

**Пукас Юрий Остапович**

Более 20 лет преподавал математику и физику в школах города Троицка.

Автор книг по подготовке к ЕГЭ и множества статей по олимпиадной математике.

Многократный победитель Творческого конкурса учителей математики.

«ЛЕГЕНДА №17»

Готовимся к ЕГЭ – 2020

«Запоминается последняя фраза» – это Штирлиц вывел для себя, словно математическое доказательство. А что вспоминают после ЕГЭ его участники? 1 июня 2018 года почти все, выходявшие с экзамена по

математике, в первую очередь говорили о задаче №17, в народе известной как «экономическая». Они были потрясены. Что же такого неожиданного и необычного было в этих задачах? Попробуем разобраться!



Эта фотография, приведённая тогда Екатеринбургским информационным агентством «Новый день» в статье о прошедшем накануне экза-

мене (<https://newdaynews.ru/ekb//637294.html>), относится, скорее всего, к майскому последнему звонку, но она очень точно передаёт состояние

тех, кто по горячим следам делился своими впечатлениями с родителями и с корреспондентами после ЕГЭ.

«Предполагалось, что под этим номером будет задача экономической направленности, но вместо этого профиль поменялся. Вместо неё включили совершенно незнакомую задачу, которую дети даже не решали. А ведь именно к ней многие и готовились, рассчитывая за неё получить хороший балл. У детей был стресс, многие были на грани истерики после экзамена, некоторых даже корвалолом отпаивали», – рассказала «Новому Дню» мама екатеринбургского школьника Олега. «Дочь говорит, что задача была необычная, на тему прогрессии. Сказала, что никогда с такой задачей не сталкивалась, и что у них её никто не решил, хотя ребенок занимался с опытным математиком. Тему они, конечно, проходили, но не на таком сложном уровне», – пояснил нашему агентству отец другой выпускницы.

Не знаю, к каким конкретным задачам готовились все эти расстроенные произошедшим выпускники. Дело в том, что с мая 2014, когда экономическая задача впервые появилась в вариантах ЕГЭ, встретилось немало различных типов этих задач. И те, что предлагались прошлым летом, по крайней мере, чисто внешне очень близки к самому из этих типов пространённому. Вот сравните сами:

1. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- на 15-е число каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит? (ЕГЭ – 2017).

2. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей? (ЕГЭ – 2018).

Ответ: 1 миллион 100 тысяч рублей.

Как видим, профиль не изменился. Более того, задачи однотипные. В обоих случаях долг каждый месяц уменьшается на одну и ту же величину (разумеется, в каждой задаче – на свою). Во второй задаче эта величина известна, она равна 30 тысячам рублей, а в первой – равна $\frac{S}{n}$, где n – количество месяцев, на которое пла-

нируется взять кредит. Отличие только в одном: в том, что в задаче 2018 года после 20-й выплаты долг, скорее всего, не равен 30 тысячам рублей. Пока нам только известно то, что за 20 месяцев долг уменьшился на 600 тысяч рублей и стал равен $(S - 600)$ тысячам рублей, где S — сумма, которую планируется взять в кредит. Как видим, особого повода, чтобы биться в истерику, просто не было.

Более того, мне кажется, что именно к тому, что встретилось тем летом на экзамене, в первую очередь и готовили своих не очень сообразительных подопечных репетиторы. Имеется один тип задач, очень, если даже не самых простых для объяснения, они часто встречаются в тренировочных вариантах и в книгах для подготовки к ЕГЭ. Надо было

только разглядеть в задаче 2 сходство с ними. Вот одна из таких задач, особенно для нас интересная тем, что была предложена выпускникам 2018 года в тренировочной работе от 6 марта 2018 года (о важности мартовских работ мы ещё поговорим):

3. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на 6 лет в размере S тысяч рублей. Условия возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0,9S$	$0,8S$	$0,7S$	$0,6S$	$0,5S$	0

Найдите S , если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 836 тысяч рублей.

Как видим, в этой задаче после первых пяти платежей долг уменьшается на одну и ту же величину, а последним платежом гасится остаток долга с набравшими на него процентами. Стандартно оформленное решение подобных задач может выглядеть так:

Ежегодный долг перед банком по состоянию на каждый февраль будет последовательно составлять $1,01S$; $1,01 \cdot 0,9S$; $1,01 \cdot 0,8S$; $1,01 \cdot 0,7S$; $1,01 \cdot 0,6S$; $1,01 \cdot 0,5S$ тыс. рублей. Найдём размеры ежегодных выплат:

$$1,01S - 0,9S;$$

$$1,01 \cdot 0,9S - 0,8S;$$

$$1,01 \cdot 0,8S - 0,7S;$$

$$1,01 \cdot 0,7S - 0,6S;$$

$$1,01 \cdot 0,6S - 0,5S;$$

$$1,01 \cdot 0,5S.$$

Общая сумма выплат составит

$$1,01S \cdot (1 + 0,9 + \dots + 0,5) - S \cdot (0,9 + 0,8 + \dots + 0,5) = 4,545 \cdot S - 3,5 \cdot S = 1,045 \cdot S = 836 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Значит, $S = 836 : 1,045 = 800$ (тыс. рублей).

Всё это верно. И очень многим современным школьникам нравится то, что здесь совсем не надо думать, а достаточно просто запомнить готовую схему: «Умножим каждое из того, что записано в верхней строке таблицы на увеличивающий коэф-



ножать и что с чем складывать, даже не пытаясь понять смысл всех этих действий, даже не подозревая, что он, этот смысл, есть. А ведь именно ТАК к задаче №17 многие из выпускников и готовились, твёрдо рассчитывая получить за неё хороший балл.

Вернёмся к задаче 2.

Вот её условие, изложенное в стиле задачи 3:

4. 15-го декабря 2017 года планируется взять кредит в банке на 21 месяц в размере S тысяч рублей, то есть к 15-му сентября 2019 года кредит должен быть погашен.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

фициент $b = \left(1 + \frac{r}{100}\right)$, затем всё это

сложим. Отняв от полученного результата сумму всех величин из нижней строки за исключением первой, то есть за исключением S , мы получим общую сумму выплат после полного погашения кредита. Для нахождения S получается уравнение:

$$b \cdot S \cdot (1 + 0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5)$$

$$- S \cdot (0,9 + 0,8 + 0,7 + 0,6 + 0,5) = 836.$$

Отсюда находим, что $S = 800$ тысяч рублей». И надо только постараться не перепутать, что на что ум-

Число, месяц и год	15.12.17	15.01.18	15.02.18	...	15.07.19	15.08.19	15.09.19
Долг (в тыс. рублей)	S	$S - 30$	$S - 60$	...	$S - 570$	$S - 600$	0

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

Разумеется, чтобы решить задачу 2, совершенно не обязательно представлять её условие в таком виде. Здесь это сделано лишь для того, чтобы лучше было видно её идейное сходство с уже известными задачами. Мне не очень нравятся официально опубликованные, безусловно, правильные решения задач №17 от

01.06.2018. Все они – в стиле того, как здесь была объяснена задача 3, может только с чуть более подробными объяснениями. К самому такому оформлению претензий у меня нет, оно формально безупречно, допускаю даже, что и сам могу в зависимости от конкретной задачи и от своего настроения записать решение подобным образом. Мне не нравится, когда ученикам именно так, и только так объясняют решение задачи, алгоритм они, может быть, и усвоят, но

смысл производимых операций, скорее всего, останется для них за кадром. Попробую пояснить это на примере второго платежа в разбираемой задаче.

Рассмотрим второй платёж: переход от долга $(S-30)$ тысяч рублей к долгу $(S-60)$. Я привык рассуждать так: 1 февраля на остаток долга будут начислены проценты в размере $0,03 \cdot (S-30)$, до 15 февраля мы должны выплатить их и ещё часть долга в размере 30 тысяч рублей. Итак, второй платёж равен $(30 + 0,03 \cdot (S-30))$. А вот другое рассуждение: долг перед банком по состоянию на 1 февраля равен $1,03 \cdot (S-30)$, а на 15 февраля – уже $(S-60)$. Поэтому, вторая выплата равна $1,03 \cdot (S-30) - (S-60)$. Отличия в рассуждениях невелики, но они есть. Выбор пути – за вами, кому что нравится. Это – дело вкуса.

Но для тех из вас, кто уже самостоятельно разобрался с очень важной задачей 1 и получил в ней ответ 9 месяцев, я могу предложить другой подход к решению задачи 2. Кредит в S тысяч рублей, взятый на 21 месяц, можно представить, как два кредита. Первый кредит в 600 тысяч рублей мы берём на 20 месяцев и выплачиваем его полностью по схеме первой задачи, ежемесячно уменьшая долг перед банком на 30 тысяч рублей. Умея решать задачу 1, вы найдёте, что банку будет выплачено 789 тысяч рублей. За второй кредит, равный $(S-600)$ тысячам рублей, будем рассчитываться так: первые 20 месяцев выплачиваем только проценты. Это получается $20 \cdot 0,03 \cdot (S-600) =$

$= 0,6 \cdot (S-600)$ тысяч рублей. А последним (21-м) платежом (он равен $1,03 \cdot (S-600)$ тыс. рублей) полностью рассчитаемся с банком за кредит.

Получаем уравнение:

$$789 + 0,6 \cdot (S-600) + 1,03 \cdot (S-600) = 1604$$

$$\Rightarrow (S-600) = 500 \Rightarrow S = 1100 \quad \text{тысяч рублей.}$$

Не мне одному пришла в голову мысль подобным образом решать банковские задачи ЕГЭ – 2018. И уж точно не я назвал такой подход схемой «с двумя карманами». Я сначала не очень задумывался над этим названием: вроде понятно и без названия, но можно и так назвать, ведь мы для удобства рассуждений делим мысленно кредит на две части. Однако, объясняя такие задачи на занятиях Майской школы учебного центра «Физтех – Потенциал», для доходчивости стал использовать это название, раскрывая его смысл примерно так: «Деньги, взятые в кредит, разложим по двум карманам. В левый положим 600 тысяч, а в правый – оставшиеся $(S-600)$ тысяч. Есть у нас ещё кошелёк («с мелочью»), из которого мы будем, каждый раз приходя в банк, брать деньги для выплаты процентов. Их нам начисляют вне зависимости от того, как мы разложили деньги, банку до этого нет дела. А выплачивая очередные 30 тысяч, будем доставать их из левого кармана. После двадцатой выплаты этот карман опустеет, а в следующий раз, выплатив из кошелька проценты, мы опустошим и правый карман».

Такое «разжёвывание» потребовалось, так как даже до безусловно сильных учеников, приученных к бездумному применению готовой схемы (как в решении задачи 3), иначе смысл действий не доходил.

Но не всегда детализация структуры платежа бывает так важна для понимания задачи, как в рассмотренных выше примерах, иногда она даже затрудняет решение, отвлекает от сути происходящего. Вот сравните две формулировки одной и той же задачи:

5. Предприниматель взял в банке кредит на сумму 9 930 000 рублей под 10 % годовых. Схема погашения кредита: раз в год клиент должен выплачивать банку одну и ту же сумму, которая состоит из двух частей. Первая часть составляет 10% от оставшейся суммы, а вторая направлена на погашение оставшейся суммы долга. Каждый следующий год проценты начисляются только на оставшуюся сумму долга. Какой должна быть ежегодная сумма выплаты (в рублях), чтобы предприниматель полностью погасил кредит тремя равными платежами?

6. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами? (*Демонстрационный вариант ЕГЭ – 2015*).

Перед тем, как впервые включить задачу экономического содержания в варианты ЕГЭ, её опробовали (задача 5) в итоговой диагностической работе для 10 класса в мае 2014 года. После обсуждений и учёта замечаний эта задача уже в

более понятной формулировке появилась в демонстрационном варианте (задача 6).

Задача 6 очень простая. Рассмотрим её в общем виде, чтобы проще было в дальнейшем разбираться в похожих ситуациях. Взяв в банке S рублей в кредит под r % годовых, Сергей должен вернуть его тремя равными платежами по x рублей каждый. Через год после первого начисления процентов долг банку возрастёт на $\frac{r}{100}S$ рублей и станет рав-

ным $S + \frac{r}{100}S = \left(1 + \frac{r}{100}\right)S = bS$, где

$b = 1 + \frac{r}{100}$. После первой выплаты в x

рублей, Сергей будет должен банку уже $(bS - x)$ рублей. После второго начисления процентов и очередной выплаты долг составит $((bS - x)b - x)$ рублей, а после третьей выплаты кредит будет полностью погашен: $((bS - x)b - x)b - x = 0$. Преобразуем это уравнение к виду, удобному для вычислений:

$$S \cdot b^3 = x(b^2 + b + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \cdot b^3 = x \cdot \frac{b^3 - 1}{b - 1}.$$

Здесь мы применили формулу суммы геометрической прогрессии. Из полученного выражения можно, зная две любые величины, найти третью. Так как численные значения S и b нам известны, вычисляем сумму ежегодного платежа: $x = 3\,993\,000$ рублей. Это – **ответ**.

У выпускников 2018 года ещё была возможность в последнем учебном году во время диагностических и тренировочных работ познакомиться с такими задачами:

7. В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать банку в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ: 3 751 руб.

С ситуацией, когда в течение нескольких платежей выплачивают только проценты, выпускники тоже встречались:

8. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на 5 лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщиком будет меньше 6 миллионов рублей.

Решение. Три первые выплаты равны $\frac{r}{100} \cdot S = 0,1 \cdot S$ каждая. Суммы, выплачиваемые в конце 4-го и 5-го годов, находим из уравнения

$$(bS - x)b - x = 0 \Rightarrow x = \frac{b^2 S}{b+1} \Rightarrow x = \frac{121}{210} \cdot S.$$

По условию общий размер выплат $3 \cdot 0,3 \cdot S + 2 \cdot x = 0,3 \cdot S + \frac{242}{210} \cdot S = \frac{61}{42} \cdot S < 6$

$$\Rightarrow S < \frac{252}{61} = 4 \frac{8}{61}.$$

Так как по условию S — целое число, то его наибольшее значение равно 4.

Ответ: 4 млн рублей.

9. В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать банку в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Указание. Действуя, как в задаче 6, для случая четырёх платежей получаем:

$$(((bS - x)b - x)b - x) - x = 0 \Rightarrow$$

$$S \cdot b^4 = x(b^3 + b^2 + b + 1)$$

$$\Rightarrow S \cdot b^4 = x \cdot \frac{b^4 - 1}{b - 1}.$$

Здесь мы применили формулу суммы 4-х членов геометрической прогрессии. Могут также посоветовать для конкретных вычислений коэффициент b использовать в виде обыкновенной дроби, то есть, как $b = \frac{6}{5}$, практика показывает, что это удобнее.

$$\text{Далее имеем: } \begin{cases} S \cdot b^4 = x \cdot \frac{b^4 - 1}{b - 1} \\ S \cdot b^2 = y \cdot (b + 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 518400 \\ y = 878400 \end{cases} \Rightarrow 4x - 2y = 316800.$$

Ответ: 3 168 00 руб.

Как видим, в рассмотренных задачах нам предлагали расплатиться одинаковыми платежами за кредиты, взятые не больше, чем на два, на три или четыре года. Думаю, что это связано с тем, что составителям задач чрезвычайно трудно подобрать такие целые числа S , x и r , чтобы выполнялось равенство

$$S \cdot b^k = x \cdot \frac{b^k - 1}{b - 1}.$$

Но они нашли выход и стали время от времени предлагать вот такие задачи:

10. Оля хочет взять кредит в 1 200 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме последней выплаты) после начисления процентов. Ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 320000 рублей?

Решение. Минимизировать время выплат можно, только максимизировав сами выплаты, то есть, выплачивая каждый раз после начисления процентов по 320000 рублей, кроме, разумеется, последнего раза. Наверняка последний платёж будет мень-

ше. Вот и получилась задача на погашение многолетнего кредита одинаковыми платежами (возможно, кроме последнего). Используя уже приобретённый опыт, для кредита, взятого на k лет на таких условиях, получаем соотношение:

$$\left(S \cdot b^{k-1} - x \cdot \frac{b^{k-1} - 1}{b - 1} \right) \cdot b \leq x.$$

Оно означает, что после $(k-1)$ -й выплаты и последнего $(k-20)$ начисления процентов, очередным платежом, не превышающем x , мы полностью погасим долг. В нашей задаче про Олю, в которой $S = 1200000$, $x = 320000$, $b = 1,1$, получаем:

$$\left(1200000 \cdot b^{k-1} - 320000 \cdot \frac{b^{k-1} - 1}{b - 1} \right) \cdot b \leq 320000$$

$$\Rightarrow \left(15 \cdot b^{k-1} - 4 \cdot \frac{b^{k-1} - 1}{b - 1} \right) \cdot b \leq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot 1,1^{k-1} - 40 \cdot (1,1^{k-1} - 1) \leq 4 \cdot \frac{10}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 \cdot 1,1^{k-1} \geq 36 + \frac{1}{11} > 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,1^{k-1} > \frac{36}{25} = 1,44.$$

Так как $1,1^3 = 1,331 < 1,44 < 1,1^4 = 1,4641$, находим, что $k-1=4 \Rightarrow k=5$. Кредит надо брать на 5 лет.

Но можно (и нужно) действовать проще. Объяснив ситуацию, как происходят начисления и выплаты, просто составим таблицу выплат:

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
0	1200000	—
1	1320000	1000000
2	1100000	780000
3	858000	538000
4	591800	271800
5	298980	0

Именно так чаще всего оформляют такие задачи. Возьмите и вы это вооружение. Безупречно и вот такое оформление решения задачи 10:

Сумма кредита составляет $S = 1\,200\,000$ рублей. Пусть x_n — размер долга перед банком через n лет после очередной выплаты. При условии, что ежегодные выплаты составляют не более 320000 рублей, справедливы следующие оценки:

$$x_1 \geq 1,1 \cdot 1\,200\,000 - 320\,000 = 1\,000\,000;$$

$$x_2 \geq 1,1 \cdot 1\,000\,000 - 320\,000 = 780\,000;$$

$$x_3 \geq 1,1 \cdot 780\,000 - 320\,000 = 538\,000;$$

$$x_4 \geq 1,1 \cdot 538\,000 - 320\,000 = 271\,800;$$

$$x_5 \geq 1,1 \cdot 271\,800 - 320\,000 = -21\,020 < 0.$$

Значит, минимальное количество лет, за которое можно выплатить кредит при указанных условиях, равно 5.

Иногда, когда процентная ставка невелика, удаётся решить подобную задачу «по-детски»:

11. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,1 млн рублей.

Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество месяцев можно взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. рублей?

Решение. Если бы банк не брал процентов, кредит можно было бы вернуть за 8 месяцев, так как $8 \cdot 137,5 = 1100$. Но проценты начисляются, значит минимальное количество месяцев, на которое возмож-

но взять кредит, не меньше девяти. Так как после каждой выплаты сумма долга уменьшается, за 9 месяцев банк начислит меньше, чем 9% от первоначальной суммы в 1100 тысяч рублей, то есть меньше 99 тысяч. Следовательно, девятый платёж будет последним. А чему он будет равен, нас в этой задаче не спрашивают.

Ответ: 9 месяцев.

Рассмотрим ещё три задачи из тренировочных работ сезона 2017 – 2018. Они в стиле задач 1 и 3.

12. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 миллиона рублей?

Решение. Пусть S миллиона рублей — сумма кредита. Ежемесячно долг должен уменьшаться на величину $\frac{S}{14}$, поэтому в каждый очеред-

ной платёж мы должны выплачивать проценты, начисленные на текущий остаток долга, плюс $\frac{S}{14}$, уменьшая долг на заданную величину. Для удобства записи сумму, взятую в кредит, запишем как $S = 14a$, где

$a = \frac{S}{14}$. Тогда первый платёж равен

$P_1 = a + 0,04 \cdot 14a$, второй – равен

$P_2 = a + 0,04 \cdot 13a, \dots$,

$P_k = a + 0,04 \cdot (15 - k) \cdot a, \dots$,

$P_{14} = a + 0,01 \cdot r \cdot a$.

Сумма всех четырнадцати платежей равна

$P_0 = 14a + 0,04 \cdot (14 + 13 + \dots + 2 + 1) \cdot a =$

$14a + 0,04 \cdot 15 \cdot 7 \cdot a = 14a + 0,04 \cdot 15 \cdot 7 \cdot a =$

$14a + 0,3 \cdot 14 \cdot a = 1,3 \cdot S = 1,3$.

Следовательно, в кредит надо взять один миллион рублей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,2	1	0,8	0,6	0,3	0,1	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Андрею в общей сумме придётся выплатить больше 1,7 млн рублей.

Решение. Ситуация, знакомая нам по задаче 3. Со 2-го по 14-е февраля надо осуществить первый платёж: вернуть банку набежавшие проценты на сумму в 1,2 млн рублей и уменьшить долг до суммы, указанной в таблице, то есть, до одного миллиона рублей. Таким образом, первый платёж равен

$P_1 = 1200 \cdot \frac{r}{100} + 200$. (Для удобства

будем всё считать в тысячах рублей). Второй платёж будет меньше, так как проценты начисляются уже на сумму 1000 тысяч рублей:

$P_2 = 1000 \cdot \frac{r}{100} + 200$.

Дальнейшие платежи:

$P_3 = 800 \cdot \frac{r}{100} + 200, P_4 = 600 \cdot \frac{r}{100} + 300,$

$P_5 = 300 \cdot \frac{r}{100} + 200$ и, наконец,

13. 15 января Андрей планирует взять в банке кредит на 6 месяцев в размере 1,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

- выплаты должны производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;

- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

$P_6 = 100 \cdot \frac{r}{100} + 100$. Общая сумма вы-

плат, равная $(1200 + 40 \cdot r)$ тысячам рублей, должна превышать 1,7 млн рублей. Решая неравенство

$1200 + 40 \cdot r > 1700$, находим, что

$r > \frac{500}{40} = 12,5$. По условию r – целое

число, поэтому в ответе указываем $r = 13$.

Ответ: 13%.

14. 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что в пятый месяц кредитования нужно

выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Указание. «В пятый месяц кредитования» – это означает пятую выплату. После четвёртого платежа долг перед банком составит $\frac{5}{9}S$ тысяч рублей, где S – сумма, взятая в кредит.

Следовательно,

$$P_5 = \left(\frac{5}{9}S\right) \cdot 0,04 + \frac{1}{9}S = \frac{1,2}{9}S = 44.$$

Не спешите находить величину S , найдите сначала сумму всех девяти выплат. Окажется, что она равна $1,2 \cdot S$. Из этого следует, что всего банку нужно вернуть $44 \cdot 9 = 396$ тысяч рублей.

Разобравшись с тем, что должны были знать выпускники к лету 2018 года, возвращаемся к задачам ЕГЭ – 2018.



15. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 19 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого с 1-го по 18-й месяц долг должен быть на 50 тыс. рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 19-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15-е число 18-го месяца, если банку всего было выплачено 1209 тыс. рублей? (ЕГЭ – 2018).

Комментарий. В задаче 2 надо было найти S , а здесь $(n+1)$ величину долга на 15-е число 18-го месяца, то есть $S - 18 \cdot 50 = S - 900$.

Ответ: 100 тыс. рублей.

16. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 11 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1388 тысяч рублей?

Решение. Действуя, как в задаче 2(4), кредит в S тысяч рублей, взятый на 11 месяцев, представим, как два кредита. Первый кредит в $(S - 300)$ тысяч рублей мы берём на 10 месяцев и выплачиваем его полностью по схеме первой задачи, ежемесячно уменьшая долг перед банком

на сумму $a = \frac{S}{10}$ тысяч рублей. За второй кредит, равный 300 тысячам рублей, будем рассчитываться так: первые 10 месяцев выплачиваем только проценты. Это получается $10 \cdot 0,01 \cdot 300 = 30$ тысяч рублей. А последним (11-м) платежом (он равен $1,01 \cdot 300 = 303$ тыс. рублей) полностью гасим кредит. Получается, что всего банку за 11 месяцев по «второму» кредиту было выплачено 333 тысячи рублей. Получается, что по «первому» кредиту (с ним рассчитались за 10 месяцев) было выплачено 1055 тысяч рублей. Осталось найти $(S - 300)$, то есть чему была равна сумма этого «первого» кредита. Вспоминаем задачу 12. Действуя, как в ней, находим, что $(S - 300) = 1000$ тысяч рублей. Следовательно, всего в кредит брали 1300 тысяч рублей. Это — ответ.

17. 15 января планируется взять в банке кредит 600 тыс. рублей на $(n+1)$ месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг должен составлять 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит нужно полностью погасить. Найдите n , если банку всего было выплачено 852 тысячи рублей.

Решение. Теперь нас спрашивают, на сколько месяцев планируется взять кредит. Но сути задачи это не меняет. Кредит в 600 тысяч рублей взятый на $(n+1)$ месяц, представим, как два кредита. Первый кредит в 400 тысяч рублей мы берём на n месяцев и выплачиваем его полностью по схеме первой задачи, ежемесячно уменьшая долг перед банком на сумму $a = \frac{S}{n}$ тысяч рублей. По второму кредиту, равному 200 тысячам рублей, в первые n месяцев будем выплачивать только проценты, то есть, всего $n \cdot 0,03 \cdot 200 = 6n$ тыс. рублей. Последним $(n+1)$ -м платежом (он равен $1,03 \cdot 200 = 206$ тыс. рублей) полностью гасим кредит. Так как банку всего было выплачено 852 тысячи рублей, для нахождения n запишем уравнение:

$$400 + \frac{400}{n} \cdot 0,03 \cdot (n + (n-1) + \dots + 1) + (6n + 206) = 852 \Rightarrow n = 20.$$

Ответ: $n = 20$ месяцев.

18. 15-го апреля планируется взять в банке кредит в размере 900 тысяч рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

• к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1021 тысячу рублей.

Указание. Теперь нас спрашивают, под какой процент планируется взять кредит. Привычным образом разделим кредит на две части (700 и 200 тысяч рублей). Общая сумма выплат после полного погашения кредита складывается из двух частей:

$$700 + 70 \cdot \frac{r}{100} \cdot (10 + 9 + \dots + 1) = 700 + \frac{77}{2} \cdot r$$

и

$$200 + 200 \cdot \frac{r}{100} \cdot 11 = 200 + 22r.$$

Всего в сумме это составит 1021 тысячу рублей. И так имеем:

$$900 + \frac{121}{2} \cdot r = 1021 \Rightarrow r = 2\%.$$

Ответ: 2%.

19. 15-го декабря планируется взять в банке кредит в размере 1200 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- на 15-е число каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 10-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1288 тысяч рублей?

Комментарий. На первый взгляд может показаться, что эта задача сложнее только что разобранный, так как здесь неизвестно, на сколько месяцев берётся кредит. Но это только кажется. Уменьшаясь на 80 тысяч ежемесячно, долг за n месяцев уменьшится на 800 тысяч! Следовательно, $n=10$ месяцев. Теперь задача сведена к предыдущей.

Ответ: 1%.

Ежегодно по результатам прошедших экзаменов ФИПИ выпускает «МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ». Вот что было сказано там о том, как справились с задачей №17 выпускники 2016 года:

Задача вызвала довольно большие затруднения, с ней справился примерно каждый десятый выпускник, и примерно такое же число выпускников получило за эту задачу один



или два балла. Трудности связаны с неумением анализировать и интерпретировать условие, слабыми вычислительными навыками, плохо усвоенной темой «проценты».

Результаты выпускников 2018 года по решению этой же задачи оценены ещё сдержаннее:

Одной из причин снижения доли участников, набравших полный бал

за задание 17 (экономическая задача) стало использование при подготовке к экзамену типовых заданий, вместо систематического изучения курса и грамотного итогового повторения. Многие участники не прочитали полностью и внимательно условие задачи и допустили существенные ошибки, следуя «типовому алгоритму».

Послесловие

С экономическими задачами 2018 года мы вроде бы неплохо разобрались. Особых сюрпризов в них летом 2019 года не ожидалось. Зачем они? Чтобы отделить думающих учеников («гуманойдов») от обычных «гуманитариев», достаточно лишь немного изменить какую-нибудь хорошо известную задачу. Например, задачу 8 из нашей статьи. А почему нет? На ЕГЭ – 2016 такие задачи были широко представлены наряду с задачами, типа 3 и 15 из этой статьи.

Вот две из них. Решите их и подумайте заодно, а как их можно творчески преобразить? На ЕГЭ – 2019 таких не было, но вдруг они встретятся в вариантах ЕГЭ – 2020!?

20. В июле 2016 года планируется взять кредит на пять лет в размере S тыс. рублей.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным S тыс. рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны по 360 тыс. рублей;

- к июлю 2021 года долг должен быть полностью выплачен.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ: 850 тыс. рублей.

21. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. рублей.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным 4,2 млн. рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны. К июлю 2021 года долг должен быть полностью выплачен.

Найдите r , если общая сумма выплат после полного его погашения составит 6,1 млн. рублей.

Ответ: 10%.

А 29 мая 2019 года выпускникам были предложены задачи, известные ещё с ЕГЭ – 2015. Например, их можно найти под номерами 5, 6, 7, 8, 9 и 12 среди тех, что были выложены 4 года назад на сайте Александра Ларина:

http://alexlarin.net/egge/2015/19_20_15.html.

В нашей статье такие задачи тоже есть (1 и 12).

Видимо, оценив по результатам диагностических работ уровень подготовки выпускников,

организаторы решили не рисковать, и предложили очень простые и известные задачи, не изменяя их и даже не поменяв числовых данных.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

СУНДУК МЕРТВЕЦА

Вы, конечно, все читали роман Стивенсона «Остров сокровищ». И пиратскую песенку наверняка помните.



*Пятнадцать человек на сундук мертвеца.
Йо-хо-хо! И бутылка рома.*

Оказывается, «сундук» с большой буквы писать полагается! «Сундук». Не верите? Тогда слушайте.

Главарь пиратов Эдвард Тич прятал награбленное на маленьком острове в Карибском море. Остров этот состоял из скал и болот, и, что очень важно, там не было источников пресной воды.

Тич зарывал сундуки с сокровищами в могилы погибших пиратов. Поэтому остров и получил такое название – «Сундук Мертвеца». А название острова полагается писать с большой буквы.

Почему пятнадцать человек? Однажды команда его корабля взбунтовалась, недовольная дележом добычи. Тич с верными ему людьми расправился с бунтарями, и пятнадцать из них высадил на этом острове. Он не оставил этим бедолагам никакой еды, а пресной воды на острове не было. Уверенный, что бунтари на острове долго не протянут, Тич выдал каждому по бутылке рома.

– Справьте по себе поминки, – сказал он на прощанье.

Спустя несколько месяцев Тич вернулся к острову, чтобы закопать очередной клад. К его удивлению встречать корабль вышли все пятнадцать человек, исхудавшие, но живые. Они не пали духом, и, объединив усилия, сумели продержаться до прихода корабля. Даже песню про себя они сочинили. К тому времени команда Тича сильно поредела, и он взял их обратно.

Дружинин Борис Львович