

Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал», автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ», лауреат премии Правительства РФ 2020 г. в области образования



Методы рационализации
Часть четвёртая.
Некоторые типы неравенств, содержащие иррациональные функции и модули. Умножение на сопряжённое выражение

1. Умножение на сопряжённое выражение

Заметим, что

a) $|f(x)|+|g(x)|\geq 0$;

b) если $g(x)\geq 0$, то $|f(x)|+g(x)\geq 0$,

c) $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\geq 0$ в ОДЗ; (1)

d) если $g(x)\geq 0$, то $\sqrt{f(x)}+g(x)\geq 0$ в ОДЗ.

Причём, что важно (проверьте!), если любое из этих выражений обращается в 0, то в 0 обращается и соответствующая разность.

Поэтому, если любую из разностей

1) $|f(x)|-|g(x)|$;

2) $|f(x)|-g(x),\ g(x)\geq 0$; (2)

3) $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ в ОДЗ;

4) $\sqrt{f(x)}-g(x),\ g(x)\geq 0$ в ОДЗ

умножить на соответствующую сумму, то знаки разностей сохранятся.

Например:

1. $|f(x)|-|g(x)|\geq 0\Leftrightarrow\left(|f(x)|-|g(x)|\right)\left(|f(x)|+|g(x)|\right)\geq 0\Leftrightarrow$
$f^2(x)-g^2(x)\geq 0\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)\geq 0$

2. $|f(x)|-g(x)\ge 0 \overset{g\ge 0}{\Leftrightarrow} \big(|f(x)|-g(x)\big)\big(|f(x)|+g(x)\big)\ge 0 \Leftrightarrow$
$f^2(x)-g^2(x)\ge 0 \Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)\ge 0$

3. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \Big(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\Big)\Big(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\Big)\ge 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$
$f(x)-g(x)\ge 0$

4. $\sqrt{f(x)}-g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \Big(\sqrt{f(x)}-g(x)\Big)\Big(\sqrt{f(x)}+g(x)\Big)\ge 0 \overset{f\ge 0, g\ge 0}{\Leftrightarrow}$
$f(x)-g^2(x)\ge 0$

Заметим, что при этом *исчезают* модули и корни.

Соответствующие суммы называются *сопряжёнными* выражениями.

Заметим, что если изменить знаки исходных неравенств на противоположные, то изменятся знаки на противоположные во всех неравенствах.

А тогда очевидно, что мы получили Правила П М1 и П М2, П К1 и П К2.

П М1. Знак разности модулей $|f(x)|-|g(x)|$ совпадает со знаком произведения $\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)$, $|f(x)|-|g(x)|$ и $\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ обращаются в 0 одновременно, или, в современных обозначениях,

$$\text{П М1}\quad |f(x)|-|g(x)|\vee 0 \Leftrightarrow \big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

П М2. Если $g(x)\ge 0$, то знак разности $|f(x)|-g(x)$ совпадает со знаком произведения $\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)$, $|f(x)|-g(x)$ и $\big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ обращаются в 0 одновременно, или, в современных обозначениях,

$$\text{П М2}\quad |f(x)|-g(x)\vee 0 \overset{g\ge 0}{\Leftrightarrow} \big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

П К1. Знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$ в ОДЗ, $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ и $f(x)-g(x)$ обращаются в 0 одновременно, или, в современных обозначениях,

$$\text{П К1}\quad \sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)\vee 0$$

П К2. Если $g(x)\ge 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)}-g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g^2(x)$ в ОДЗ, $\sqrt{f(x)}-g(x)$ и $f(x)-g^2(x)$ обращаются в 0 одновременно, или, в современных обозначениях,

$$\text{П К2}\quad \sqrt{f(x)}-g(x)\vee 0 \overset{f\geq 0,\ g\geq 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g^2(x)\vee 0$$

Что замечательно?

При решении неравенств вовсе не обязательно помнить полученные Правила – надо неравенство *просто умножить* на соответствующее *сопряжённое* выражение.

Рассмотрим отдельно чаще всего встречающиеся неравенства, где умножение на сопряжённые выражения заметно упрощает решения.

2. Неравенства с модулем

Неравенство вида $\dfrac{|f(x)|-|g(x)|}{h(x)}\vee 0$

Покажем, что

$$\frac{|f(x)|-|g(x)|}{h(x)}\vee 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{h(x)}\vee 0 \qquad (3)$$

Первый способ (с применением правил П М1)

Так как, в силу правила П М1, знак разности модулей $|f(x)|-|g(x)|$ совпадает со знаком произведения $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x))$, то

$$\frac{|f(x)|-|g(x)|}{h(x)}\vee 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{h(x)}\vee 0.$$

Замечательно, что мы избавились от модулей, не раскрывая их!

Второй способ (умножение на сопряжённое выражение)

Но ещё замечательнее, на взгляд автора, то, что не надо для решения таких примеров запоминать Правило П М1 или П М2 – надо просто *умножить* числитель (или знаменатель, если там стоит разность модулей) на сопряжённое выражение, а затем, не вычисляя квадратов, воспользоваться формулой для разности квадратов:

$$\frac{|f(x)|-|g(x)|}{h(x)}\vee 0 \Leftrightarrow \frac{(|f(x)|-|g(x)|)(|f(x)|+|g(x)|)}{h(x)}\vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|f(x)|^2-|g(x)|^2}{h(x)}\vee 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{h(x)}\vee 0.$$

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{(|x-5|-1)(|x+12|-4)}{(|x-2|-|x+5|)(|x^2-1|-|x^2-4|)} \geq 0.$

► Воспользуемся дважды П П2 для числителя и дважды П П1 для знаменателя:

$$\frac{(|x-5|-1)(|x+12|-4)}{(|x-2|-|x+5|)(|x^2-1|-|x^2-4|)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-6)(x+16)(x+8)}{(2x+3)(2x^2-5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-16] \cup \left[-8;-\sqrt{2,5}\right) \cup \left(-1,5;\sqrt{2,5}\right) \cup [4;6].$$

Ответ. $x \in (-\infty;-16] \cup \left[-8;-\sqrt{2,5}\right) \cup \left(-1,5;\sqrt{2,5}\right) \cup [4;6].$ ◄

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{|x^2-1|-|x^2+4x-5|}{\left(|x^2-4x-6|-|3x^2+x-1|\right)(x-3)(x+1)} \leq 0.$$

► Воспользуемся дважды П М1. Можно (правда, здесь придётся писать больше) умножить числитель и знаменатель на соответствующие сопряжённые выражения и заменить получившиеся разности квадратов произведениями суммы на разность:

$$\frac{|x^2-1|-|x^2+4x-5|}{\left(|x^2-4x-6|-|3x^2+x-1|\right)(x-3)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-1+x^2+4x-5\right)\left(x^2-1-x^2-4x+5\right)}{\left(x^2-4x-6+3x^2+x-1\right)\left(x^2-4x-6-3x^2-x+1\right)(x-3)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-1)^2}{\left(x-\frac{7}{4}\right)(x-3)(x+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup \{1\} \cup \left(\frac{7}{3};3\right).$$

Ответ. $(-\infty;-3) \cup \{1\} \cup \left(\dfrac{7}{4};3\right).$ ◄

Пример 3. Решите неравенство $\dfrac{|x-3|-|x-2|}{|x+1|+x+1} \geq 0.$

Заметим, что $|x+1|+x+1 = \begin{cases} 0, \text{ если } x+1 \leq 0, \\ 2x+2>0, \text{ если } x+1>0. \end{cases}$

Поэтому $\dfrac{|x-3|-|x-2|}{|x+1|+x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ (x-3-(x-2))(x-3+(x-2)) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x \leq 2,5.$

Ответ. $(-1;2,5].$

Неравенство вида $\frac{|f(x)|-g(x)}{h(x)}\vee 0.$

Рассмотрим неравенство *вида* $\frac{|f(x)|-g(x)}{h(x)}\vee 0.$ (4)

Неравенство, конечно, можно решать, раскрывая модуль $|f(x)|$.

Полезно заметить, что если разность $|f(x)|-g(x)$ входит в виде множителя в некоторое неравенство $\frac{|f(x)|-g(x)}{h(x)}\geq 0,$ а знак функции $f(x)$ определять трудно, то его можно исследовать, обратив внимание на знак функции $g(x)$.

Покажем, что

$$\frac{|f(x)|-g(x)}{h(x)}\geq 0(\leq 0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ h(x)>0(<0);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \dfrac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{h(x)}\geq 0(\leq 0).\end{cases}\end{array}\right. \quad (5)$$

Первый способ (с применением правил П М2)

Действительно,

1) если $g(x)<0,$ то разность $|f(x)|-g(x)$ положительна, и ее можно опустить;

2) если $g(x)\geq 0,$ то, в силу Правила П М2, знак разности $|f(x)|-g(x)$ совпадает со знаком произведения $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)).$

Примечание. Если знак функции $f(x)$ определяется легко, а знак $g(x)$ трудно, то можно поступить стандартно – раскрыть модуль $f(x)$.

Второй способ (умножение на сопряжённое выражение)

Не всегда вспоминается вовремя Правило П М2. Тогда, если $g(x)\geq 0,$ надо просто *умножить* неравенство на *неотрицательное* сопряжённое выражение $|f(x)|+g(x)$:

$$\frac{|f(x)|-g(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ h(x)>0(<0);\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \dfrac{(|f(x)|-g(x))(|f(x)|+g(x))}{h(x)}\geq 0(\leq 0)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\h(x)>0(<0);\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\geq 0,\\\dfrac{\left(f^2(x)-g^2(x)\right)}{h(x)}\geq 0(\leq 0)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\h(x)>0(<0);\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\geq 0,\\\dfrac{(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))}{h(x)}\geq 0(\leq 0).\end{cases}\end{array}\right. \quad (6)$$

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{\left|3x^2-13x+3\right|-(x-4)}{x^2-7x+6}\leq 0.$

►Воспользуемся (6):

$$\frac{\left|3x^2-13x+3\right|-(x-4)}{x^2-7x+6}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-4<0,\\(x-1)(x-6)<0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;4),\\\begin{cases}x-4\geq 0,\\\dfrac{\left(3x^2-13x+3-(x-4)\right)\left(3x^2-13x+3+(x-4)\right)}{(x-1)(x-6)}\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<4,\\\begin{cases}x\geq 4,\\\dfrac{\left(x-\frac{7-2\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{6-\sqrt{39}}{3}\right)\left(x-\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right)}{(x-1)(x-6)}\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left(\text{т. к. } \frac{7-2\sqrt{7}}{3}<1,\frac{6-\sqrt{39}}{3}<1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<4,\\\begin{cases}x-4\geq 0,\\\dfrac{\left(x-\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right)}{(x-6)}\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<4,,\\\left[4;\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right]\cup\left[\frac{7+2\sqrt{7}}{3};6\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right]\cup\left[\frac{7+2\sqrt{7}}{3};6\right).$$

Неравенство $\dfrac{\left(x-\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right)}{(x-6)}\leq 0$ решалось методом интервалов – рис. 1

Корни «плохие» – пришлось провести сравнения:

$$\frac{7+2\sqrt{7}}{3}\vee 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{7}\vee 5 \Leftrightarrow 28>25 \Rightarrow \frac{7+2\sqrt{7}}{3}>4$$

$$\frac{6+\sqrt{39}}{3}\vee\frac{7+2\sqrt{7}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{39}\vee 1+2\sqrt{7} \Leftrightarrow 39\vee 29+4\sqrt{7} \Leftrightarrow 5<2\sqrt{7} \Rightarrow \frac{6+\sqrt{39}}{3}<\frac{7+2\sqrt{7}}{3}.$$

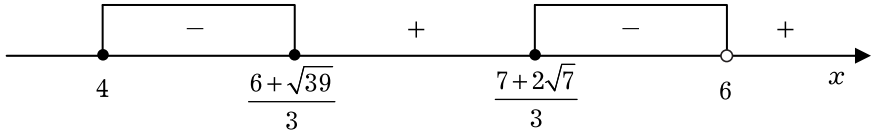

Рис. 1

Ответ. $\left(1;\frac{6+\sqrt{39}}{3}\right]\cup\left[\frac{7+2\sqrt{7}}{3};6\right)$. ◄

Пример 5. Решите неравенство $\frac{\left|3x^2-4x-1\right|+x^2-3}{x^2+x-2}\le 1.$

и найдите наименьшую длину промежутка, который содержит все его решения.

►Приведем неравенство к стандартному виду и воспользуемся (6):

$$\frac{\left|3x^2-4x-1\right|+x^2-3}{x^2+x-2}\le 1 \Leftrightarrow \frac{\left|3x^2-4x-1\right|-1-x}{(x+2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left|3x^2-4x-1\right|-(x+1)}{(x+2)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1<0,\\(x+2)(x-1)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\ge 0,\\ \dfrac{\left(3x^2-4x-1+x+1\right)\left(3x^2-4x-1-x-1\right)}{(x+2)(x-1)}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(-2;-1),\\ \begin{cases}x+1\ge 0,\\ \dfrac{x(x-1)\left(3x^2-5x-2\right)}{(x-1)}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(-2;-1),\\ \begin{cases}x+1\ge 0,\\ \dfrac{x(x-1)(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x-1)}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-2;-\frac{1}{3}\right]\cup[0;1)\cup(1;2].$$

Наименьшая длина промежутка, который содержит все решения неравенства, равна 4. **Ответ.** $x\in\left(-2;-\frac{1}{3}\right]\cup[0;1)\cup(1;2]$, 4. ◄

3. Иррациональные неравенства

Обычно неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\vee 0$ решают, приводя их к совокупности двух систем, каждая из которых содержит корни. Мы будем сводить такие неравенства к одному неравенству, а некоторые другие к совокупности систем, но ни одно из неравенств не будет содержать корни.

Неравенства вида $\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\vee 0.$

Рассмотрим неравенство $\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\vee 0.$

Первый способ (с применением правила П К1)

Так как неравенство содержит два квадратных корня, то можно сначала найти ОДЗ*: $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Согласно Правилу К1, знак разности $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x)-g(x)$, $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$ и $f(x)-g(x)$ обращаются в 0 одновременно в ОДЗ.

Тогда

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}\vee 0 \qquad (7)$$

Второй способ (умножение на сопряжённое выражение)

Так как неравенство содержит два квадратных корня, то можно сначала найти ОДЗ*: $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

Теперь умножение в ОДЗ* числителя *на сопряжённое* выражение уберёт корни, но не изменит знака неравенства и не добавит новых корней. Поэтому

$$\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{h(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)}{h(x)}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)}\ge 0.$$

На взгляд автора, метод умножения *на сопряжённое* выражение в неравенствах приведённого типа более эффективен и легче для запоминания, чем использование Правил.

Пример 6. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}\le 0.$

и найдите наименьшую длину промежутка, которому принадлежат все его решения.

► ОДЗ*: $\begin{cases}4x^2-3x+2\ge 0,\\ 4x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{4}.$

Первый способ (с правилом П К1)

Теперь можно решить неравенство, применив правило П К1 (решают те, кто помнит правило П К1):

$$\frac{\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}\le 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{4x^2-3x+2-4x+3}{x^2-5x+6}\le 0\Leftrightarrow \frac{4x^2-7x+5}{x^2-5x+6}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)(x-3)}\le 0\Leftrightarrow x\in(2;3)\subset ОДЗ.$$

Значит, длина промежутка равна 1. **Ответ.** $(2;3)$, 1.

Второй способ (умножение на сопряжённое)

Умножим числитель на сопряжённое выражение (решают те, кто не помнит или даже не знает правило П К1):

$$\frac{\sqrt{x(4x-3)+2}-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}\le 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(x-2)(x-3)}\le 0\Leftrightarrow x\in(2;3)\subset ОДЗ$$

Ответ. $(2;3)$, 1.

Третий способ

Можно решить и совсем просто, если заметить, что числитель

$$\sqrt{4x^2-3x+2}-\sqrt{4x-3}=\sqrt{(4x-3)x+2}-\sqrt{4x-3}>0.\ ◄$$

Неравенства вида $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\vee 0.$

Рассмотрим неравенство $\dfrac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\ge 0\,(\le 0).$

Первый способ (с правилом П К2)

Так как неравенство содержит квадратный корень, то можно сначала найти ОДЗ*: $f(x)\ge 0.$

Теперь очевидно, что,

а) если $g(x)<0,$ то числитель положителен, и неравенство в ОДЗ будет выполнено, если $h(x)>0\,(<0).$

б) если $g(x)\geq 0,$ то можно воспользоваться Правилом К2*:*

$ПК2:\sqrt{f(x)}-g(x)\vee 0 \overset{f\geq 0,g\geq 0}{\Leftrightarrow} f(x)-g^2(x)\vee 0,$ *т. е.,*

если $g(x)\geq 0,$ то знак разности $\sqrt{f(x)}-g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x)-g^2(x)$ в ОДЗ.

Тогда

$$\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0) \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ h(x)>0\,(<0),\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0).\end{cases}\end{array}\right. \qquad (8)$$

Второй способ (умножение на сопряжённое)

Так как неравенство содержит квадратный корень, то можно сначала найти ОДЗ*: $f(x)\geq 0.$

Теперь очевидно, что,

а) если $g(x)<0,$ то числитель положителен, и неравенство в ОДЗ будет выполнено, если $h(x)>0\,(<0).$

б) если $g(x)\geq 0,$ то умножение числителя *на сопряжённое* выражение уберёт корень, но не изменит знака неравенства и не добавит новых корней. Поэтому

$$\frac{\sqrt{f(x)}-g(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ h(x)>0\,(<0),\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \dfrac{\left(\sqrt{f(x)}-g(x)\right)\left(\sqrt{f(x)}+g(x)\right)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0)\end{cases}\end{array}\right. \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\ h(x)>0\,(<0),\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \dfrac{f(x)-g^2(x)}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0).\end{cases}\end{array}\right. \qquad (8)$$

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{\left(|x-3|-x-13\right)\left(\sqrt{x+6}-2x+3\right)}{(x-4)(x+4)}\le 0.$

► Найдём ОДЗ*: $x+6\ge 0\Rightarrow x+13>0.$

Неравенство удобно переписать в другом виде, а затем применить П М2:

$$\frac{\left(|x-3|-x-13\right)\left(\sqrt{x+6}-2x+3\right)}{(x-4)(x+4)}\le 0\Leftrightarrow \frac{\left(|x-3|-(x+13)\right)\left(\sqrt{x+6}-(2x-3)\right)}{(x-4)(x+4)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+5)\left(\sqrt{x+6}-(2x-3)\right)}{(x-4)(x+4)}\ge 0.$$

Получилось громоздкое неравенство. Решим его, рассмотрев два случая отдельно.

Тогда

1. $2x-3<0\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+6}-(2x-3)>0,\\ x<4\end{cases}\Rightarrow \frac{(x+5)\left(\sqrt{x+6}-(2x-3)\right)}{(x-4)(x+4)}\ge 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x+5}{x+4}\le 0 \overset{2x-3<0}{\Leftrightarrow} x\in[-5;-4)\subset ОДЗ^*$

2. $2x-3\ge 0\Rightarrow \frac{(x+5)\left(\sqrt{x+6}-(2x-3)\right)}{(x-4)(x+4)}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(x+5)\left(4x^2-13x+3\right)}{(x-4)(x+4)}\le 0 \overset{x\ge 1,5}{\Leftrightarrow}$

$\overset{x\ge 1,5}{\Leftrightarrow} \frac{(x-3)}{(x-4)}\le 0\Leftrightarrow x\in[3;4)\subset ОДЗ^*$

Объединяя 1 и 2, получаем, что $x\in[-5;-4)\cup[3;4).$

Ответ. $[-5;-4)\cup[3;4)$.◄

Пример 8. Решите неравенство $\dfrac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$

► ОДЗ*: $x^2-3x\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty).$

Приведём к общему знаменателю сначала:

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\le\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+3}}\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2-3x}\right)-2}{4-\left(x^2-3x\right)}\le 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \text{(воспользуемся П М2)}$$

$$\frac{\left((2x-5)x+2\sqrt{\left(x^2-2x+4\right)(x-3)x}\right)}{(x+1)(x-4)}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(\text{т.к. } (2x-5)x\ge 0 \text{ в } ОДЗ^*\right)\left[\begin{array}{l}x=0,\\ (x+1)(x-4)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(4;+\infty).$$

Учитывая ОДЗ*, получаем **Ответ.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(4;+\infty)$ ◄

Пример 9. Решите неравенство $\dfrac{\left(\sqrt{4-x}-(x+2)\right)\left(\sqrt{9-4x}-(x+3)\right)}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}}\le 0.$

► *Первый способ* (умножение на сопряжённые выражения)

В неравенстве много корней.

Начнем с ОДЗ: $\begin{cases}4-x\ge 0,\\ 9-4x\ge 0,\\ (x+1)(x-2)(x-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1;2).$

Теперь посмотрим на числитель и знаменатель внимательней: видно, что вычитаемые «скобки» в числителе положительны в ОДЗ, и поэтому можно умножить их на положительные сопряженные выражения (или дважды применить правило П К2). Тогда

$$\frac{\left(\sqrt{4-x}-(x+2)\right)\left(\sqrt{9-4x}-(x+3)\right)}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}}\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{4-x}-(x+2)\right)\left(\sqrt{9-4x}-(x+3)\right)\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(4-x-x^2-4x-4\right)\left(9-4x-x^2-6x-9\right)\le 0 \Leftrightarrow x^2(x+5)(x+10)\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} x^2\le 0\Leftrightarrow x=0$$

Ответ. 0.

Вот такое громоздкое на вид неравенство, а так быстро решилось и оказалось выполненным всего в одной точке!

Второй способ (использование монотонности – тема следующей части)

$y_1(x)=\sqrt{4-x}-(x+2)$ – монотонно убывает и $y_1(0)=0\Rightarrow y_1(x)-y_1(0)\vee 0\Leftrightarrow 0-x\vee 0,$

$y_2(x)=\sqrt{9-4x}-x-3$ – монотонно убывает и $y_2(0)=0\Rightarrow y_2(x)-y_2(0)\vee 0\Leftrightarrow 0-x\vee 0.$

Поэтому

$$\frac{\left(\sqrt{4-x}-(x+2)\right)\left(\sqrt{9-4x}-(x+3)\right)}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{(x+1)(x-2)(x-3)}}\le 0\Leftrightarrow x=0$$

Ответ. 0.◄

Пример 10. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+7}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\ge 1.$

►На вид неравенство выглядит довольно «грозно»: и корни, и модули. Начнем с простого.

Найдем ОДЗ*: $\begin{cases}x+7\ge 0,\\ 8-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-7;8].$

Приведем к общему знаменателю и тогда уже посмотрим, что дальше делать: $\dfrac{\sqrt{x+7}-|2x-1|}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{8-x}}{\sqrt{8-x}-|2x-1|}\ge 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$ (теперь самое время вспомнить

про сопряженные выражения $\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8-x}\right)$ для числителя и $\left(\sqrt{8-x}+|2x-1|\right)$ для знаменателя, или, что то же, правила П К1 и П К2):

$$\frac{(x+7)-(8-x)}{(8-x)-(2x-1)^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{7}{4}\right)(x+1)}\leq 0 \overset{\text{с учётом ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x\in[-7;-1)\cup\left[\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right).$$

Неравенство «само» решилось. Красиво! ◄

Пример 11. Решите неравенство

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leq 9\sqrt{x+4}.$$

► «Уберём» знаменатели (они положительны):

$$5\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}}+4\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}}\leq 9\sqrt{x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}>0,\\ 5\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}\right)+4\sqrt{x+4}-4\sqrt{x+3}\leq 9\sqrt{x+4}.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}>0,\\ \sqrt{x+3}\leq 0.\end{cases} \Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ. -3.◄

Пример 12. Решите неравенство $\dfrac{26-3x+\sqrt{x^2-2x-24}}{x-10}<-1.$

► Найдём ОДЗ*. $x^2-2x-24\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4]\cup[6;+\infty)$.

Перепишем неравенство

$$\frac{26-3x+\sqrt{x^2-2x-24}}{x-10}<-1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-2x-24}-2(x-8)}{x-10}<0.$$

Обычно в школе начинают решать такое неравенство с рассмотрения знаменателя: $x-10>0$ или $x-10<0$. Мы поступим по-другому.

1. Если $x-8<0$, то числитель положителен в ОДЗ, а знаменатель отрицательный, и неравенство верно, т.е. $x\in(-\infty;-4]\cup[6;8)$.

2. Если $x-8\geq 0$, то умножим числитель на сопряжённое положительное выражение $\sqrt{x^2-2x-24}-2(x-8)$ (или, что то же, воспользуемся П К2 для числителя):

$$\frac{\sqrt{x^2-2x-24}-2(x-8)}{x-10}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-24-4(x-8)^2}{x-10}=$$

$$=\frac{3\left(x-\frac{20}{3}\right)(x-14)}{x-10}<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{20}{3};10\right)\cup(14;+\infty).$$

Учитывая ОДЗ* и условие $x \geq 8$, получаем результат $x \in [8;10) \cup (14;+\infty)$.

Суммируя результаты 1. и 2. , получаем

Ответ. $(-\infty;-4] \cup [6;10) \cup (14;+\infty)$. ◄

Пример 13. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6} \geq 2x-10.$

► Найдем сначала ОДЗ*:

$$x^3-11x^2+30x = x(x-6)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0;5] \cup [6;+\infty).$$

Приведём дробь к общему знаменателю, а затем преобразуем числитель в ОДЗ*:

$$\frac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6} \geq 2x-10 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x(x-5)(x-6)}-2(x-5)(x-6)}{x-6} \geq 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{2}\sqrt{(x-5)(x-6)} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2(x-5)(x-6)}}{x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2(x-5)(x-6)}}{x-6} \geq 0 \end{array}\right. \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow}$$

(воспользуемся правилом П К1)

$$\left[\begin{array}{l} x=5, \\ \dfrac{x-2(x-5)(x-6)}{x-6} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ \dfrac{2(x-4)\left(x-\dfrac{15}{2}\right)}{x-6} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;4] \cup \{5\} \cup \left(6;\frac{15}{2}\right].$$

Учтем ОДЗ* и получим $x \in [0;4] \cup \{5\} \cup (6;7,5]$. **Ответ.** $[0;4] \cup \{5\} \cup (6;7,5]$. ◄

Пример 14. Решите неравенство $\dfrac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geq 0.$

►Воспользуемся П М2 и П К2:

$$\frac{|x-4|-\sqrt{x-2}}{4\sqrt{10-x}+x-13} \geq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2 \geq 0, \\ 10-x \geq 0 \Rightarrow x < 13, \\ \dfrac{(x-4)^2-x+2}{4^2(10-x)-(13-x)^2} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow [2;3] \cup [6;9].$$

Ответ. $[2;3] \cup [6;9]$. ◄

Пример 15. Решите неравенство $\left(x^2-9x+14\right)\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)\geq 0.$

►Найдём ОДЗ: $\begin{cases} x+6\geq 0, \\ 2x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}.$

Воспользуемся П К2 для второй скобки:

$$\left(x^2-9x+14\right)\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)\geq 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (x-7)(x-2)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\leq 0.$$

Видно, что, если $x<0,$ неравенство выполнено в ОДЗ.

Если $x\geq 0,$ воспользуемся П К2 для четвёртой скобки:

$$(x-7)(x-2)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\leq 0 \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} (x-2)(x-7)(x-3)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$x\in[0;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$$

Учтём ОДЗ и получим, что $x\in\left[-\frac{3}{2};2\right]\cup\{3\}\cup[7;+\infty).$

Ответ. $[-1{,}5;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty).$

Примечание. Можно сразу записать:

$$\left(x^2-9x+14\right)\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-7)(x-2)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3\geq 0, \\ x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \Rightarrow 2x+3>0, \\ (x-7)(x-2)(x-3)\left(2x+3-x^2\right)\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\left[-\frac{3}{2};0\right), \\ x\in[0;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};2\right]\cup\{3\}\cup[7;+\infty).$$

Ответ. $[-1{,}5;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty).$ ◄

Пример 16. Решите неравенство $\dfrac{\left(\left|x^3+x-3\right|-x\right)\left(\sqrt{x+8}-1\right)}{x^2+x-2}\leq 0.$

►Запишем равносильную систему, включив туда ОДЗ:

$$\frac{\left(\left|x^3+x-3\right|-x\right)\left(\sqrt{x+8}-1\right)}{x^2+x-2}\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+8\geq 0, \\ \dfrac{\left(\left|x^3+x-3\right|-x\right)(x+7)}{(x-1)(x+2)}\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -8 \le x < 0, \\ \dfrac{(x+7)}{(x-1)(x+2)} \le 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0 \Rightarrow x+8>0, \\ \dfrac{\left(x^3+x+3+x\right)\left(x^3+x-3-x\right)}{(x-1)} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-8;-7] \cup (-2;0) \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ \dfrac{\left(x^3-3\right)}{(x-1)} \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-8;-7] \cup (-2;0) \cup \left(1;\sqrt[3]{3}\right].$$

Ответ. $[-8;-7] \cup (-2;0) \cup \left(1;\sqrt[3]{3}\right]$. ◄

Продолжение следует.
Часть пятая – Уравнения и неравенства, содержащие монотонные функции

Литература

1. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 6-изд. допущено ФИПИ.
2. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 4-е изд.
3. Колесникова С.И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, ВАКО, 2011
4. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Иррациональные уравнения. Москва, ООО «Азбука»
5. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Иррациональные неравенства. Москва, ООО «Азбука»
6. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Уравнения и неравенства, содержащие модуль. Москва, ООО «Азбука»

Юмор Юмор Юмор Юмор

* * *

Сегодня зашла на страницу старого знакомого, и он там пишет, что «поменял жизнь на 360 градусов». Вот, ребята, почему важно изучать математику в школе!

* * *

Учебник по математике — это единственное место, где у тебя есть 25 арбузов, и вдруг ты съел 12 из них.

* * *

Лотерея — это налог на людей, у которых плохо с математикой.