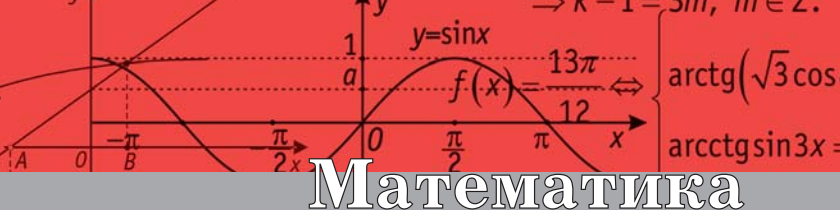


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



Золотарёва Наталья Дмитриевна

Кандидат физико-математических наук.

Научный сотрудник лаборатории разностных методов факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Метод геометрических мест точек в задачах на построение

В статье [1] рассказывалось об алгебраическом методе решения задач на построение, который заключается в построении искомых элементов по формулам, выражающим их зависимость от заданных элементов. В этой статье будет рассказано ещё об одном методе решения задач на построение, а именно о *методе геометрических мест точек*.

Напомним, что решение задачи на построение состоит в описании последовательности операций, которые надо проделать циркулем и линейкой. При этом с помощью циркуля можно провести окружность с центром в любой точке плоскости радиусом, равным длине заданного отрезка, и найти точки пересечения проведённой окружности с любым заданным объектом плоскости (прямой, окружностью и т. п.). С помощью линейки можно провести прямую через две заданные точки и найти пересечение проведённой прямой с любым заданным объектом плоскости.

Также приведём список элементарных построений, которые будут использоваться при решении задач.

1. Построение треугольника по трём сторонам.

2. Построение угла, равного данному.

3. Построение биссектрисы угла.

4. Деление отрезка пополам (построение серединного перпендикуляра к данному отрезку).

5. Построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

6. Построение прямой, параллельной данной прямой, через данную точку. Напомним также основные формулы алгебраического метода. По заданным отрезкам длин a , b , c мы можем построить отрезки длин $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{ab}{c}$.

Таким образом, для того, чтобы решить задачу на построение, достаточно свести её к элементарным построениям и тем, которые сводятся к элементарным.

Геометрическое место точек плоскости

Геометрическим местом точек плоскости с данным свойством назы-

вается множество всех точек плоскости, обладающих этим свойством.

При решении задач на геометрические места точек (сокращённо ГМТ) должно быть предъявлено множество и доказано, что каждая точка этого множества обладает заданным свойством, а любая другая точка не обладает.

Простейшими примерами ГМТ являются следующие:

- ГМТ, удалённых на расстояние R от данной точки O , – это окружность радиуса R с центром в точке O ;
- ГМТ, удалённых на расстояние h от данной прямой, – это две прямые, параллельные данной, расположенные на расстоянии h по разные стороны от неё;
- ГМТ, равноудалённых от точек A и B , – это серединный перпендикуляр к отрезку AB ;
- ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α , – это объединение двух дуг окружностей радиуса $R = \frac{AB}{2 \sin \alpha}$ с центрами на серединном перпендикуляре FM к отрезку AB , лежащими на расстоянии $R \cos \alpha$ от прямой AB (например, центр O_1 определяется как точка пересечения прямой FM со стороной угла BAK , равного $90^\circ - \alpha$ (рис. 1); тогда $\angle AOB = 2\alpha$ и $\angle ACB = \alpha$).

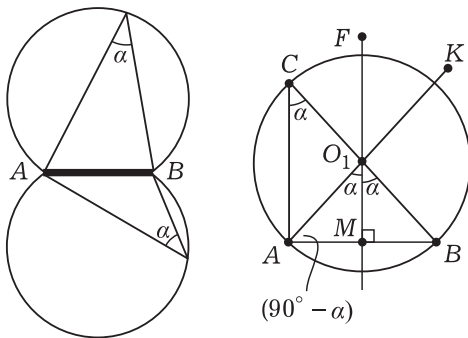


Рис. 1

При построении ГМТ бывает удобно разбить данное свойство на

более простые и найти соответствующие более простые ГМТ. Пересечением этих множеств будет множество точек, для которых одновременно выполняются все свойства, то есть искомое ГМТ.

Задача 1. На середине лестницы, приставленной к стене, сидит муравей. Определить, по какой траектории муравей будет двигаться при падении лестницы в следующих случаях:

- а) нижний конец лестницы остаётся неподвижным;
- б) нижний конец лестницы скользит по полу, а верхний – по стене.

Решение. а) В первом случае решение выглядит достаточно прозрачным.

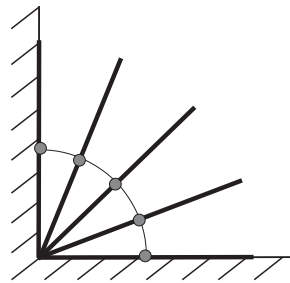


Рис. 2

Так как нижний конец лестницы неподвижен, то в каждый момент времени муравей находится от него на расстоянии, равном половине длины лестницы (рис. 2). А так как геометрическим местом точек, равноудалённых от данной, является окружность, то движение муравья происходит по дуге окружности.

б) В случае скольжения лестницы переформулируем задачу следующим образом: «По сторонам прямого угла скользит отрезок заданной длины a . Какую кривую при этом описывает середина этого отрезка?».

Рассмотрим отрезок AB длины a , скользящий по сторонам прямого угла с вершиной O . Пусть M – середина отрезка AB (рис. 3).

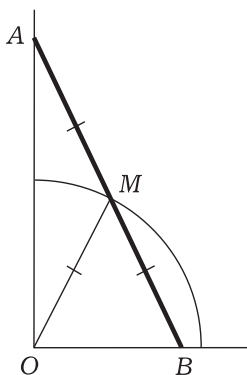


Рис. 3

Так как медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то $OM = AB/2 = a/2$. Получается, что точка M удалена от точки O на расстояние $a/2$. Следовательно, точка M принадлежит четверти окружности с центром в точке O радиуса $a/2$.

Теперь покажем обратное, что произвольная точка этой дуги явля-

$$\begin{aligned}\angle MOB_1 &= \angle A_1OB_1 - \angle A_1OM = 90^\circ - \alpha, \\ \angle MB_1O &= 180^\circ - (\angle A_1OB_1 + \angle OA_1B_1) = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Из равенства углов при основании треугольника MOB_1 следует его равнобедренность. Получаем, что $MB_1 = OM = a/2$ и $A_1B_1 = A_1M + MB_1 = a$.

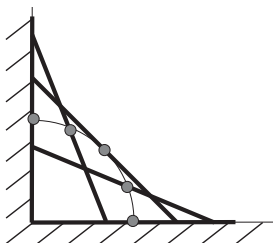


Рис. 5

Таким образом, мы показали, что произвольная точка построенной дуги является серединой гипотенузы длины a некоторого прямоугольного треугольника. Значит, построенная дуга и есть искомое ГМТ (рис. 5).

ется серединой гипотенузы длины a некоторого прямоугольного треугольника. Для этого из произвольной точки M данной дуги сделаем засечку радиусом $a/2$ на стороне прямого угла. Получим точку A_1 . Обозначим через B_1 точку пересечения прямой A_1M со второй стороной прямого угла (рис. 4).

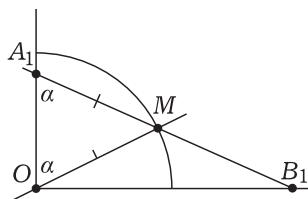


Рис. 4

Покажем, что $A_1B_1 = a$. Пусть $\angle OA_1B_1 = \alpha$, тогда из равнобедренности треугольника A_1OM получим, что $\angle A_1OM = \angle OA_1M = \alpha$.

Теперь рассмотрим треугольник MOB_1 . Заметим, что

Замечание. Независимо от того, как именно падает лестница, муравей в обоих случаях движется по одной и той же траектории – четверти окружности.

Задача 2. По данной дуге окружности «бегает» точка M . Хорда AB – фиксирована. Какие кривые при этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения медиан?

Решение. Пусть дуга AB вмещает углы, равные α . Обозначим через K точку пересечения медиан треугольника AMB и проведём через неё прямые, параллельные сторонам угла AMB . Получим точки A' и B' такие, что $\angle A'KB' = \angle AMB = \alpha$ (рис. 6).

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, то по теореме Фалеса

$$AA' = \frac{1}{3} AB \text{ и } BB' = \frac{1}{3} AB,$$

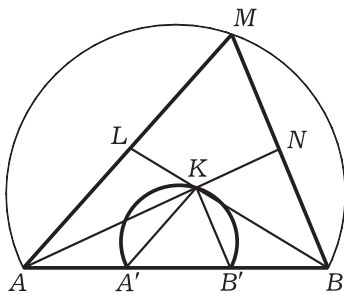


Рис. 6

следовательно, $A'B' = AB/3$. Таким образом, точка пересечения медиан лежит на дуге $A'B'$, вмещающей углы, равные α .

Верно и обратное. Если взять произвольную точку на дуге $A'B'$ и рассмотреть два соответствующих подобных треугольника, то эта точка будет точкой пересечения медиан большего из них.

Следовательно, дуга $A'KB'$ есть геометрическое место точек пересечения медиан треугольника AMB .

Задача 3. Доказать, что геометрическим местом точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек M и N есть величина постоянная, является прямая, перпендикулярная отрезку MN .

Решение. Пусть точка D такова, что

Радикальная ось и радикальный центр

Докажем с помощью метода ГМТ несколько любопытных геометрических фактов, связанных с окружностями.

Оказывается, что геометрическим местом точек, касательные из которых к двум данным окружностям равны, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей. Эта прямая называется **радикальной осью** двух окружностей.

Для доказательства этого факта рассмотрим окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов R_1 и R_2 . Пусть

$MD^2 - ND^2 = a^2$
(где a^2 есть заданная в условии постоянная величина) и E – её проекция на отрезок MN .

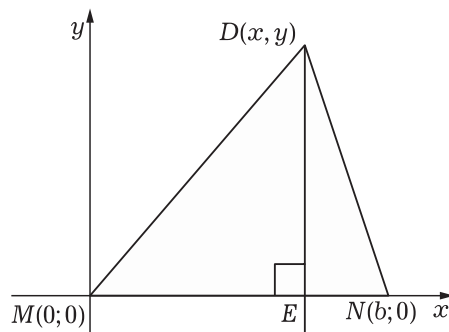


Рис. 7

Введём систему координат, выбрав точку M за начало координат и направив ось Ox по лучу MN (рис. 7). Пусть точка D имеет координаты $(x; y)$. Тогда $MD^2 = x^2 + y^2$ и $ND^2 = (b - x)^2 + y^2$, где $b = MN$. Получаем

$$MD^2 - ND^2 = 2bx - b^2.$$

Эта величина равна по условию a^2 , поэтому точка D имеет координаты $\left(\frac{a^2 + b^2}{2b}; y\right)$, и прямая DE перпендикулярна прямой MN .

DA_1 и DA_2 – равные касательные, проведённые к окружностям из точки D (рис. 8).

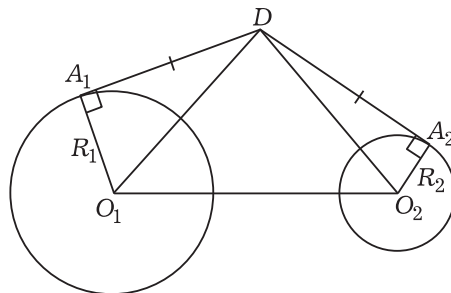


Рис. 8

Из прямоугольных треугольников ΔO_1A_1D и ΔO_2A_2D с помощью теоремы Пифагора получим

$$A_1D^2 = O_1D^2 - R_1^2, \quad A_2D^2 = O_2D^2 - R_2^2,$$

откуда

$$O_1D^2 - O_2D^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Следовательно, точка D такова, что разность квадратов расстояний от неё до O_1 и O_2 есть величина постоянная.

Согласно задаче 3, множество всех таких точек есть прямая, перпендикулярная отрезку O_1O_2 .

Замечание. Три радикальные оси любых трёх попарно взятых окружностей пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром* (рис. 9).

Для объяснения этого факта достаточно рассмотреть точку пересечения двух радикальных осей. Поскольку она принадлежит двум радикальным осям, касательные из неё ко всем трём окружностям равны. Следовательно, она принадлежит и третьей радикальной оси.

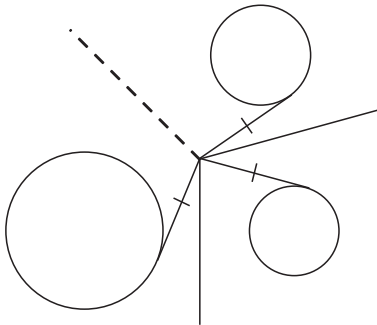


Рис. 9

Рассмотрим способы построения радикальной оси в зависимости от взаимного расположения окружностей.

Первый случай. Если окружности касаются друг друга, то радикальная ось проходит через точку касания, так как в этом случае касательные, прове-

дённые из точки D , равны отрезку общей касательной DA (рис. 10).

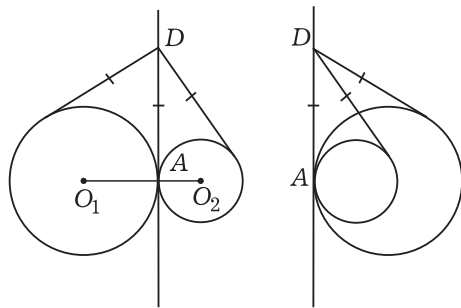


Рис. 10

Следствие. Три общие касательные трёх попарно касающихся окружностей пересекаются в одной точке (рис. 11).

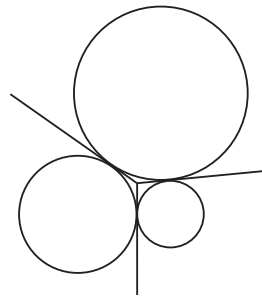


Рис. 11

Второй случай. У пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точку пересечения (рис. 12). В этом случае касательные, проведённые из точки D , равны в силу того, что квадрат касательной равен произведению длин секущих, то есть

$$DA_1^2 = DB \cdot DC = DA_2^2.$$

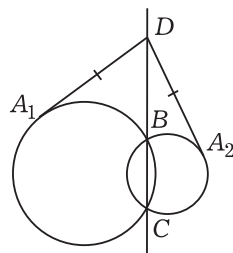


Рис. 12

Следствие. Три общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей пересекаются в одной точке (рис. 13).

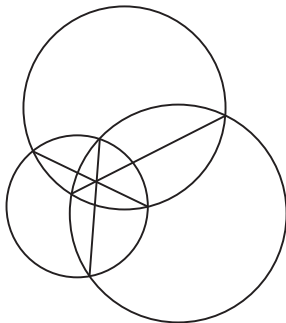


Рис. 13

Третий случай. Если окружности не пересекаются, то для построения радикальной оси будем использовать вспомогательную окружность, пересекающую две данные. Пусть вспомогательная окружность пересекается с первой из двух данных окружностей

в точках A и B , а со второй – в точках C и D . Пусть M – точка пересечения прямых, содержащих общие хорды AB и CD (рис. 14). Это есть радикальный центр трёх окружностей. Следовательно, точка M принадлежит радикальной оси двух данных окружностей. Найдя таким же образом ещё одну точку или опустив перпендикуляр на линию центров O_1O_2 , построим искомую радикальную ось.

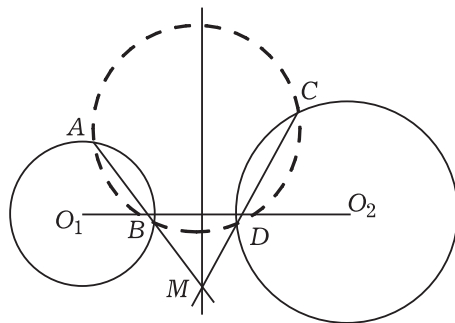


Рис. 14

Окружность Аполлония и гармонические точки

Ещё одно интересное ГМТ – *окружность Аполлония*. Это окружность, которая является геометрическим местом точек, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в заданном отношении $m : n \neq 1$.

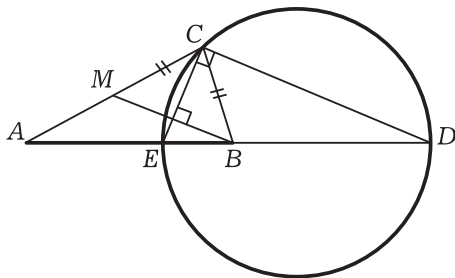


Рис. 15

В статье [1] было приведено алгебраическое доказательство того,

что указанное ГМТ является именно окружностью. Сейчас приведём геометрическое доказательство.

Пусть $m > n$. Сначала построим точку E из искомого ГМТ, лежащую на отрезке AB . То есть такую, что $AE : EB = m : n$ (рис. 15).

Рассмотрим произвольную точку $C \notin AB$ из искомого ГМТ (т. е. такую, что $AC : CB = m : n$) и проведём $CD \perp CE$. Покажем, что точка D также принадлежит искомому ГМТ.

Отрезок CE является биссектрисой $\triangle ABC$, так как делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон. Проведём $BM \parallel CD$. Треугольник BMC – равнобедренный, так как его биссектриса CE будет одновременно и высотой. Следовательно, $CB = CM$. Теперь, используя теорему Фалеса, получим, что

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CM} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, мы показали, что точка D принадлежит искомому ГМТ и её положение на прямой AB не зависит от выбранной нами из ГМТ точки C .

Поскольку $\angle ECD = 90^\circ$, точка C лежит на окружности с диаметром ED .

Значит, если $AC : CB = m : n$, то точка C лежит на окружности, построенной на ED как на диаметре.

Теперь возьмём произвольную точку C' на этой окружности (рис. 16) и покажем, что

$$AC' : C'B = m : n.$$

Обозначим длину отрезка AC' через d и рассмотрим треугольник $AC''B$, у которого

$$AC'' = d \text{ и } BC'' = d \cdot \frac{n}{m}.$$

Так как $AC'' : C''B = m : n$, точка C'' лежит на построенной окружности. Но в верхней полуплоскости существует только одна точка на

окружности с диаметром ED , находящаяся на расстоянии d от точки A . Следовательно, точки C'' и C' совпадают, что и требовалось доказать.

Таким образом, искомое ГМТ – окружность, построенная на отрезке ED как на диаметре.

Полученную окружность называют *окружностью Аполлония*, а точки A , E , B и D , лежащие на одной прямой и удовлетворяющие равенству

$$AE : EB = AD : DB,$$

называют *гармоническими точками*.

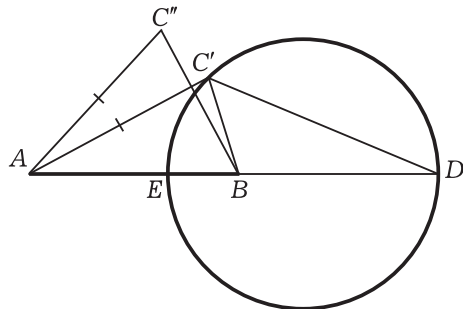


Рис. 16

Построение треугольника по заданным элементам

Заметим, что с помощью метода геометрических мест точек решается множество задач на построение треугольников.

Обозначим стороны искомого треугольника через a , b , c ; противолежащие им углы через α , β , γ ; высоты, проведённые к этим сторонам, через h_a , h_b , h_c ; медианы – m_a , m_b , m_c ; биссектрисы – l_a , l_b , l_c ; радиусы вписанной и описанной окружностей – через r и R .

Задача 4. Построить треугольник по заданным элементам:

- а) c , γ , h_c ; б) α , a , r ; в) α , r , R ;
г) α , h_a , l_a ; д) c , γ , m_c .

Решение. а) Пусть дана сторона AB , равная c , и противолежащий ей

угол γ . Заметим, что третья вершина треугольника принадлежит сразу двум ГМТ:

1. Геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом γ .
2. Геометрическое место точек, удалённых от прямой AB на расстояние h_c .

Пересечением этих двух множеств будет множество точек, для которых одновременно выполняются оба условия.

Таким образом, сначала надо построить дугу, вмещающую угол γ (см. замечание), а потом провести параллельную AB прямую на расстоянии, равном высоте h_c (рис. 17).

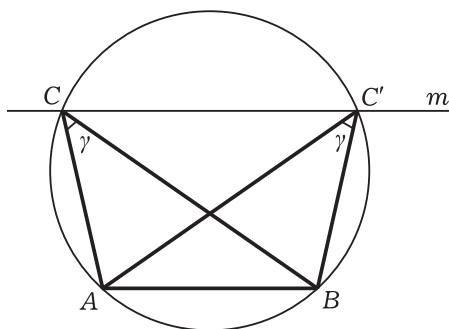


Рис. 17

В результате возможен один из трёх следующих случаев.

Первый случай. При $h < \frac{c}{2\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$

прямая пересечёт окружность в двух точках C и C' и мы получим два симметричных треугольника ABC и ABC' , обладающих заданными элементами.

Второй случай. Если $h = \frac{c}{2\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$,

то треугольник будет единственным.

Третий случай. При $h > \frac{c}{2\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}$

решений нет.

Замечание. Для того чтобы построить дугу, из каждой точки которой отрезок длины c виден под углом γ , достаточно описать окружность вокруг прямоугольного треугольника, построенного по катету $AB = c$ и острому углу $\angle ACB = \gamma$. Из всех точек дуги ACB отрезок AB будет виден под углом γ .

б) Рассмотрим треугольник ABC со стороной $BC = a$ и углом BAC , равным α , в который вписана окружность с центром в точке O радиуса r (рис. 18).

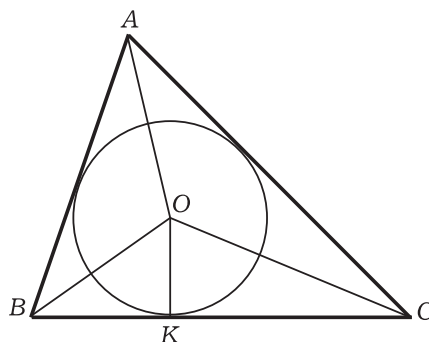


Рис. 18

Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, тогда $\beta + \gamma = \pi - \alpha$. Так как BO и CO – биссектрисы углов ABC и ACB , то

$$\angle BOC = \pi - \angle OBC - \angle OCB = \pi - \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi + \alpha}{2}.$$

В $\triangle BOC$ известны сторона $BC = a$ высота $OK = r$ и $\angle BOC = \frac{\pi + \alpha}{2}$.

Следовательно $\triangle BOC$ можно построить по стороне, противолежащей ей углу и высоте, опущенной на эту сторону (см. пункт а). Потом от отрезков OB и OC надо отложить углы, равные $\angle OBK$ и $\angle OCK$, стороны которых пересекутся в вершине A треугольника ABC .

в) Пусть даны α , r , R . Впишем в окружность радиуса R угол, равный α .

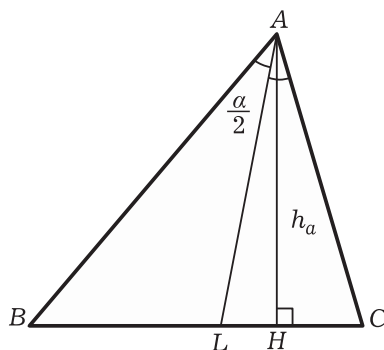


Рис. 19

Длина хорды, на которую он будет опираться, будет равна a . Таким образом, задача свелась к предыдущей.

г) Пусть даны α , h_a , l_a . Построим отрезок $АН$ длины h_a и прямую, ему перпендикулярную и проходящую через точку $Н$. На этой прямой сделаем засечку радиусом l_a с центром в точке $А$ (рис. 19). Получим точку L . От отрезка AL отложим два луча под углом $\alpha/2$. Они пересекут прямую LN в точках B и C . Треугольник ABC (а также симметричный ему треугольник, у которого L лежит правее, чем H) обладает заданными элементами.

Задача имеет решение при $l_a \geq h_a$ и $\frac{\alpha}{2} + \arccos \frac{h_a}{l_a} < 90^\circ$.

д) Пусть даны c , γ , m_c . Построим отрезок AB , равный c , и дугу, из любой точки которой отрезок виден под углом γ . Обозначим через M середину отрезка AB . Рассмотрим следующие случаи.

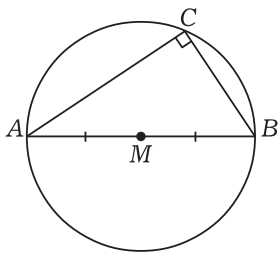


Рис. 20

Первый случай. Если угол γ прямой и $m_c \neq \frac{c}{2}$, то решений нет.

При $m_c = \frac{c}{2}$ решений бесконечно много, так как любой треугольник с вершиной C , взятой на окружности с

диаметром AB , удовлетворяет условиям задачи (рис. 20).

Второй случай. Пусть угол γ острый. Сделаем засечки радиусом, равным m_c , из точки M на дуге, вмещающей угол γ . При $\frac{c}{2} < m_c < \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ мы получим две точки C и C' таких, что оба треугольника ABC и ABC' обладают заданными элементами (рис. 21).

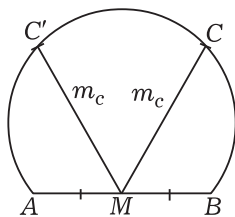


Рис. 21

При $m_c = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ точки C и C' совпадают.

Третий случай. Если угол γ тупой, то засечки из M радиусом m_c на дуге, вмещающей угол γ , дадут две точки C и C' при $\frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} < m_c < \frac{c}{2}$ (рис. 22).

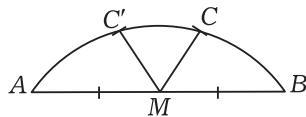


Рис. 22

При $m_c = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ точки C и C' совпадают. В противном случае решений не будет.

Задачи для самостоятельного решения

1. По данной дуге окружности «бегает» точка M . Хорда AB фиксирована. Какие кривые при

этом пробегает в треугольнике AMB точка пересечения а) высот; б) биссектрис?

2. Построить треугольник по заданным элементам:

а) a, b, α ; б) a, b, h_a ; в) a, r, R ;

г) α, β, r ; д) a, h_a, m_b .

3. Через точку A внутри окруж-

ности проводятся всевозможные хорды. Найти геометрическое место середин этих хорд.

4. Построить параллелограмм по углу и диагоналям.

Указания к задачам предыдущей статьи [1]

1. Даны отрезки a, b, c, d и 1. С помощью циркуля и линейки построить x :

а) $x = \frac{a+1}{a+2}$; б) $x = \sqrt[4]{abcd}$;

в) $x = \frac{a^2 - 9}{a^2 + a - 2}$; г) $x = \sqrt{\frac{abc^2 + d^4}{b^2 + cd}}$;

д) $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Указание. Воспользоваться основными формулами алгебраического метода:

а) $x = \frac{pq}{r}$, где $p = a + 1, q = 1, r = a + 2$;

б) $x = \sqrt{mn}$, где $m = \sqrt{ab}, n = \sqrt{cd}$;

в) $x = \frac{(a-3)(a+3)}{(a-1)(a+2)} = \frac{pq}{r}$, где

$p = \frac{(a-3)(a+3)}{a-1}, q = 1, r = a + 2$;

г) $x = \frac{c \sqrt{\sqrt{ab}^2 + \left(\frac{d \cdot d}{c}\right)^2}}{\sqrt{b^2 + \sqrt{cd}^2}} = \frac{cl}{m}$, где

$l = \sqrt{p^2 + q^2}, m = \sqrt{b^2 + r^2}, p = \sqrt{ab},$

$q = \frac{d \cdot d}{c}, r = \sqrt{cd}$;

д) $x = \sqrt{a \sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}}} = \sqrt{ac}$, где

$c = \sqrt{a^2 + d^2}, d = \frac{b \cdot b}{a}$.

2. Дан отрезок длины 7. Построить отрезок длины $\sqrt{7}$.

Указание. $x = \sqrt{a \cdot b}$, где $a = 7, b = 1$.

3. Дан угол в 19° , построить угол в 1° .

Указание. Отложить угол 19° от произвольного луча 19 раз ($19^\circ \cdot 19 = 360^\circ + 1^\circ$).

4. Дан отрезок длины a и угол, равный α . Построить отрезки длины $a\sqrt{\sin \alpha}$ и $\frac{a}{\sqrt{\cos \alpha}}$.

Указание. $a\sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{ab}$, где

$b = a \sin \alpha; \quad \frac{a}{\sqrt{\cos \alpha}} = \sqrt{ab}, \quad \text{где}$

$b = a / \cos \alpha$.

5. С помощью циркуля и линейки разделите угол 54° на три равные части.

Указание. Отложить от сторон угла угол, равный 18° (см. [1]).

6. Построить золотое сечение отрезка AB , то есть на отрезке AB построить точку E такую, что $AB : AE = AE : BE$.

Указание. Обозначить $AB = a, AE = x$. Тогда из соотношения $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ следует, что $x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$.

7. Провести прямую, параллельную основаниям данной трапеции так, чтобы площадь трапеции разделилась пополам.

Указание. Длина искомого отрезка равна $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a\sqrt{2}}$, где a и b — основания трапеции.

Литература

1. Золотарёва Н. Д. «Алгебраический метод решения задач на построение» // Потенциал, 2016, №07(139), с.28.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями. Под редакцией Н.В. Наумович. – М.: Учпедгиз, 1950. – 177 с.
3. Золотарёва Н.Д. Задачи на построение с решениями. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 106 с.
4. Федотов М. В., Хайлов Е.Н. Задачи устного экзамена по математике. – М.: МАКС Пресс, 2002. – 144 с.
5. Математика. Задачи вступительных экзаменов по математике в МГУ имени М. В. Ломоносова с ответами и решениями (1999 – 2004 гг.). Сост. Е. А. Григорьев. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2005. – 399 с.

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Учёные об изучении точных наук

А у нас наука (физика) такая – требует размышлений.

Ю.Б. Харитон

Здравый смысл – это толща предрассудков, успевших отложиться в нашем сознании к восемнадцати годам.

А. Эйнштейн

Истина – это исправленная ошибка.

Г. Бошляр

Жизнь – загадочная книга. Издаётся только раз.

(Автор неизвестен)

Творческая деятельность – это выделение существенного путём отбрасывания несущественного.

И.М. Розет

Гипотеза – одна из форм прорыва в будущее.

А.К. Сухотин