

Бегунц Александр Владимирович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, директор Центра математического творчества МГУ имени М.В. Ломоносова, учитель математики школы № 171 г. Москвы



Копьев Дмитрий Викторович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, учитель математики школы № 1574 г. Москвы

Обратные теоремы об углах, связанных с окружностью

В школьном курсе геометрии обсуждаются две важнейшие теоремы об углах, связанных с окружностью: о равенстве углов, опирающихся на одну дугу, и об угле между касательной и хордой (см., например, [1, с. 140 и с. 158], [2, с. 134 и с. 137, задача 2.608], [3, с. 171]). Однако обратные к ним теоремы зачастую остаются за кадром, хотя они позволяют легко доказать принадлежность точки данной окружности и касание прямой данной окружности соответственно. В настоящей заметке мы приведём формулировки прямых и обратных теорем, обсудим доказательства обратных теорем (в большинстве пособий они приведены лишь в качестве задач) и рассмотрим применение этих утверждений при решении двух задач LXXXIV Московской математической олимпиады (весна 2021 года, см. сайт [4]).

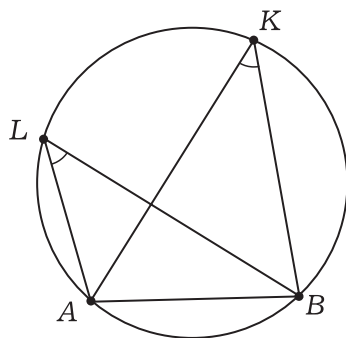


Рис. 1

Теорема 1. Если точки A , B , L и K лежат на одной окружности, причём L и K лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB , то угол ALB равен углу AKB (см. рис. 1).

Кратко эту теорему формулируют так: углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу, равны.

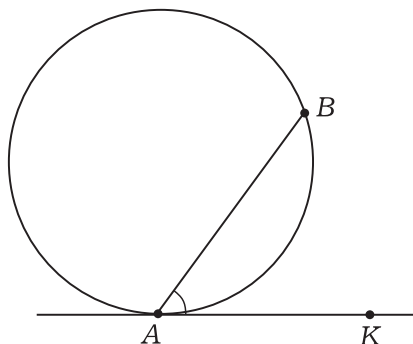


Рис. 2

Теорема 2. Если точки A и B лежат на окружности, прямая AK касается этой окружности, то градусная мера угла BAK равна половине градусной меры дуги, заключённой внутри этого угла (см. рис. 2).

Приведём удобные для практического применения формулировки обратных теорем.

Обратная теорема 1. Если точки L и K лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB , и угол ALB равен углу AKB , то точки A, B, L и K лежат на одной окружности.

Доказательство. Рассмотрим описанную окружность треугольника ALB . Предположим противное: точка K не принадлежит данной окружности. Тогда точка K лежит либо внутри, либо вне окружности.

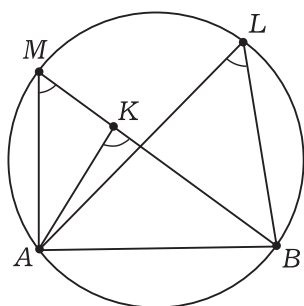


Рис. 3

Первый случай (см. рис. 3): пусть точка K лежит внутри окружности. Продлим прямую BK до пересечения с окружностью, тогда углы AMB и ALB равны как вписанные (см. теорему 1). Угол AKB внешний для треугольника MAK , следовательно, равен сумме двух внутренних не смежных с ним, $\angle AKB = \angle KAM + \angle AMK > \angle AMK = \angle ALB$, противоречие.

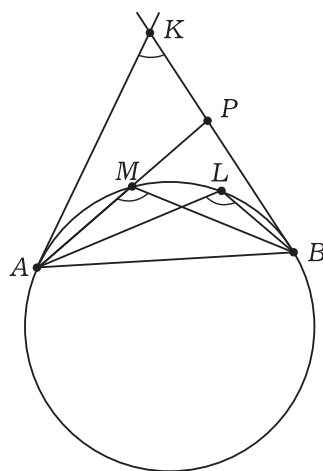


Рис. 4

Второй случай (см. рис. 4): пусть точка K лежит вне окружности. Лучи AK и BK могут не пересекаться с рассматриваемой окружностью в точках, отличных от точек A и B , поэтому выберем точку M на дуге BA , лежащей внутри угла AKB (здесь и далее будем называть дуги, следуя по окружности против часовой стрелки). Продлим отрезок AM за точку M до пересечения с отрезком BK в точке P . Углы ALB и AMB равны (см. теорему 1). Угол AMB внешний для треугольника BMP , а угол APB внешний для треугольника APK , поэтому, аналогично первому

случаю, $\angle AMB = \angle MBP + \angle APB > \angle APB = \angle AKB + \angle PAK > \angle AKB$, противоречие.

Следовательно, точки A, B, K и L лежат на одной окружности.

Обратная теорема 2. Если точки A и B лежат на окружности, а точка K – вне окружности, и градусная мера угла BAK равна половине градусной меры дуги, заключённой внутри этого угла, то прямая KA касается данной окружности.

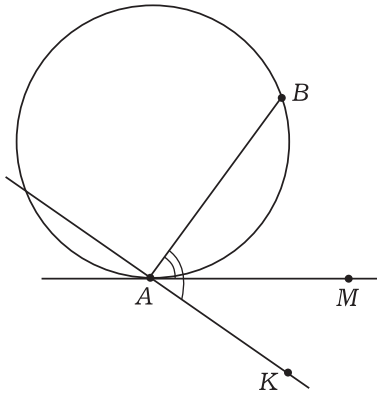


Рис. 5

Доказательство. Предположим противное: прямая KA не является касательной к данной окружности (см. рис. 5). Проведём к окружности касательную AM . Тогда по теореме 2 $\angle BAM = \frac{\text{дуга } AB}{2} = \angle BAK$, а значит, прямые AM и KA совпадают, противоречие. Следовательно, прямая KA касается данной окружности.

Следствие. Если точки A и B лежат на окружности, а точка K – вне окружности, и угол BAK равен вписанному в данную окружность углу, опирающемуся на дугу, заключённую внутри этого угла BAK , то прямая KA касается данной окружности.

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC . Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K . Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1 .

Решение. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC , следовательно, $\angle AOB = 2\angle C$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} =$

$= 90^\circ - \angle C$ (см. рис. 6). Пусть точка H – точка пересечения отрезков BB_1 и AC . Точки B и B_1 симметричны относительно прямой AC , поэтому H – основание высоты треугольника ABC , опущенной из точки B и $\angle BB_1C = \angle HBC = 90^\circ - \angle C$, а значит, $\angle BAK = \angle BB_1K$. Следовательно (см. обратную теорему 1), точки A, B, K и B_1 лежат на одной окружности. Дуги BA и AB_1 равны в силу симметрии, поэтому $\angle BKA = \angle AKB_1$. Таким образом, луч KA является биссектрисой угла BKB_1 , что и требовалось доказать.

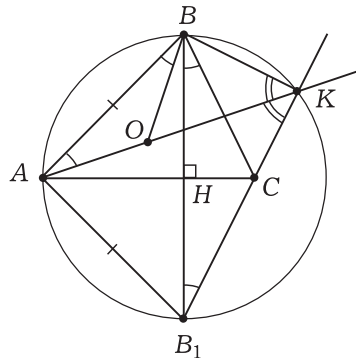


Рис. 6

Задача 2. Точка M – середина стороны BC треугольника ABC . Окружность ω проходит через точку A , касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Точки X и Y – середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXU касается окружности ω .

Решение. Заметим, что MX и MY – средние линии треугольников BCE и BCD (см. рис. 7). Поэтому $\angle XMB = \angle C$ и $\angle CMY = \angle B$. Тогда $\angle XMY = 180^\circ - \angle XMB - \angle CMY = \angle A$. По свойству касательной и секущей к окружности $BM^2 = BD \cdot BA$, поэтому

$$MY = \frac{BD}{2} = \frac{BM^2}{2AB}.$$

Аналогично получаем

$$MX = \frac{CM^2}{2AC}.$$

Учитывая, что $BM = CM$, находим

$$\frac{MY}{MX} = \frac{BM^2}{CM^2} \cdot \frac{2AC}{2AB} = \frac{AC}{AB}.$$

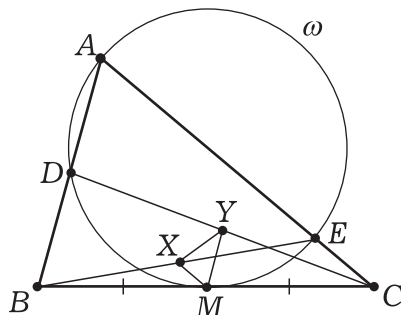


Рис. 7

Следовательно, треугольники ABC и MXU подобны по углу и отношению прилежащих сторон. Тогда $\angle XYU = \angle ACB = \angle XMB$. Поэтому в описанной окружности треугольника MXU угол, опирающийся на хорду XU , равен углу между хордой XU и прямой BC . Следовательно, прямая BC касается окружности (см. следствие), описанной около треугольника MXU . Таким образом, описанная окружность треугольника MXU касается окружности ω .

Литература и интернет-источники

- [1] М.А. Волчкевич. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. – 4-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2021. – 208 с.
- [2] Р.К. Гордин. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 10-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2020. – 416 с.
- [3] Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.
- [4] Официальный сайт Московской математической олимпиады:
<http://olympiads.mccme.ru/mmo/>

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Мудрые мысли

Математика учит точности мысли, подчинению логике доказательства, понятию строго обоснованной истины, а всё это формирует личность, пожалуй, больше, чем музыка.

Окружающий нас мир — это мир геометрии.

А.Д. Александров
советский и российский математик и физик