 \sin 1^\circ \cdot 2 \sin 2^\circ \cdot \dots \cdot 2 \sin 179^\circ = 180. \end{aligned}$$

Решение. Введём обозначение

$$\begin{aligned} P &= 2 \sin 1^\circ \cdot 2 \sin 2^\circ \cdot \dots \cdot 2 \sin 179^\circ = \\ &= 2^{179} \prod_{k=1}^{179} \sin \frac{\pi k}{180}. \end{aligned}$$

Чтобы найти P , воспользуемся основным тождеством (1) при $n = 180$:

$$\sin 180x = 2^{179} \prod_{k=0}^{179} \sin \left(x + \frac{\pi k}{180} \right).$$

Разделим обе части этого тождества на $\sin x$:

$$\frac{\sin 180x}{\sin x} = 2^{179} \prod_{k=1}^{179} \sin \left(x + \frac{\pi k}{180} \right)$$

и перейдём к пределу при $x \rightarrow 0$.

Предел левой части легко найти с помощью первого замечательного предела $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, он равен 180.

Правая часть последнего тождества определена и непрерывна при $x = 0$, поэтому предел правой части равен её значению в точке $x = 0$, т. е. в точности P .

Итак, искомое произведение $P = 180$.

Другой способ решения задачи 5, не использующий основного тождества (1), мы предлагаем читателям найти самостоятельно. Основные идеи можно взять из решений задач 1 – 4.

Общий случай: тождество для $\sin nx$

Доказанные тождества для $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$, $\sin 5x$ делают очень

правдоподобной гипотезу о том, что справедливо общее тождество (1).

Более того, тщательный анализ доказательств этих частных тождеств приводит к выводу, что метод, который мы использовали, можно применить для доказательства общего тождества (1) для $\sin nx$.

Обратим внимание, что разложения для $\sin 3x$ и $\sin 5x$ базировались на формулах (7) и (9) соответственно, правые части которых имеют вид $\sin x \cdot P(\cos 2x)$, а при получении разложений для $\sin 2x$ и $\sin 4x$ появлялись выражения $\sin x \cdot \cos x \cdot Q(\cos 2x)$, где $P(t)$ и $Q(t)$ – некоторые многочлены с целыми коэффициентами. Следующие две леммы показывают, что это не случайно.

Лемма 1. Если $n = 2k + 1$ – нечетное число, то

$$\begin{aligned} \sin nx &\equiv \sin(2k+1)x = \\ &= \sin x \cdot P_k(\cos 2x), \end{aligned} \quad (15)$$

где $P_k(t)$ – многочлен степени k с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент равен 2^k .

Доказательство леммы 1

Доказательство основного тождества

Мы отдельно рассмотрим случаи четного n и нечётного n .

1. Если $n = 2k + 1$ – нечётное натуральное число, то применим лемму 1 и разложим многочлен $P_k(t)$ на линейные множители. Как и при выводе формулы для $\sin 5x$, подставим в (15) конкретное числовое значение

$$x_l = \frac{\pi l}{n} \equiv \frac{\pi l}{2k+1}, \quad l = 1, \dots, k. \text{ Ясно, что}$$

$$\sin nx_l = \sin \pi l = 0, \quad \sin x_l = \sin \frac{\pi l}{n} \neq 0.$$

Следовательно, числа $t_l = \cos \frac{2\pi l}{n}$,

$l = 1, \dots, k$ являются корнями много-

можно провести по индукции. Случаи $k = 1$, $k = 2$ уже рассмотрены нами выше – это тождества (7) и (9), при этом $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 2t + 1$,

$P_2(t) = 4t^2 + 2t - 1$. Шаг индукции мы предлагаем любознательному читателю провести самостоятельно.

Лемма 2. Если $n = 2k$ – чётное число, то

$$\begin{aligned} \sin nx &\equiv \sin 2kx = \\ &= \sin x \cdot \cos x \cdot Q_{k-1}(\cos 2x), \end{aligned} \quad (16)$$

где $Q_{k-1}(t)$ – многочлен степени $k - 1$ со старшим коэффициентом 2^k .

Доказательство леммы 2 тоже может быть проведено по индукции. Справедливость леммы 2 в случае $k = 1$ и $k = 2$ видна из тождеств $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\sin 4x = 4 \sin x \cos x \cos 2x$, которые влекут, что $Q_0(t) = 2$, $Q_1(t) = 4t$. Доказательство индукционного перехода мы также предоставляем читателю.

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству основного тождества (1).

члена $P_k(t)$. Поскольку числа $\frac{2\pi l}{n}$

лежат на интервале $(0; \pi)$, где косинус монотонно убывает, все числа t_l различны.

Итак, $t_1, \dots, t_k$ – различные корни многочлена $P_k(t)$ степени k . Поэтому многочлен $P_k(t)$ можно разложить на линейные множители следующим образом:

$$P_k(t) = 2^k \cdot \prod_{l=1}^k (t - t_l),$$

что приводит соотношение (15) к виду

$$\begin{aligned}
 \sin(2k+1)x &= 2^k \sin x \times \\
 &\times \prod_{l=1}^k \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi l}{2k+1} \right) = \\
 &= 2^k \sin x \cdot \prod_{l=1}^k \left(2 \sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} + x \right) \times \right. \\
 &\times \left. \sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} - x \right) \right) = \\
 &= 2^{2k} \sin x \cdot \prod_{l=1}^k \left(\sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} + x \right) \times \right. \\
 &\times \left. \sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} - x \right) \right). \quad (17)
 \end{aligned}$$

Это соотношение аналогично тождествам (8) для $\sin 3x$ и (11) для $\sin 5x$.

Чтобы из (17) получить основное тождество (1), заменим член $\sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} - x \right)$ на $\sin \left(\frac{\pi(2k+1-l)}{2k+1} + x \right)$.

Теперь он имеет вид $\sin \left(\frac{\pi L}{2k+1} + x \right)$,

где $L = 2k+1-l$. Если параметр l пробегает числа от 1 до k , то выражение $L = (2k+1-l)$ пробегает значения от $2k$ до $k+1$. Кроме того, особый член $\sin x$ можно представить в виде

$\sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} + x \right)$, где $l=0$. Таким обра-

зом, произведение в правой части (17) содержит $2k+1$ сомножителей вида

$\sin \left(\frac{\pi l}{2k+1} + x \right)$, где $l=0, 1, \dots, 2k$, что

означает справедливость (1) в случае $n = 2k+1$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда $n = 2k$ — чётное натуральное число. В этом случае наши рассуждения будут базироваться на лемме 2.

Разложим многочлен $Q_{k-1}(t)$ на линейные множители. Как и в случае нечётного n , подставляя вместо x кон-

кретные числовые значения $x_l = \frac{\pi l}{2k}$,

$l=1, \dots, k-1$, мы получим, что многочлен $Q_{k-1}(t)$ имеет $k-1$ различных

корней $t_l = \cos \frac{2\pi l}{2k}$, что приводит (16)

к цепочке тождеств

$$\sin 2kx = 2^k \sin x \times$$

$$\times \cos x \cdot \prod_{l=1}^{k-1} \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi l}{2k} \right) =$$

$$= 2^k \sin x \cdot \cos x \cdot \prod_{l=1}^{k-1} \left(2 \sin \left(\frac{\pi l}{2k} + x \right) \times \right.$$

$$\times \left. \sin \left(\frac{\pi l}{2k} - x \right) \right) = \quad (18)$$

$$= 2^{2k-1} \sin x \cdot \cos x \cdot \prod_{l=1}^{k-1} \left(\sin \left(\frac{\pi l}{2k} + x \right) \times \right.$$

$$\times \left. \sin \left(\frac{\pi l}{2k} - x \right) \right).$$

Чтобы из (18) получить основное тождество (1), как и в случае нечет-

ного n заменим член $\sin \left(\frac{\pi l}{2k} - x \right)$ на

$\sin \left(\frac{\pi(2k-l)}{2k} + x \right)$. Теперь он имеет

вид $\sin \left(\frac{\pi L}{2k} + x \right)$, где $L = 2k-l$. Если

параметр l пробегает числа от 1 до $k-1$, то выражение $L = (2k-l)$ пробе-

гает значения от $2k-1$ до $k+1$. Кроме того, особые члены $\sin x$ и $\cos x$ можно

представить в виде $\sin \left(\frac{\pi l}{2k} + x \right)$ при

$l=0$ и $l=k$ соответственно. Таким обра-

зом, произведение в правой части (18) содержит $2k$ сомножителей вида

$\sin \left(\frac{\pi l}{2k} + x \right)$, где $l=0, 1, \dots, 2k-1$, что

означает справедливость (1) в случае $n = 2k$.