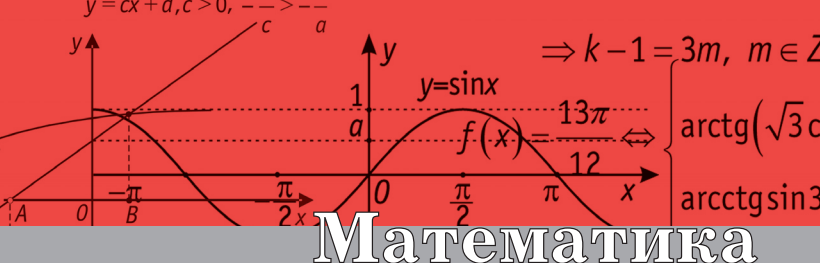


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Математика



Гашков Сергей Борисович

Доктор физико-математических наук профессор кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Много лет преподавал математику также в ФМШ N18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ).

Неравенства для тетраэдра

В статье предлагается подборка задач об экстремальных свойствах правильного тетраэдра. Задачи сформулированы в виде неравенств. Многие из этих задач известны давно, другие пока ещё остаются малоизвестными. Часть задач предлагалась на различных олимпиадах. К наиболее трудным задачам даны указания и решения.

В данной статье тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида (не обязательно правильная). Для краткости будем пользоваться следующими обозначениями. Объём тетраэдра обозначим буквой V , площади граней – буквами $S_i, i = 1, 2, 3, 4$, площадь поверхности – буквой $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Словами «отрезок», «сторона», «высота» и т. п. часто будем называть также длины этих отрезков, сторон, высот и т. д. Высоту, опущенную из вершины на грань S_i , обозначим через $h_i, i = 1, 2, 3, 4$, а минимальную из высот обозначим буквой h . Рёбра тетраэдра обозначим буквами a, b, c, a_1, b_1, c_1 (одинаковые буквы соответствуют скрещивающимся рёбрам). Назовём **периметром** тетраэдра число

$P = a + b + c + a_1 + b_1 + c_1$, равное сумме длин его рёбер (этот термин не является общепринятым и используется для краткости), а **диаметром** тетраэдра

$D = \max\{a, b, c, a_1, b_1, c_1\}$ – максимальную длину его рёбер.

Сумму квадратов длин рёбер тетраэдра обозначим

$$\delta = a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

Радиус вписанного шара обозначим через r , а радиус наименьшего шара, содержащего тетраэдр, – через R (это не обязательно шар, описанный вокруг тетраэдра).



В элементарной геометрии часто трудно установить, кто первый опубликовал ту или иную задачу или её решение, поэтому наши указания на авторство задач или решений будут фрагментарными. Если задача предлагалась на олимпиаде, указывается, когда и где.

Слово «задача» в формулировках опускаем, а задачи нумеруем. Длин-

ную цепочку неравенств назовём теоремой.

Задачи

1. Докажите, что $3V = Sr$.

2. Докажите, что $h_i S_i = 3V$.

3. Докажите, что

$$1/r = 1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 + 1/h_4.$$

Указание. Примените задачи 1, 2.

4. Докажите, что

$$2r \geq (h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2})^{-1/2} \geq h/2.$$

Указание. Примените задачу 3 и неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным:

$$(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Бивысотой тетраэдра назовём отрезок, соединяющий скрещивающиеся рёбра тетраэдра и перпендикулярный им. Длины бивысот обозначим буквами l_i , $i = 1, 2, 3$. Минимальную из бивысот обозначим через l .



5. Докажите, что бивысоты равны расстояниям между скрещивающимися рёбрами тетраэдра.

Бимедианой тетраэдра назовём отрезок, соединяющий середины скрещивающихся рёбер тетраэдра. Длины бимедиан обозначим буквами

m_i , $i = 1, 2, 3$. Минимальную из бимедиан обозначим через m .

6. Докажите, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой *центром тяжести* тетраэдра, и делятся этой точкой пополам.

В следующих пяти задачах сформулированы некоторые свойства *равногранного* тетраэдра (т. е. тетраэдра, все грани которого равны). Фактически они являются «признаками равногранности тетраэдра» (конечно, это не общепринятый термин). На самом деле различных таких признаков известно около сотни, и здесь приводятся только те, которые понадобятся далее.

7. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда, когда его противоположные рёбра равны.

8. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда, когда его бимедианы являются бивысотами.

Указание. Примените задачу 7.

9. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда, когда его грани равновелики (т. е. имеют равные площади).

Указание. Примените задачи 8, 2.

10. Тетраэдр имеет равные грани тогда и только тогда, когда его высоты равны.

Указание. Примените задачу 9.

11. (Бляшке) Докажите, что $r \geq h/4$ и равенство возможно только для равногранного тетраэдра.

Указание. Примените задачи 3, 10.

12. Докажите, что

$$h \leq \frac{1}{\sqrt{(h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2})/4}} \leq 4r \leq \sqrt[4]{h_1 h_2 h_3 h_4} \leq$$

$$\leq \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4}{4} \leq \sqrt{(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2)/4}.$$

Равенства возможны лишь для равногранного тетраэдра.

Указание. Примените задачи 3, 10 и неравенства о средних арифметическом, геометрическом и квадратичном.

Медианой тетраэдра назовём отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с **центроидом** (т. е. точкой пересечения медиан) противоположной грани. Длины медиан обозначим буквами M_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

13. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, совпадающей с **центроидом** (**центром тяжести**) тетраэдра, и делятся этой точкой в отношении 3 к 1. Докажите, что радиус-вектор центроида тетраэдра равен среднему арифметическому радиус-векторов вершин тетраэдра.

Плоскость, делящая двугранный угол при данном ребре тетраэдра пополам, называется **биссектральной плоскостью** этого угла.

14. Докажите, что биссектральные плоскости тетраэдра пересекаются в одной точке, совпадающей с центром вписанного шара.

Прямую, проходящую через центр описанной вокруг данной грани окружности перпендикулярно грани, назовём **срединным перпендикуляром** к этой грани.

15. Докажите, что срединные перпендикуляры тетраэдра пересекаются в центре описанного вокруг него шара.

16. (Лейбниц) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки до вершин тетраэдра принимает минимальное значение в центроиде тетраэдра и это значение равно

$$9(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)/16 = \delta/4.$$

Решение. Обозначим через r_i , где $i = 1, \dots, 4$, и r – векторы, направ-

ленные из центроида тетраэдра в его вершины и данную точку O соответственно. Тогда согласно свойству центроида $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$. **Скалярное произведение** произвольных векторов v_1, v_2 обозначаем (v_1, v_2) . Как известно, квадрат длины любого вектора v равен его **скалярному квадрату** $v^2 = (v, v)$. Поэтому $r_i^2 = (3M_i/4)^2$, $i = 1, \dots, 4$. Сумма квадратов расстояний от точки O до вершин тетраэдра равна

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (r_i - r)^2 &= 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \sum_{i=1}^4 (r_i, r) = \\ &= 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 r_i, r \right) = \\ &= 4r^2 + \sum_{i=1}^4 r_i^2 \geq \sum_{i=1}^4 r_i^2 = \sum_{i=1}^4 (3M_i/4)^2, \end{aligned}$$

и минимальное свойство центроида тем самым доказано. Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \delta &= a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + a_1^2 + c_1^2 = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 = 3 \sum_{i=1}^4 r_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i, r_j), \\ 0 &= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 = \sum_{i=1}^4 r_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i, r_j), \end{aligned}$$

и, складывая эти равенства, находим, что

$$\delta = 4 \sum_{i=1}^4 r_i^2 = \sum_{i=1}^4 9M_i^2/4,$$

$$\text{т. е. } 9(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)/16 = \delta/4.$$

17. Докажите, что $\delta \leq 16R^2$.

Указание. Примените задачу 16 к центру содержащего тетраэдр шара радиуса R и докажите, что

$$\delta/4 = 9(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)/16 \leq 4R^2.$$

18. Докажите, что

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \leq 16R/3.$$

Указание. Примените задачу 17 и неравенство между средним ариф-

метическим и средним квадратичным.

19. Докажите, что равенства в трёх предыдущих задачах возможны только для правильного тетраэдра (тем самым каждое из этих равенств можно рассматривать как признак правильности тетраэдра).



Решение. Центроид совпадает с центром описанной сферы только лишь у правильного тетраэдра. Действительно, пусть r_i , $i = 1, \dots, 4$, – равные по длине векторы, направленные из центроида тетраэдра в его вершины. Очевидно, что среди них нет попарно противоположных. Так как их длины равны, а сумма равна нулю, то попарные углы между ними равны, иначе сумма двух из них будет длиннее суммы двух остальных и сумма всех четырёх будет отлична от нуля. Возводя скалярно в квадрат равенство $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, получаем, что косинусы попарных углов между векторами равны $-1/3$, т. е. такие же, как в случае правильного тетраэдра.

Следующая задача продолжает цепочку неравенств, начатую в предыдущих задачах.

20. Докажите, что

$$4h \leq 16r \leq h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \leq$$

$$\leq M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \leq 16R/3;$$

$$16h^2 \leq 64r^2 \leq h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 \leq 4\delta/9 =$$

$$= M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2 \leq 64R^2/9.$$

Указание. Примените задачи 17, 18, 12.

21. Докажите, что неравенства в задаче 20 превращаются в равенства только для правильного тетраэдра, за исключением двух первых неравенств в каждой цепочке.

Решение. Если в тетраэдре высоты совпадают с медианами, то он правильный. Действительно, пусть r_i , $i = 1, \dots, 4$, – векторы, направленные из центроида тетраэдра в его вершины. Совпадение высот с медианами означает, что $r_1(r_2 - r_3) = r_1(r_3 - r_4) = 0$, откуда $r_1r_2 = r_1r_3 = r_1r_4$, а так как $r_2 + r_3 + r_4 = -r_1$, то $-r_1^2 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 = 3r_1r_2$, откуда $r_1r_2 = -r_1^2/3$, аналогично $r_1r_2 = -r_2^2/3$, значит, $|r_1| = |r_2|$, и окончательно получаем, что все r_i равны по длине.

Проведём через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Построенные шесть плоскостей ограничивают параллелепипед, описанный вокруг тетраэдра.

22. (Сервуа) Докажите, что рёбра этого параллелепипеда равны бимедианам тетраэдра, высоты равны бивысотам тетраэдра, а объём в три раз больше объёма тетраэдра.

23. Докажите, что у равногранного тетраэдра описанный параллелепипед – прямоугольный.

Указание. Примените задачи 22, 8.

24. (Штейнер) Передвинем ребро тетраэдра параллельно самому себе так, чтобы его перпендикулярная проекция на параллельную ему грань параллелепипеда делилась пополам противоположным ребром тетраэдра. Докажите, что при этом

объём тетраэдра не изменится, а площадь поверхности уменьшится.

Указание. При описанной операции площади двух граней не меняются, а сумма площадей остальных граней уменьшается в силу неравенства

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} > 2\sqrt{a^2 + ((x+y)/2)^2}.$$

25. Не изменяя объёма тетраэдра и уменьшая его поверхность, можно получить тетраэдр, у которого бивысота является бимедианой, т. е. в описанном вокруг него параллелепипеде одно из рёбер перпендикулярно его грани.

Указание. Применить два раза операцию предыдущей задачи.

26. Не изменяя объёма тетраэдра и уменьшая его поверхность, можно получить тетраэдр, у которого все бивысоты являются бимедианами, т. е. описанный вокруг него параллелепипед будет прямоугольным.

Указание. Применить два раза предыдущую задачу.

27. Докажите, что для тетраэдра, у которого описанный параллелепипед прямоугольный, справедливы соотношения

$$V = l_1 l_2 l_3 / 3, \quad S \geq 2\sqrt{l_1^2 l_2^2 + l_2^2 l_3^2 + l_1^2 l_3^2}.$$

Указание. Проверить, что тетраэдр равногранный. Найти его рёбра по теореме Пифагора, а площадь грани – по формуле Герона.

Следующая задача справедлива для любого выпуклого многогранника, но мы формулируем её только для тетраэдра.

28. Обозначим через S_i векторы, поставленные на гранях тетраэдра перпендикулярно им, направленные вне тетраэдра и имеющие длины, равные площадям соответствующих граней. Докажите, что сумма этих векторов равна нулю.

Указание. Проверить, что проекция суммы всех векторов на любой из них равна нулю. Для этого при-

менить формулы для площади проекции плоской фигуры.

В следующей задаче используются обозначения из задачи 28.

29. Докажите, что длина вектора $S_i + S_j$ равна $3V/h_{i,j}$, где V – объём тетраэдра, а $h_{i,j}$ – бивысота, опущенная из ребра тетраэдра, являющегося пересечением граней S_i, S_j , на скрещивающееся с ним ребро.

Вектор $S_i + S_j$ параллелен бивысоте $h_{i,j}$. Провести плоскость через пересечение граней S_i, S_j и бивысоту $h_{i,j}$. Она разбивает тетраэдр на два. Вычислить их объёмы, умножая площади граней S_i, S_j на треть соответствующей высоты. Длину высоты вычислить, умножив $h_{i,j}$ на косинус угла между $h_{i,j}$ и вектором S_i (соответственно S_j). Объёмы тетраэдров сложить и воспользоваться тем, что проекция вектора $S_i + S_j$ на высоту $h_{i,j}$ равна его длине.

В следующей задаче формулируется ещё одно из многочисленных экстремальных свойств правильного тетраэдра.

30. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство $P \leq \sqrt{6\delta}$, которое обращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Указание. Примените неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.

31. (Польша, 1978) Докажите, что для любого тетраэдра

$$h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2} + h_4^{-2} = l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2}.$$

Ещё одно экстремальное свойство правильного тетраэдра.

32. (Эгглстон) Докажите, что

$$l \leq ((l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})/3)^{-1/2} \leq 2\sqrt{3}r.$$

Равенство возможно лишь для правильного тетраэдра.

Решение. Возводя $S_i + S_j$ скалярно в квадрат и применяя задачу 29, имеем:

$$S_i^2 + S_j^2 + 2(S_i + S_j) = |S_j + S_i|^2 = \frac{(3V)^2}{h_{i,j}^2}.$$

Суммируя эти неравенства по всем парам $i < j$, получаем, что

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{i=1}^4 S_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (S_i, S_j) = \\ & = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{(3V)^2}{h_{i,j}^2} = 2 \sum_{i=1}^4 3 \frac{(3V)^2}{l_i^2}. \end{aligned}$$

Так как сумма векторов S_i равна нулю, то, возводя её скалярно в квадрат, имеем:

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (S_i, S_j) = 0,$$

поэтому из предыдущего равенства следует, что

$$\sum_{i=1}^4 S_i^2 = \sum_{i=1}^4 3 \frac{(3V)^2}{l_i^2}.$$

Применяя задачу 2, имеем:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{3V^2}{h_i^2} = \sum_{i=1}^4 3 \frac{(3V)^2}{l_i^2},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^4 h_i^{-2} = \sum_{i=1}^4 l_i^{-2}.$$

Из задачи 4 следует, что $2r \geq (l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})^{-1/2}$, откуда

$$l \leq ((l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2})/3)^{-1/2} \leq 2\sqrt{3}r.$$

Равенство возможно лишь тогда, когда все S_i равны, т. е. тетраэдр равногранный, и когда все бивысоты равны, т. е. он вписан в куб, а значит, является правильным.

33. Среди всех тетраэдров с данными основанием и опущенной на него высотой минимальную поверхность имеет тот, в котором эта высота опускается в центр круга, вписанного в основание. Докажите, что в этом тетраэдре высоты боковых граней, опущенные на стороны, лежащие на основании, равны.

Решение. Пусть стороны основания равны a, b, c , высота равна h и

опускается в точку, удалённую от сторон основания на расстояния d_a, d_b, d_c . Из теоремы о трёх перпендикулярах, теоремы Пифагора и формулы для площади треугольника следует, что удвоенная боковая поверхность тетраэдра равна

$$S = a\sqrt{h^2 + d_a^2} + b\sqrt{h^2 + d_b^2} + c\sqrt{h^2 + d_c^2},$$

а удвоенная площадь основания равна $s = ad_a + bd_b + cd_c$ (последняя формула справедлива всегда, но если высота не попадает на основание, то некоторые из чисел d_a, d_b, d_c отрицательны).

Полагая $a + b + c = p$, $\alpha = a/p$, $\beta = b/p$, $\gamma = c/p$, имеем $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, и радиус вписанного в основание круга равен $r = s/p = \alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c$. Тогда задача сводится к доказательству равенства

$$\begin{aligned} \min_{\alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c = r} \frac{s}{p} &= \min_{\alpha d_a + \beta d_b + \gamma d_c = r} \left(\alpha \sqrt{h^2 + d_a^2} + \right. \\ & \left. + \beta \sqrt{h^2 + d_b^2} + \gamma \sqrt{h^2 + d_c^2} \right) = \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Для его доказательства рассмотрим двумерные векторы $v_a = (h, d_a)$, $v_b = (h, d_b)$, $v_c = (h, d_c)$ (здесь запись (x_1, x_2) означает вектор с координатами x_i) и заметим, что $\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c = (h, r)$, поэтому из неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \alpha \sqrt{h^2 + d_a^2} + \beta \sqrt{h^2 + d_b^2} + \gamma \sqrt{h^2 + d_c^2} &= \\ &= \alpha |v_a| + \beta |v_b| + \gamma |v_c| \geq \\ &\geq |\alpha v_a + \beta v_b + \gamma v_c| = \sqrt{h^2 + r^2} \end{aligned}$$

(знаки модуля используются для обозначения длин векторов).

В следующей задаче формулируется один из простейших признаков правильности тетраэдра.

34. Тетраэдр является правильным тогда и только тогда, когда каждая высота в нём опускается в центр вписанного в противоположную грань круга.

В следующей задаче формулируется изопериметрическое свойство правильного тетраэдра. Его, как и любое другое экстремальное свойство правильного тетраэдра, тоже можно рассматривать как признак правильности тетраэдра.

35. Докажите, что неравенство $S \geq 3^{7/6} 2V^{2/3}$ обращается в равенство только для правильного тетраэдра. Выведите отсюда, что среди всех тетраэдров данного объёма минимальную поверхность имеет только правильный.

Указание. Применить задачу 27 и неравенство

$$3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3.$$

Можно также применить задачи 33 и 34.

Ещё одно экстремальное свойство правильного тетраэдра.

36. Докажите, что неравенство $r \leq 3^{-1/6} 2^{-1} V^{1/3}$ обращается в равенство только для правильного тетраэдра. Докажите, что среди всех тетраэдров, описанных вокруг данного шара, минимальную поверхность и минимальный объём имеет только правильный.

Указание. Применить задачу 35 и задачу 1.

И ещё экстремальное свойство правильного тетраэдра.

37. Докажите для произвольного тетраэдра верны неравенства

$$V \geq \frac{\sqrt{3}}{8} h^3, \quad S \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} h^2,$$

которые обращаются в равенства только для правильного тетраэдра.

Решение. Применим задачу 33 к одной грани тетраэдра, которую назовём основанием. Тогда можно считать, что все двугранные углы при этой грани равны, и обозначить их величину через φ . Пусть H – высота, опущенная на основание, и H_a , H_b , H_c – высоты, опущенные из вершин основания на противоположные

грани, а h_a , h_b , h_c – высоты самого этого основания. Применяя теорему о трёх перпендикулярах, имеем:

$$h_a \sin \varphi = H_a, \quad h_b \sin \varphi = H_b,$$

$$h_c \sin \varphi = H_c, \quad \sin \varphi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}.$$

Так как $\min\{h_a, h_b, h_c\} \geq h/\sin \varphi$, то площадь и полупериметр основания удовлетворяют неравенствам

$$s \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{\sqrt{3}H^2}, \quad p \geq \frac{h\sqrt{3(H^2 + r^2)}}{H},$$

потому что $s \geq b^2/\sqrt{3}$, $p \geq \sqrt{3}b$, где $b = \min\{h_a, h_b, h_c\}$, откуда для объёма и площади поверхности тетраэдра имеем неравенства:

$$V = sH/3 \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{3\sqrt{3}H},$$

$$S = s + p\sqrt{r^2 + H^2} \geq \frac{h^2(H^2 + r^2)}{\sqrt{3}H^2} + \frac{\sqrt{3}h(H^2 + r^2)}{H}.$$

Из того факта, что радиус вписанного в треугольник круга не меньше трети его минимальной высоты, следует, что

$$r \geq \frac{\min\{h_a, h_b, h_c\}}{3} \geq \frac{h}{3 \sin \varphi} = \frac{h\sqrt{r^2 + H^2}}{3H},$$

а значит, $r^2 \geq (hH)^2/(9H^2 - h^2)$, откуда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{3}V}{h^2} &\geq \frac{H^2 + r^2}{H} \geq \frac{9H^3}{9H^2 - h^2}, \\ \frac{\sqrt{3}S}{h} - h &\geq \frac{hr^2}{H^2} + \frac{3(H^2 + r^2)}{H} \geq \\ &\geq 3H + \frac{h^2(h + 3H)}{9H^2 - h^2} = \frac{27H^3 + h^3}{9H^2 - h^2}. \end{aligned}$$

Так как $H \geq h$ и при фиксированном h правые части этих неравенств возрастают с ростом H (это можно проверить дифференцированием), то, полагая $H = h$, имеем:

$$\frac{3\sqrt{3}V}{h^2} \geq \frac{9h}{8}, \quad \frac{\sqrt{3}S}{h} - h \geq \frac{7h}{2},$$

откуда и следуют неравенства задачи. Равенства возможны лишь при $h = H$, $r^2 = h^2/8$, $\sin \varphi = 2\sqrt{2}/3$, т. е. только для правильного тетраэдра.

Другое решение можно получить, используя задачи 36, 11.

38. Найдите тетраэдр а) наименьшего объёма, б) наименьшей поверхности, в) наименьшего периметра, у которого наименьшая из высот равна h .

Опять экстремальное свойство правильного тетраэдра.

39. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство

$$P^2 \geq 12\sqrt{3}S,$$

которое обращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Решение. Согласно неравенству для площади треугольника

$$4\sqrt{3}s \leq 2(ab + ac + bc) - a^2 - b^2 - c^2.$$

Применяя эти неравенства к каждой грани тетраэдра и складывая их почленно, имеем:

$$\begin{aligned} & ab + ac + bc + a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 + \\ & + a(b_1 + c_1) + b(a_1 + c_1) + c(b_1 + a_1) - \\ & - a^2 - b^2 - c^2 - a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 \geq 2\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

Остаётся проверить тождество

$$\begin{aligned} P^2 &= 6(ab + ac + bc + a_1b_1 + \\ & + a_1c_1 + b_1c_1 + a(b_1 + c_1) + \\ & + b(a_1 + c_1) + c(b_1 + a_1)) - \\ & - 6(a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \\ & + 3((a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + \\ & + (c - c_1)^2) + 2((a + a_1 - b - b_1)^2 + \\ & + (a + a_1 - c - c_1)^2 + (c + c_1 - b - b_1)^2). \end{aligned}$$

Равенство возможно, лишь тогда, когда все рёбра тетраэдра равны.

И ещё одно экстремальное свойство правильного тетраэдра.

40. Докажите для произвольного тетраэдра неравенство $S \leq \sqrt{3}\delta/6$,

которое обращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Указание. Примените к каждой грани неравенство

$$S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}},$$

означающее, что среди всех треугольников с данной суммой квадратов сторон наибольшую площадь имеет правильный, и сложите их почленно. Равенство возможно, лишь когда все рёбра тетраэдра равны.

Следующая задача поясняет, что описанный вокруг произвольного тетраэдра шар и наименьший шар, содержащий внутри себя этот тетраэдр, не обязаны совпадать.

41. Докажите, что центр наименьшего шара, содержащего данный тетраэдр, лежит внутри этого тетраэдра.

42. (ВМО, 1982) Докажите, что для любой внутренней точки тетраэдра одно из его рёбер видно под углом, косинус которого не больше $-1/3$.

Решение. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 — единичные векторы, направленные из данной точки в вершины тетраэдра. Прямая, проходящая через e_4 , пересекает трёхгранный угол, образованный векторами e_1, e_2, e_3 , поэтому для некоторых $x_i \geq 0$ имеем $x_1e_1 + \dots + x_4e_4 = 0$. Возводя это равенство скалярно в квадрат и предполагая, что косинусы всех попарных углов между этими векторами больше $-1/3$, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j (e_i, e_j) > \\ &> \sum_{i=1}^4 x_i^2 - \frac{2}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

43. Докажите, что для любой внутренней точки тетраэдра сумма

косинусов углов, под которыми из неё видны его рёбра, не меньше -2 , косинус одного из этих углов не больше $-1/3$, а другого не меньше $-1/3$.

Решение. Пусть e_1, e_2, e_3, e_4 – единичные векторы, направленные из данной точки в вершины тетраэдра. Возводя сумму этих векторов скалярно в квадрат, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^4 e_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (e_i, e_j) = \\ &= 4 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \cos \alpha_{i,j}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сумма косинусов углов $\alpha_{i,j}$ не меньше -2 , а значит, один из них не меньше $-1/3$. Из задачи 42 вытекает, что один из этих углов имеет косинус, не больший $-1/3$.

44. (Москва, 1982) Докажите, что если из внутренней точки правильного тетраэдра все его стороны видны под равными углами, то эта точка – его центр. Докажите такое же утверждение для куба.

45. Докажите неравенство

$$\sqrt{\delta} \leq 4R \leq \sqrt{6}D,$$

которое для правильного тетраэдра обращается в равенство.

Решение. Применим задачи 43, 20, 41. Пусть ребро тетраэдра видно из центра охватывающей сферы радиуса R под углом α , $\cos \alpha \leq -1/3$. По

теореме косинусов квадрат длины этого ребра не меньше $2R^2 + 2R^2/3 = 8R^2/3$. Но длина этого ребра не больше D .

Суммируя результаты предыдущих задач, получаем следующую теорему.

Теорема Для произвольного тетраэдра справедливы неравенства

$$\begin{aligned} r &\leq \frac{\sqrt[3]{V}}{2\sqrt[6]{3}} \leq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{8427}} \leq \frac{P}{12\sqrt{6}} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{\delta}}{12} \leq \frac{R}{3} \leq \frac{D}{2\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

каждое из которых превращается в равенство только для правильного тетраэдра.

Доказательство следует из утверждений задач 45, 40, 39, 36, 35.



Литература

1. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.
2. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.
3. Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976.
4. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978.
5. Зарубежные математические олимпиады. – М.: Наука, 1987.
6. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1986.