Проверь себя

(Ответы и решения к задачам, опубликованным в журнале №6, стр. 31)

1. Ответ: -9.

Квадратный трехчлен

$$y(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

определен на всей оси, достигает максимума при $a<0$ (ветви параболы направлены вниз) и $x=x_в=-\frac{b}{2a}$.

Итак, имеем:

$$y(1)=3 \Rightarrow a+b+c=3;$$
$$y(-1)=0 \Rightarrow a-b+c=0;$$
$$x_в=1 \Rightarrow b=-2a.$$

Находим: $a=-\frac{3}{4}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{9}{4}$,

$$y(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}, \quad y(5)=-9.$$

Другое решение.

$y(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена,

$$x_1=-1 \quad y=a(x+1)(x-x_2);$$
$$y(1)=a\cdot 2(1-x_2)=3.$$

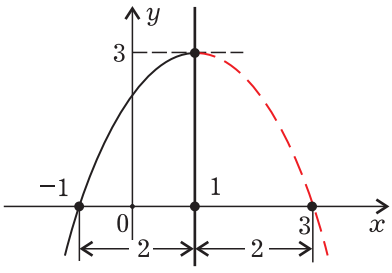


Рис. 1

Прямая $x=1$ – ось симметрии параболы $\left(x=x_в=-\frac{b}{2a}\right)$, следовательно корень x_2 симметричен точке $x_1=-1$ относительно точки $x=1$. Значит, $x_2=3$. Получает $3=2a(1-3)$,

$$a=-\frac{3}{4}, \quad y(x)=-\frac{3}{4}(x+1)(x-3); \quad y(5)=-9.$$

2. Ответ: 9.

Даны две параллельные прямые

$$l_1: \quad 5x-12y+26=0,$$
$$l_2: \quad 5x-12y-13=0.$$

Построим их на координатной плоскости, найдя точки пересечения прямых с осями (рис. 2). Из точки A прямой l_1 опустим перпендикуляр AH, на прямую l_2. Из $l_1 \parallel l_2$, следует $AH \perp l_1$, т.е. длина отрезка AH равна расстоянию между l_1 и l_2.

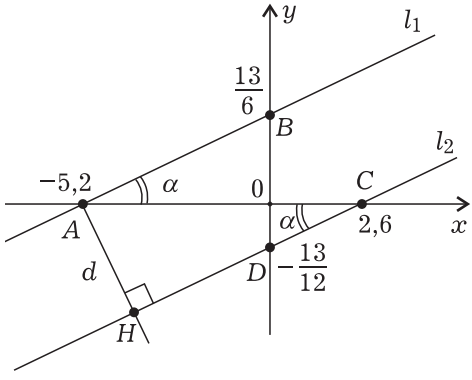


Рис. 2

$\triangle AHC \backsim \triangle DOC \Rightarrow \frac{AH}{DO}=\frac{AC}{DC}$; находим

$AC=7{,}8$, $DC=\sqrt{OD^2+OC^2}=\frac{13^2}{12\cdot 5}$ и

$AH=\frac{13}{12}\cdot\frac{39/5}{13^2/12\cdot 5}=3$. Сторона квадрата равна 3, площадь квадрата равна 9.

Расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от любой точки прямой l_1 до прямой l_2.

Используя свойства скалярного произведения векторов доказывают, что для прямой $Ax+By+C=0$ вектор с координатами $(A;B)$ перпендикулярен ей и расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ выражается формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. Ответ: $[4;\ 10-\sqrt{20}]$.

$$|x-5|+\sqrt{2x+1}\le 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-5\ge 0,\\ \sqrt{2x+1}\le 9-x,\end{cases}\\ \begin{cases}x-5<0,\\ \sqrt{2x+1}\le x-1.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}5\le x\le 9,\\ x^2-20x+80\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<5,\\ x^2-4x\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5\le x\le 10-\sqrt{20},\\ 4\le x<5,\end{array}\right. \Leftrightarrow 4\le x\le 10-\sqrt{20}.$$

4. Ответ: $S=6$, $\angle BAC=15^\circ$.

1. $ABDE$ – квадрат со стороной AB, O – точка пересечения его диагоналей $AO=BO$, $OM\perp AB\Rightarrow AM=BM=\frac{AB}{2}$ (рис. 3). Имеем: $OM=MA=MC=\frac{AB}{2}$. Обозначим $\frac{AB}{2}=m$, $\angle COM=\varphi$, $\angle BAC=\alpha$.

2. $\triangle CMO$ – равнобедренный, $\angle OCM=\angle COM=\varphi$.

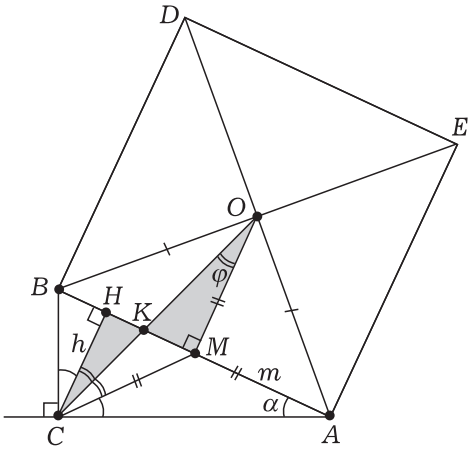


Рис. 3

$\triangle CHK\sim\triangle OMK$ (острые углы при вершине K равны как вертикальные), $\angle KCH=\angle KOM$, т.е. $\angle KCH=\angle COM=\varphi\Rightarrow\angle KCH=\angle KCM=\varphi$.

3. Значит CK – биссектриса прямоугольного треугольника HCM, по свойству биссектрисы $\frac{HK}{KM}=\frac{CH}{CM}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\frac{h}{m}=\frac{1}{2}$, $h=\frac{m}{2}$. По теореме Пифагора $CM^2-CH^2=HM^2\Leftrightarrow m^2-\frac{m^2}{\varphi}=9$, откуда $m=2\sqrt{3}$ и $h=\sqrt{3}$. Площадь треугольника ABC равна $S=mh=6$.

4. В прямоугольном треугольнике HCM катет h в два раза меньше гипотенузы m, поэтому $\angle HMC=30^\circ$.

Угол HMC – внешний для равнобедренного треугольника CMA ($CM=MA=m$), $\angle HMC=2\alpha\Rightarrow\alpha=15^\circ$.

(Заметим, что из $\angle BAC=\angle BCH=$ $=\angle MCA=\alpha$ следует, что отрезок CK – биссектриса прямоугольного треугольника ABC, $\angle BCK=\angle ACK$, то есть биссектриса CK прямого угла C в треугольнике ABC делит пополам угол между высотой CH и медианой CM).

5. Ответ: $\min f(x)=1,\ \max f(x)=8.$

Рассмотрим $g(x)=\sin^8 x+\cos^8 x=$

$=\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)^2+2\sin^4 x\cdot\cos^4 x=$

$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)^2+$

$+\frac{1}{8}(2\sin x\cdot\cos x)^4=\cos^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x=$

$=\frac{1}{8}\sin^4 2x+1-\sin^2 2x=$

$=\frac{1}{8}\left(\sin^2 2x-4\right)^2-1.$

Оценка: $0\le\sin^2 2x\le 1\Rightarrow$

$\Rightarrow 3\le 4-\sin^2 2x\le 4\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{9}{8}\le\frac{1}{8}\left(4-\sin^2 2x\right)^2\le 2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{8}\le\frac{1}{8}\left(4-\sin^2 2x\right)^2-1\le 1,$ т.е.,

$\frac{1}{8}\le g(x)\le 1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{g(x)},\ 1\le f(x)\le 8.$

6. Ответ: 62 нуля.

$n!$ называется n факториал.

$250!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 250$ – это произведение 250 первых натуральных чисел. Среди них на 5 делится каждое 5-е число, таких чисел 50; на 25 делится 10 чисел – еще 10 пятерок; на 125 делятся 2 числа, еще 2 пятерки. Итого в числе 250! есть 50+10+2=62 пятерки. Двоек гораздо больше, только четных чисел имеется 125. Значит 250! оканчивается на 62 нуля.

7. Ответ: $\left\{\left(-\frac{5}{4}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\right\},$

$n=0,\pm1,\pm2\ldots$

$\cos x>\sin x\Leftrightarrow\cos x-\sin x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0.$ На промежутке $[-\pi;\pi]$ длиной 2π $\cos t>0$ при $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},$ тогда $-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2},$ $-\frac{5\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}.$ Учитывая 2π – периодичность функции $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ получаем $x\in\left(-\frac{5}{4}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$ при любом $n=0,\pm1,\pm2\ldots$ (Заметим, что деление на $\cos x$ и приведение к простому неравенству $tgx<1$, – грубая ошибка).

Наглядное решение: график функции $y=\cos x$ лежит выше графика функции $y=\sin x$ (рис. 4).

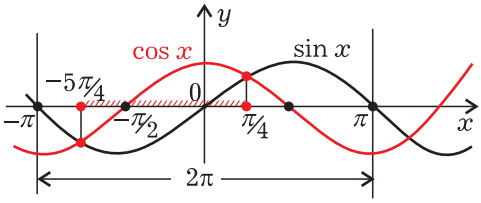


Рис. 4

8. Ответ: 30°, 30°, 150°, 150°.

Пусть O – центр окружности, K – точка касания окружностью основания AD, M и N – середины диагоналей BD и AC (рис. 5). И пусть $BC=2R$, тогда $OK=R$, OK – высота трапеции. Через точку M проведем $EF\perp AD$, $EF=OK=R.$

1. Прямоугольные треугольники BMF и DME, равные по гипотенузе $(BM=DM)$ и острому углу, откуда $MF=ME=\frac{R}{2}.$

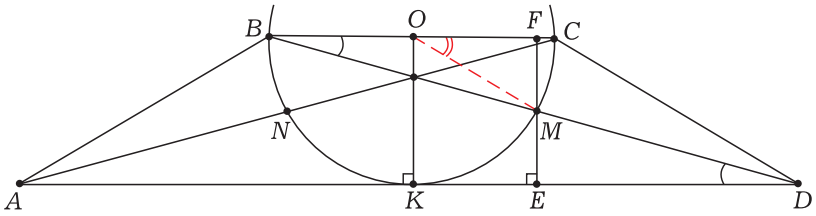


Рис. 5

2. В треугольнике OMF гипотенуза $OM=R$, катет $MF=\frac{R}{2}$, следовательно, $\angle FOM=30°$, а смежный угол BOM равен $150°$.

3. В треугольнике BCD точка O – середина стороны BC, точка M – середина стороны BD, отрезок OM – средняя линия.

По теореме $OM \| CD \Rightarrow \angle BOM = \angle BCD$, тогда $\angle BCD=150°$ и $\angle ADC=30°$.

Рассматривая точку N – середину диагонали AC, аналогично получим $\angle CBA=150°$, $\angle BAD=30°$. Трапеция равнобокая.

9. Ответ: $\frac{1}{3}$ часть.

Через каждое ребро треугольной пирамиды $ABCD$ проведена плоскость, параллельная противолежащему ребру. Три пары параллельных плоскостей образуют в пересечении параллелепипед $AKBLMCND$, в котором рёбра пирамиды являются диагоналями граней (рис. 6). За основание параллелепипеда примем грань с диагональю AB, его площадь обозначим S, тогда объем параллелепипеда $U=S\cdot h$, где h – расстояние между плоскостью основания и параллельной ей грани. Объем параллелепипеда равен сумме объема пирамиды $ABCD$ и объема 4-х пирамид, в каждой из которых площадь основания составляет половину площади S параллелограмма $AKBL$ и высота совпадает с высотой h параллелепипеда (их вершины K, L, M, N). Итак,

$$U=V_{ABCD}+4\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot h\right)=V_{ABCD}+\frac{2}{3}U,$$

откуда $V_{ABCD}=\frac{1}{3}U$.

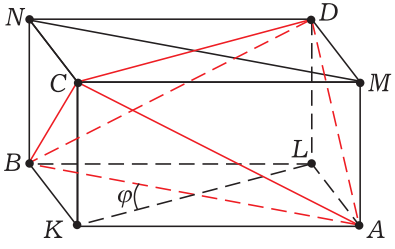


Рис. 6

Так как $U=S\cdot h=\left(\frac{1}{2}AB\cdot KL\cdot\sin\varphi\right)h$ и $KL=CD$, то $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot\sin\varphi\cdot h$, где φ – угол между прямыми AB и CD, а h – расстояние между этими прямыми.

Эта формула особенно удобна в тех случаях, когда противолежащие ребра AB и CD треугольной пирамиды перпендикулярны друг другу.

Приведенное построение параллелепипеда даёт простое решение олимпиадной задачи: Существует ли треугольная пирамида, у которой в одной паре противолежащие ребра имеют длину 3, в другой паре – длину 4, а в третьей паре – длину 5.

Статью подготовила Т.С. Пиголкина