

Вавилов Валерий Васильевич

*Заместитель директора СУНЦ МГУ по научной работе,
заслуженный преподаватель и лауреат
Ломоносовской премии Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова.*



Капризная формула

В геометрии, физике, химии и других приложениях математики важную роль играет формула Л. Эйлера, которая связывает число вершин, рёбер и граней многогранника. Этой формуле и её «сложному характеру» посвящена эта работа.

Изготовление моделей многогранников из плотной цветной бумаги или других материалов – довольно старая школьная традиция. Например, в школе им. А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ это является специальным заданием так называемого *математического практикума*, который посвящён «экспериментальной» математике (проведение расчётов и графических исследований, составление таблиц, анализ возможностей классификации, комбинаторные подсчёты, изготовление чертежей, моделей и пр.)

В основе теории многогранников важную роль играют знаменитая формула Эйлера и её обобщения. В этой статье мы остановимся на роли этой формулы в теории многогранников и её «капризном характере». В конце статьи предложен ориентировочный план большой работы (в частности, экспериментальной), который может быть использован для организации и проведения исследований творческого характера.

1. Любой выпуклый многоугольник имеет столько же сторон, сколько

и вершин. Поэтому такие многоугольники можно классифицировать по числу сторон (или вершин): треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Попытка классификации многогранников привела в 1750 г. известного математика Леонарда Эйлера к следующему результату.

Теорема 1 (Л. Эйлер). Для любого выпуклого многогранника

$$V - E + F = 2,$$

где V – число вершин, E – число рёбер и F – число граней многогранника.

Его работа началась с того, что он составил довольно большую таблицу, в которую выписал значения величин V , E , F для конкретных многогранников (мы ограничимся здесь только таблицей для пяти правильных многогранников, из которой видно, что нужное соотношение выполнено). Острая наблюдательность позволила Л. Эйлеру в этом массиве чисел обнаружить отмеченную закономерность. В 1751 г. он дал доказательство этой формулы для выпуклых многогранников.

Название	V	E	F
Тетраэдр	4	6	4
Октаэдр	6	12	8
Куб (гексаэдр)	8	12	6
Икосаэдр	12	30	20
Додекаэдр	20	30	12

Долгое время считалось, что эта формула Эйлера справедлива для всех многогранников. О. Коши разделял эту точку зрения и в 1811 г. (ему было тогда 22 года) дал элегантно доказательство этой формулы, которое, правда, годилось только для выпуклых многогранников и некоторого класса невыпуклых.

Идея Коши (немного модифицированная) была основана на следующих великолепных наблюдениях. Во-первых, представим себе, что данный выпуклый многогранник является полым и его поверхность выполнена из эластичной резины. Вырежем одну грань, отложим её в сторону, а оставшуюся часть (больше не разрезая) растянем на плоскости. Грани и рёбра, конечно, деформируются, а рёбра могут стать криволинейными. В полученной так называемой карте (сети) величины V , E не изменились, и чтобы доказать формулу Эйлера для исходного многогранника, нужно установить равенство $V - E + F = 1$ для этой плоской карты.

Замечание. Можно и избавиться от криволинейных границ на карте. Для этого достаточно представить, что все грани, кроме одной, сделаны из картона, а одна – из прозрачного стекла. Посмотрим через стекло внутрь многогранника так, чтобы была видна вся его внутренность (а этого может не случиться, если многогранник не является выпуклым). То, что мы увидим, можно интерпретировать как плоскую карту, нарисованную на стекле, и уже с прямолинейными границами (стереографическая проекция «картонной части»).

Второе соображение Коши состоит в том, что для доказательства нужной формулы в общем случае достаточно доказать её только для таких карт, все грани (страны) которых являются криволинейными треугольниками. Это следует из того, что, выбрав по одной точке внутри каждой грани и соединив её кривыми линиями с вершинами этой грани, мы получим новую карту, состоящую только из криволинейных треугольников, для которой величина $V - E + F$ точно такая же, как и у исходной карты. Действительно, если некоторая грань не треугольная и имеет f вершин, то, разбив её указанным способом на криволинейные треугольники, мы к исходной карте добавили f новых рёбер и f новых граней. Тем самым величина $V - E + F$ не изменяется.

Последнее соображение таково. В новой карте, состоящей из криволинейных треугольников, к её границе примыкают два типа треугольников. Один тип состоит из треугольников, которые имеют ровно одну сторону на границе карты, а другой – из треугольников, имеющих на границе две стороны. Рассмотрим один из таких граничных треугольников и удалим из него всё то, что не принадлежит какому-нибудь другому треугольнику. Для первого типа треугольников мы удаляем одно ребро и одну грань (оставляя его вершины и две стороны), а во втором случае мы удаляем из карты одну вершину, две стороны и одну грань. При таких удалениях из карты «граничных» треугольников величина $V - E + F$ не изменяется. Последовательно удаляем треугольники до тех пор, пока не

останется ровно один треугольник. Для образуемой этим треугольником простейшей карты имеем:

$$V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Это и завершает доказательство формулы Эйлера для выпуклых многогранников.

2. Первые реакции на доказательство Коши были восторженными и вселяли уверенность в том, что формула Эйлера верна для любого многогранника. Однако швейцарский математик Симон Люилье уже через год после работы Коши заметил, что многогранник, который получается из большого куба удалением маленького куба («*полый куб*»), нельзя растянуть на плоскость при удалении любой внутренней или внешней его грани (рис. 1). Тем самым уже первый

шаг в доказательстве Коши не является верным. Как отмечал Люилье, свое открытие он сделал, рассматривая минералогическую коллекцию своего друга, в которой заметил двойной кристалл, где внутренний кристалл был непрозрачным, а внешний пропускал свет (например, это мог быть кубик сернистого свинца внутри кристаллов полевого шпата). Для «*поллого куба*» имеем: $V = 16$, $E = 24$, $F = 12$ и тем самым $V - E + F = 4$! Другой пример Люилье представляет собой «*коронованный куб*», показанный на рис. 2, для которого $V - E + F = 16 - 24 + 11 = 3$! Наконец, им же предложен пример многогранника в виде «*картинной рамы*», для которого $V - E + F = 0$ (рис. 3).

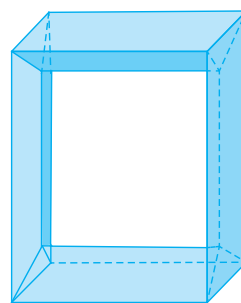
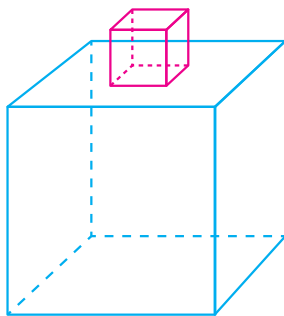
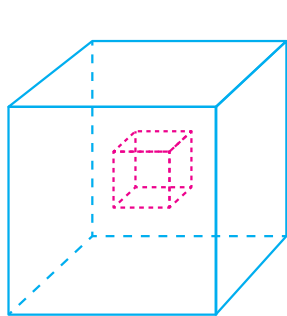


Рис. 1. Полый куб Рис. 2. Коронованный куб Рис. 3. Картинная рама

Немецким математиком Ф. Геселем через двадцать лет после Люилье вновь были открыты заново примеры «*полых*» и «*коронованных*» кубов (и, что любопытно, также при осмотре коллекций минералов!) и даны новые примеры тетраэдров-близнецов, показанные на рис. 4, которые Люилье не заметил; как легко проверить, в обоих случаях

$$V - E + F = 3.$$

3. Итак, формула Эйлера справедлива далеко не для любых многогранников!

А для каких многогранников эта замечательная формула Эйлера верна? В чём секрет эйлеровости многогранника, т. е. для каких многогран-

ников M его (эйлерова) характеристика $\chi(M) = V - E + F$ равна 2?

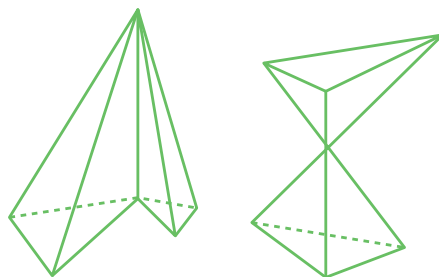


Рис. 4. Тетраэдры-близнецы

Ответ стали искать, идя по следующему пути. Все более сложные многогранники можно получать из более простых, «приставляя» эти простые друг у другу равными гранями.

Мы ограничимся здесь случаем, когда второй («приставляемый») многогранник является тетраэдром – простейшим из всех многогранников. Выясним, что будет происходить с величиной $V - E + F$, если мы «приставим» к некоторой треугольной грани ABC многогранника M тетраэдр $ABCD$, у которого вершина D не совмещается ни с одной из вершин многогранника M (рис. 5 а). Тогда число вершин многогранника M увеличится на единицу (добавляется D), число граней увеличивается на 2 (добавляются три новые грани DAB , DBC , DAC и пропадает одна грань, совмещённая с ABC), число

рёбер увеличится на 3 (добавятся рёбра AD , BD , CD). Следовательно, величина $V - E + F$ не изменится. Таким образом, если для многогранника M формула Эйлера справедлива, то она будет выполняться и для полученного многогранника. Этот результат остаётся справедливым и тогда, когда какая-нибудь грань тетраэдра окажется в одной плоскости со смежной гранью многогранника (рис. 5 б). Тогда в полученном многограннике будет на одну грань меньше, чем у указанного выше, но зато пропадает и одно ребро, так что на значении величины $V - E + F$ это не отразится.

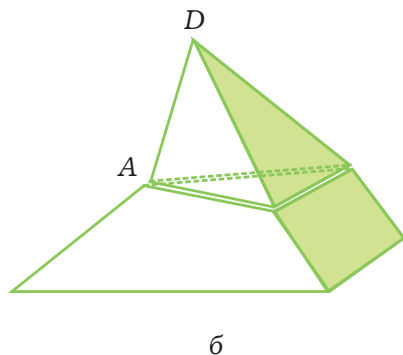
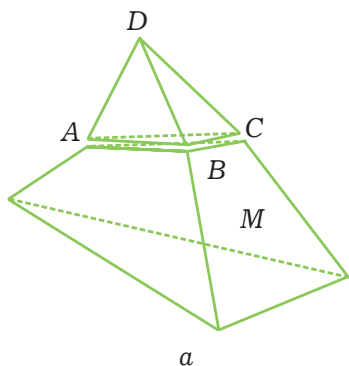


Рис. 5. Простое добавление тетраэдра

Подобным образом легко проверить, что изучаемая величина не изменяется, если прикладывать тетраэдр так, что не одна, а две или

даже три его грани (рис. 6) совмещаются с гранями многогранника (проверьте это, используя приведённые рисунки).

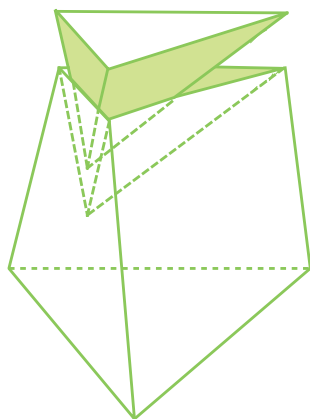
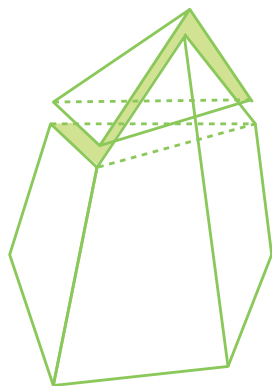


Рис. 6. Более сложное добавление тетраэдра

Эти рассуждения показывают, что формула Эйлера справедлива для достаточно широкого класса многогранников и, по крайней мере, она выполняется для выпуклых многогранников. Действительно, взяв внутри выпуклого многогранника M произвольную точку O и соединив её со всеми вершинами многогранника, мы разобьём весь многогранник на пирамиды с общей вершиной O . Разобьём теперь каждую пирамиду на треугольные пирамиды (тетраэдры с той же вершиной O) – получим разбиение многогранника на тетраэдры. Выберем теперь какой-либо один из этих тетраэдров разбиения и будем последовательно приставлять к нему остальные, пока не получится исходный многогранник. Так как при каждом шаге величина $V - E + F$ не изменяется и так как для начального тетраэдра она равна 2, то и для многогранника M она будет равна 2.

Замечание. Примеры Люилье, в частности, запрещают достраивания «по вершине и ребру». При последовательном приставлении тетраэдра одной гранью нужно также следить за тем, чтобы противоположная вершина тетраэдра не принадлежала уже построенному многограннику. Предоставляем читателю самостоятельно установить, что в случае *выпуклого многогранника* M можно в такой последовательности приставлять тетраэдры, чтобы это условие каждый раз выполнялось.

4. Любой *простой* многогранник можно разбить на тетраэдры (так же, как любой простой многоугольник можно разбить на треугольники). Однако соотношение Эйлера $\chi(M) = V - E + F = 2$ выполняется, во-первых, не для всех простых многогранников («*оконная рама*» на рис. 3), а во-вторых, для непростого многогранника оно может выполняться («*эйлеров каприз*» на

рис. 7), а может и не выполняться («*морской ёж*» Кеплера на рис. 8).

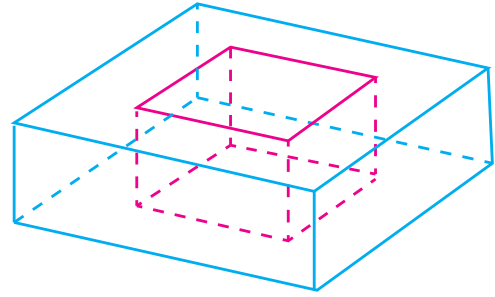


Рис. 7. «Эйлеров каприз»: $\chi(M) = 16 - 24 + 10 = 2$

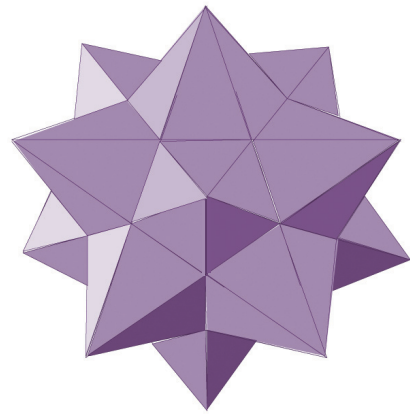


Рис. 8. «Морской ёж» Кеплера: $\chi(M) = V - E + F = 12 - 30 + 12 = -6$

Напомним, что *простым* называется многоугольник, который ограничен одной несамопересекающейся замкнутой линией и для которого из каждой вершины выходит ровно две стороны. *Многогранник* называется *простым*, если:

1) все его грани являются простыми многоугольниками;

2) никакие две его несмежные грани не имеют общих точек (внутренних или граничных), за исключением, быть может, одной общей вершины;

3) две смежные грани имеют только одно общее ребро и не имеют других общих точек.

Дело состоит в том (повторим ещё раз!), что при конструировании многогранника из тетраэдров для неизменности величины $V - E + F$ необходимо, чтобы каждый раз, когда тетраэдр приставляется одной гранью, противоположная вершина не совпадала ни

с одной из вершин уже построенного многогранника. Однако имеются многогранники, для которых такого совпадения вершин избежать нельзя; одним из таких многогранников является «картинная рама», которая имеет одну сквозную «дыру» (см. рис. 9).

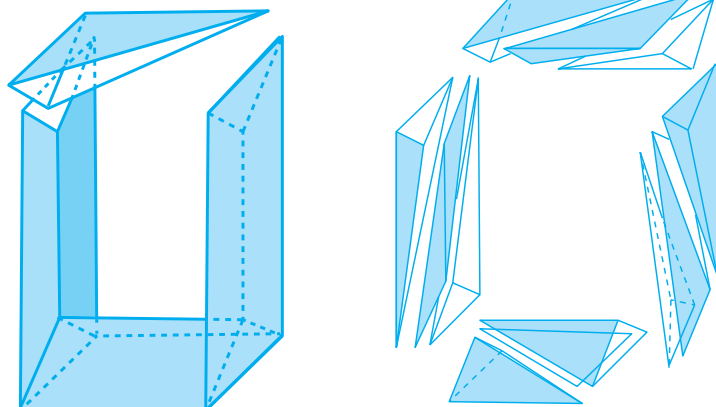


Рис. 9. Разбиение на тетраэдры

Наглядно становится ясным, что простой многогранник можно нужным нам образом составить из тетраэдров, когда он не имеет сквозных «дыр», т. е. не имеет кольцеобразной формы «бублика». Такие простые многогранники без «дыр» называются *многогранниками нулевого рода*. Теорема Эйлера допускает тогда более общую форму.

Теорема 2. Для всякого простого многогранника нулевого рода

$$V - E + F = 2.$$

5. Всякий простой многогранник, не являющийся многогранником нулевого рода, имеет одну или несколько сквозных «дыр». Число таких «дыр» называется *родом многогранника*. Многогранники рода 0 выше уже многократно встречались (например, выпуклые многогранники). «Картинная рама» на рис. 3 и многогранник на рис. 10 – это простые многогранники рода 1.

Простой многогранник рода 1 можно получить из двух простых многогранников рода 0, приставляя

друг к другу двумя несмежными гранями и ликвидируя их у полученного нового многогранника. (Как таким образом получить многогранник на рис. 10?) Простой многогранник рода 2 можно получить из двух многогранников рода 1, приставив их друг к другу таким же образом; например, используя два одинаковых многогранника, показанных на рис. 10.

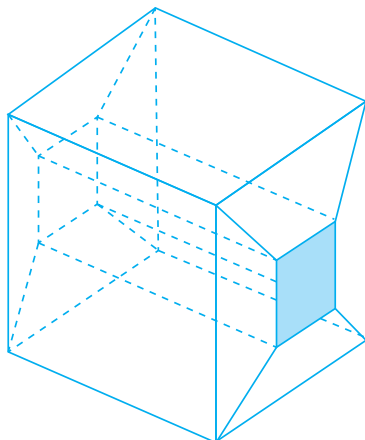


Рис. 10. Простой многогранник рода 1

Вообще, простой многогранник рода $p + 1$ можно получить из простого многогранника рода p , приставив к нему двумя несмежными гранями простой многогранник рода 0 (как?). Если последовательно проследить за нашими примерами построения многогранников рода p и проанализировать изменение величины $V - E + F$, то мы получим подтверждение нового результата.

Теорема 3. Для всякого простого многогранника рода p справедливо соотношение $V - E + F = 2 - 2p$.

Подчеркнём, что теоремы 2 и 3, конечно, нельзя считать доказанными нашими рассуждениями, так как

не доказано, что любой многогранник рода p может быть получен указанным выше способом из некоторого многогранника рода $p - 1$. Можно доказать, что это действительно так, но здесь мы не будем на этом останавливаться.

Более того, при таком изложении, например, само соотношение $V - E + F = 2$ следовало бы считать определением простого многогранника нулевого рода, так как определения сквозных «дыр» и доказательства соотношения Эйлера для простых многогранников, не имеющих сквозных дыр, нами не приведено.

Творческая работа «Эксперименты с многогранниками»

Формула Эйлера является одной из великолепных математических жемчужин. Её применения разнообразны в самых неожиданных областях и могут составить отдельную книгу в серии «Из жизни замечательных идей». Само открытие формулы покоилось на чистом эксперименте, затем уже были даны различные доказательства самой формулы и её обобщений (Эйлер, Лежандр, Пуансо, Коши, Люилье, Гессель, Пуанкаре). Любопытно, что интерес к этой формуле разгорался с новой силой каждый раз, когда возникал пример многогранника, для которого формула Эйлера не верна. Более того, само определение многогранника выросло (в значительной мере) из желания описать эйлеровы многогранники.

При должной организации исследований по теме «Многогранники» можно повторить практически весь тот трудный путь, который и привёл к конечному результату, — выяснению того, для каких же, кроме выпуклых, многогранников формула Эйлера имеет место. Это вполне целостное исследование, проведённое самими учащимися

(конечно же, под руководством учителя), никого не оставит равнодушным и надолго запомнится. Его можно провести по следующему примерному плану (многие из его пунктов годятся не только для старшеклассников).

- 1) Составить таблицу значений V , E , F для различных многогранников.
- 2) Проверить формулу Эйлера, пристраивая «крыши» и удаляя их.
- 3) Разобрать примеры Люилье.
- 4) Рассмотреть «эйлеров каприз» и найти другие «капризные» многогранники.
- 5) Рассмотреть пример «морского ежа» Кеплера; сделать его картонную модель (см. [6]).
- 6) Рассмотреть большой звёздчатый додекаэдр (см. [6]).
- 7) Изучить склеивание многогранников «картинная рама» и проследить за изменением эйлеровой характеристики.
- 8) Рассмотреть множество многогранников на целочисленной решётке (все вершины имеют целые координаты), составленных из единичных кубиков, и некоторые другие типы многогранников (см. примеры на рис. 11).

9) Рассмотреть аналоги теоремы Эйлера для плоских графов и для карт на сфере.

10) Проверить ещё один из вариантов формулы Эйлера, который можно сформулировать так:

Пусть все точки поверхности

Земли (Земного шара) суть либо точки наклона, либо вершины, либо котловины, либо перевалы. Тогда

$$B - \Pi + K = 2,$$

где B – число вершин, Π – число перевалов и K – число котловин.

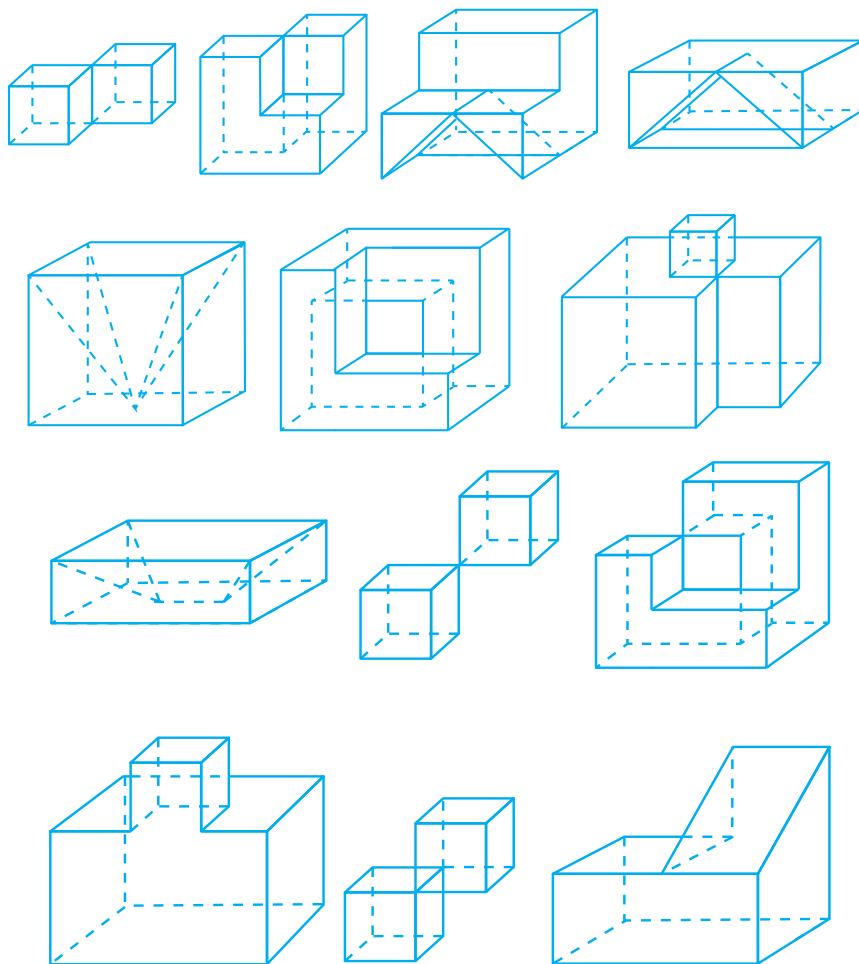


Рис. 11. Примеры многогранников на целочисленной решётке

Нужные здесь определения и само доказательство формулы (с организацией «всемирного потока») можно найти в статье М. Шубина «Топология и... рельеф местности»

(см. «Квант», 8 (1982)).

Завершить эти практические шаги можно сравнением различных доказательств формулы Эйлера и её обобщений.

Литература

1. Поля Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
2. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001.

3. Лакатос И. Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967.
4. Долбилин Н.П. Жемчужины теории многогранников. – М.: МЦНМО, 2000.
5. Ашкингузе В.Г. Многоугольники и многогранники. //В книге «Энциклопедия элементарной математики», т. IV. – М.: Физматлит, 1963.
6. Венниджер М. Модели многогранников. – М.: Мир, 1974.



Фотографии моделей многогранников, изготовленных учащимися школы имени А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ имени М.В. Ломоносова

Калейдоскоп

Калейдоскоп

Калейдоскоп



Необычные определения

Математика – это скважина, через которую логический ум может приглядывать за идеальным миром.

В. Кротов

Время – сердцебиение Вселенной.
Миг – единица измерения счастья.

В. Жемчужников