



Пукас Юрий Остапович
Учитель математики
МАОУ СОШ № 2, г. Троицк.

Дюжина памятных задач

Бывает, что решению трудных задач незаметно помогают нам наши же воспоминания о ранее решённых ярких задачах. При напряжённой работе происходит активизация большого количества ассоциативных связей, установленных ранее. И порой бывает очень интересно разобраться, что помогло успешному решению той или иной конкретной задачи. В первой задаче внимательный взгляд просто выхватывает легко узнаваемые структуры...

1. (Геологический факультет МГУ, 1981) Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{1-4x\sqrt{1-4x^2}}{2}} = 1-8x^2.$$

Решение. Готовимся применить схему

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} = g(x) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Но что можно заметить? Так как $\sqrt{1-4x^2}$ определён при $|2x| \leq 1$, то приходит мысль ввести обозначение $2x = \sin \alpha$, причём $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. На этом промежутке соотношение $2x = \sin \alpha$ является взаимно однозначным. Но тогда

$$\begin{aligned} 1-8x^2 &= 1-2(2x)^2 = \\ &= 1-2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Уравнение наше – тригонометрическое! Далее получаем, что

$$\sqrt{1-4x^2} = |\cos \alpha|,$$

а так как $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{1-4x^2} = \cos \alpha.$$

$$1-4x\sqrt{1-4x^2} =$$

$$= 1-2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2.$$

$$\sqrt{\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{2}} = \cos 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |\sin \alpha - \cos \alpha| = \cos 2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| = \cos 2\alpha.$$

Тут можно действовать по-разному. Мы возведём в квадрат:

$$\begin{cases} \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \cos^2 2\alpha, \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) - 1 = 2 \cos^2 2\alpha - 1, \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin 2\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1, \\ \cos 2\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 1, \\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}; \\ \cos 2\alpha \geq 0. \end{cases}$$

Так как $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\pi \leq 2\alpha \leq \pi$.

А так как $\cos 2\alpha \geq 0$, то $-\frac{\pi}{2} \leq 2\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

На этом промежутке у нас два корня:

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4}, \\ \alpha = -\frac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ x = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

Можно оставить так, а можно вычислить $\sin \frac{\pi}{12}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$.

Ключевые слова к решению задачи 1: иррациональное уравнение, тригонометрия, отбор корней.

Заметим только, что, решая в своих книгах подобную задачу, Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехник и М.К. Потапов обходятся без тригонометрии. Воспользовавшись тем, что

$$\sqrt{\frac{1-4x\sqrt{1-4x^2}}{2}} = \sqrt{\frac{(2x-\sqrt{1-4x^2})^2}{2}} =$$

$$= \frac{|2x-\sqrt{1-4x^2}|}{\sqrt{2}},$$

а также подметив, что на области определения исходного уравнения

$$1-8x^2 = (\sqrt{1-4x^2} + 2x)(\sqrt{1-4x^2} - 2x),$$

они преобразуют его к виду:

$$\frac{|2x-\sqrt{1-4x^2}|}{\sqrt{2}} = (\sqrt{1-4x^2} + 2x)(\sqrt{1-4x^2} - 2x).$$

Далее, так как $1-8x^2 \geq 0$, то

$$1-4x^2 \geq 4x^2 \Rightarrow \sqrt{1-4x^2} \geq 2|x| \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{1-4x^2} - 2x \geq 0.$$

Полученное теперь уравнение

$$\frac{\sqrt{1-4x^2} - 2x}{\sqrt{2}} = (\sqrt{1-4x^2} + 2x)(\sqrt{1-4x^2} - 2x)$$

раскладывается на множители:

$$(2x-\sqrt{1-4x^2})(\sqrt{1-4x^2} + 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.$$

Замечательно, благодаря таким преобразованиям задача запоминается.

Но то, что не показано решение с использованием тригонометрии, мне кажется лукавством.

Заметим, что интересные уравнения с радикалами на геологическом факультете МГУ встречались неоднократно. Вот три из них.

2. (МГУ, 2000) Решите уравнение

$$3-x^2+2x=\sqrt{1-x^2} \cdot (2x^2+4x+3).$$

Решение. Здесь напрашивается выделение полных квадратов в правой и левой частях уравнения:

$$4-(x-1)^2=\sqrt{1-x^2} \cdot (2(x+1)^2+1).$$

Но непонятно, что делать дальше? Здесь у нас неизвестная x присутствует в трёх похожих, но всё же различных выражениях: $\sqrt{1-x^2}$, $(x-1)^2$ и $(x+1)^2$. Оказывается, можно обойтись двумя, и это приводит к успеху:

$$2(1-x^2) + (x+1)^2 = \sqrt{1-x^2} \cdot (2(x+1)^2 + 1).$$

Теперь удаётся разложить на множители:

$$(2\sqrt{1-x^2} - 1)(\sqrt{1-x^2} - (x+1)^2) = 0.$$

Решаем далее:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{1-x^2} = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x = 0, \\ x = -1. \end{cases}$$

Конечно, при первом взгляде на задачу появлялась мысль о тригонометрической замене $x = \sin \alpha$, тогда $\sqrt{1-x^2} = |\cos \alpha|$, причём можно убедиться, что $\cos 2\alpha \geq 0$. Но больше ничего заметить не удалось. Выделение полных квадратов выглядело перспективнее. Но полученные ответы очень уж «тригонометрические»! Ситуация прямо противоположная той, что в задаче 1. Там найти алгебраиче-

ское решение было труднее, чем тригонометрическое. Мы не знаем и не узнаем, как появилось уравнение 2.

Полученное нами разложение на множители в терминах тригонометрии выглядит так:

$$(2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha - (\sin \alpha + 1)^2) = 0,$$

или так:

$$(2 \cos \alpha - 1) \left(\cos \alpha - \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^4 \right) = 0.$$

Может, составители отталкивались от чего-то подобного?

Ответ. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1.$

3. (МГУ, 1985) Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 6x - 2} - \sqrt{x^2 - 1} &= \\ = \sqrt{3x^2 + 8x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x - 10}. \end{aligned}$$

Решение. Перепишем исходное уравнение в более гармоничном виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 + 6x - 2} - \sqrt{3x^2 + 8x + 4} &= \\ = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 10}. \end{aligned}$$

Заметим, что разность радикалов на их области определения можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Применим это преобразование к обеим частям нашего уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{(3x^2 + 6x - 2) - (3x^2 + 8x + 4)}{\sqrt{3x^2 + 6x - 2} + \sqrt{3x^2 + 8x + 4}} &= \frac{(x^2 - 1) - (x^2 - 3x - 10)}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x+3)}{\sqrt{3x^2 + 6x - 2} + \sqrt{3x^2 + 8x + 4}} &= \frac{3(x+3)}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+3) \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 6x - 2} + \sqrt{3x^2 + 8x + 4}} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = -3$, так как на ОДЗ исходного уравнения выражение, стоящее в квадратных скобках, положительно.

Ответ. $x = -3$.

4. (МГУ, 1985) Решить уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+5)(2x+4)} - 2\sqrt{x+3} - 2 &= \\ &= 2\sqrt{x+5} - \sqrt{(x+3)(2x+4)}. \end{aligned}$$

Решение. В первую очередь найдём, что область допустимых значений исходного уравнения состоит из всех x , удовлетворяющих условию $x \geq -2$. Поскольку в этой области

$$\sqrt{(x+5)(2x+4)} = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{2x+4}$$

и

$$\sqrt{(x+3)(2x+4)} = \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{2x+4},$$

исходное уравнение можно записать так:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{x+3} - 2 &= \\ &= 2\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{2x+4}. \end{aligned}$$

Перенеся все члены с радикалами в левую часть и группируя слабые, получаем уравнение

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+4} - 2) = 2.$$

Так как $\sqrt{x+5} \neq \sqrt{x+3}$, упростим уравнение, умножив обе его части на $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}$. Очень полезный технический приём! Получаем уравнение, равносильное исходному уравнению при $x \geq -2$:

$$\sqrt{2x+4} - 2 = \sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}.$$

Так как $\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3} > 0$, то и $\sqrt{2x+4} - 2$ должно быть положительным, следовательно, $x > 0$. На этом множестве

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+4} - 2)^2 &= (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+4} &= \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x+3}. \end{aligned}$$

Ещё раз возводим в квадрат и получаем $x^2 = 1$. Нам подходит только положительный корень.

Ответ. $x = 1$.

Задачи 3 и 4 очень помогли мне при решении очень памятной для меня задачи 5.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67} &= \\ &= 7 \cdot \sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{a^2 - 9a + 18} \end{aligned}$$

имеет единственный корень.

Решение. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \cdot \sqrt{6x - x^2 - 5} - \\ &- \sqrt{-4x^3 + 11x^2 + 60x - 67}; \end{aligned}$$

она определена при $1 \leq x \leq 5$. Заметив, что оба корня обращаются в нуль при $x = 1$, преобразуем подкоренные выражения:

$$\begin{aligned} f(x) &= 7 \cdot \sqrt{(x-1)(5-x)} - \\ &- \sqrt{(x-1)(-4x^2 + 7x + 67)}. \end{aligned}$$

Действуя далее, как в задаче 3, получаем

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} \cdot (4x^2 - 56x + 178)}{7 \cdot \sqrt{5-x} + \sqrt{(-4x^2 + 7x + 67)}}.$$

На области определения $f(x)$ дважды обращается в нуль: при $x_1 = 1$ и

$$\begin{aligned} x_2 &= 7 - \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad f(x) > 0 \text{ при } x_1 < x < x_2; \\ f(x) &< 0 \text{ при } x_2 < x < 5. \end{aligned}$$

Согласно нашему уравнению

$$f(x) = -\sqrt{a^2 - 9a + 18} \leq 0.$$

В случае, если $\sqrt{a^2 - 9a + 18} = 0$, исходное уравнение имеет два различных корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 7 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$. На

промежутке $7 - \frac{3\sqrt{2}}{2} < x \leq 5$ функция $f(x) < 0$ и монотонно убывает. Действительно, числитель положительной дроби возрастает, знаменатель убывает, отрицательный множитель $4x^2 + 56x - 178$ убывает. Получается, что на рассматриваемом промежутке $-2\sqrt{2} < f(x) < 0$, причём каждое из этих значений $f(x)$ принимает только один раз.

Решив двойное неравенство

$$0 < \sqrt{a^2 - 9a + 18} \leq 2\sqrt{2},$$

мы найдём все значения параметра a , при которых исходное уравнение будет иметь единственный корень.

Ответ. $\left[\frac{9 - \sqrt{41}}{2}; 3\right) \left(6; \frac{9 + 41}{2}\right]$.

Наши дальнейшие планы – разобрав сложную задачу 12 (последнюю в варианте ДВИ МГУ, 2014), но сначала рассмотрим две очень важные задачи 1989 года, ключевым словом к решениям которых является слово «дискриминант».

6. (Мехмат МГУ, 1989). Найдите наибольшее из значений z , для которых существуют числа x, y , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz + yz = 3.$$

Решение. Рассмотрим наше уравнение как квадратное относительно x :

$$x^2 + x(y - z) + 2y^2 + z^2 + yz - 3 = 0.$$

Так как его дискриминант

$$D(y, z) = (y - z)^2 - 8y^2 - 4z^2 - 4yz + 12$$

должен быть неотрицательным, получаем квадратное неравенство относительно y с параметром z :

$$7y^2 + 6yz + 3z^2 - 12 \leq 0.$$

Чтобы оно имело решения, должно выполняться условие

$$\frac{D(z)}{4} = 9z^2 - 21z^2 + 84 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 \leq 7, -\sqrt{7} < z < \sqrt{7}.$$

Получается, что наибольшее значение z не превосходит $\sqrt{7}$. Убедимся, что оно равно $\sqrt{7}$. Найдём значения x и y , при которых $z = \sqrt{7}$. Последовательно получаем:

$$7y^2 + 6y\sqrt{7} + 9 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x\left(\sqrt{7} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right) + \frac{25}{7} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{7}}.$$

Ответ. $\sqrt{7}$.

7. (Биофак МГУ, 1989) Числа x, y, z таковы, что $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $x + y - 2z$?

Решение. Обозначив $x + y - 2z = t$ и подставив $y = -x + 2z + t$ в исходное уравнение, получим задачу в стиле только что разобранный задачи с мехмата:

Найдите наибольшее из значений t , для которых существуют числа x, t , удовлетворяющие уравнению

$$4x^2 + 5z^2 + t^2 - 4xz - 2xt + 4zt = 4.$$

Действуя далее, как в задаче 6, рассматриваем квадратное уравнение относительно x :

$$4x^2 - 2x(t + 2z) + t^2 + 5z^2 + 4zt - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{D(t, z)}{4} = -16z^2 - 12zt - 3t^2 + 16 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16z^2 + 12zt + 3t^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{D(t)}{4} = 36t^2 - 48t^2 + 265 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Получается, что наибольшее значение t не превосходит $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Убеждаемся, что оно равно $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Найдём значения x, y, z , при которых $t = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Последовательно получаем:

$$z = -\sqrt{3}, x = \frac{1}{2\sqrt{3}}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что приводимое в некоторых книгах авторское решение намного короче. Получив уравнение

$4x^2 - 5z^2 + t^2 - 4xz - 2xt + 4zt = 4$, его сразу записывают в следующем виде:

$$\left(2x - z - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(2z + \frac{3}{4}t\right)^2 = 4 - \frac{3}{16}t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{16}t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Мы такому решению, конечно, поаплодируем, но заподозрим, что, как и в задаче 1, от нас скрывают основное решение. А вот ещё задача на эту актуальную тему:

8. (ДВИ МГУ, 2011) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 12y^2 \leq 1, \\ 5x + 6y \leq -3. \end{cases}$$

Решение. Обозначив $5x + 6y = t$ и выразив отсюда $6y = t - 5x$, мы получим неравенство в стиле задач 1989 года:

$$24x^2 - 8xt + t^2 - 3 \leq 0.$$

Так как $\frac{D(t)}{4} = 72 - 8t^2 \geq 0$, получаем, что $|t| \leq 3$. Но по условию

$t \leq -3$! Следовательно, $t = -3$. Теперь последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{D(t)}{4} &= 0, \\ 24x^2 + 24x + 6 &\leq 0, \\ x &= -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Другой путь приводится в авторском решении:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 3x^2 + 4xy + 12y^2 = \\ &= \frac{2}{9}(x - 6y)^2 + \frac{1}{9}(5x + 6y)^2. \end{aligned}$$

А так как по условию $(5x + 6y)^2 \geq 9$, получается, что

$$1 \geq \frac{2}{9}(x - 6y)^2 + \frac{1}{9}(5x + 6y)^2 \geq 1.$$

Следовательно, $5x + 6y = -3$, а $x - 6y = 0$.

Ответ. $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{12}$.

Очень интересно, что две следующие задачи в 2003 году шли под номерами 2 и 3 в одном и том же варианте. Получается, что первая из них является в каком-то смысле подсказкой, как решать вторую!

9. (ВМК МГУ, 2003). Решите уравнение:

$$\sqrt{\sin x \cdot \sin 3x} = \cos x.$$

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin x \cdot \sin 3x = \cos^2 x, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \cos 4x = 2\cos^2 x, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ключевые слова к решению задачи 9 совпадают с ключевыми словами к решению задачи 1: иррациональное уравнение, тригонометрия, отбор корней.

10. (ВМК МГУ, 2003) Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

Переформулируем задачу: *при каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = a + x$ имеет хотя бы один корень?* Теперь остаётся найти, при каких значениях параметра a имеет решения система

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = (a + x)^2, \\ a + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2a + 3) = 2 - a^2, \\ x + a \geq 0. \end{cases}$$

Если $2a + 3 = 0$, уравнение не имеет корней.

Если $2a + 3 \neq 0$, получаем единственный корень $x = \frac{2 - a^2}{2a + 3}$, который надо проверить в условии $x + a \geq 0$, то есть найти, при каких значениях a это условие выполняется.

Решаем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{2 - a^2}{2a + 3} + a \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + 3a + 2}{2a + 3} \geq 0. \end{aligned}$$

Ответ. $[-2; -1, 5); (-1; +\infty]$.

Ключевые слова к решению задачи 10: функция, область значений, иррациональное уравнение, отбор корней.

То, что в вариантах ДВИ МГУ 2014 года последней задаче предшествовало необычное тригонометрическое уравнение, сразу напомнило мне

только что разобранные нами задачи 2003 года, после чего события стали развиваться стремительно, причём самую важную роль в них сыграли также разобранные нами две задачи 1989 года.

11. Решите уравнение

$$\sin^2 x - \sin x \cos^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) + \frac{1}{4} = 0.$$

Решение. Считая $\cos^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right)$

неким «параметром», решаем наше уравнение как квадратное относительно $\sin x$. Его дискриминант

$$D = \cos^4 \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) - 1 \leq 0,$$

поэтому должно выполняться

$$\cos^2 \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) = 1.$$

Это равносильно условию

$$\sin \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) = 0.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin \left(\frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k + \frac{\pi}{6}, \\ x = 2\pi k + \frac{5\pi}{6}; \Leftrightarrow \\ \frac{5x}{4} - \frac{17\pi}{24} = \pi n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k + \frac{\pi}{6}, \\ 5x = 4\pi n + \frac{17\pi}{6}; \\ x = 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \\ 5x = 4\pi n + \frac{17\pi}{6}. \end{cases}$$

В первом случае получаем неопределённое уравнение

$$10k = 4n + 2,$$

его корни

$$k = 2m + 1, n = 5m + 2, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4\pi m + 2\pi + \frac{\pi}{6} = 4\pi m + \frac{13\pi}{6}, m \in \mathbb{Z}.$$

Во втором случае уравнение

$$10k + \frac{4}{3} = 4n \text{ целых корней не имеет.}$$

Ответ. $x = 4\pi m + \frac{13\pi}{6}, m \in \mathbb{Z}.$

Ключевые слова к решению задачи **11**: тригонометрическое уравнение, дискриминант, отбор корней.

12. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y,$$

$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

Сходство с задачей **10** несомненно! А после возведения в квадрат узнаем задачи **6** и **7**.

Решение. Действуем, как в задаче **10**: при каких значениях параметра a

имеет решение хотя бы одна из систем:

$$\begin{cases} -6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5 = (a - y)^2, \\ a - y \geq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -6x^2 - 11y^2 - 16xy + 5 = (a - y)^2, \\ y - a \geq 0. \end{cases}$$

Может быть и не сразу, но придёт понимание того, что проверки условий $a - y \geq 0$ и $y - a \geq 0$ не потребуется. То, что не подойдёт в первое условие, подойдёт во второе!

После возведения в квадрат и приведения подобных членов получаем уравнение

$$6x^2 + 16xy + 12y^2 - 2ay + a^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{D(y, a)}{4} = -8y^2 - 12ay - 6a^2 + 30 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 6ay + 3a^2 - 15 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{D(a)}{4} = -3a^2 + 60 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a| \leq 2\sqrt{5}.$$

Ответ. $[-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}].$

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Из шутильной оды Э. Резерфорду.

Что же, что же спрятано
 В самом сердце атома?
 Он чуть – чуть подумает и найдёт ответ.
 Атомы он бьёт,
 Точно уток в лёт,
 От него спасенья бедным крошкам нет.
 Собираясь на охоту,
 Вместо пули он берёт
 Альфа-частицу ту и эту,
 Те, что радий отдаёт.