



Хорошилова Елена Владимировна

*Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ВМК МГУ
им. М. В. Ломоносова*

Разнообразие приёмов и методов решения задач с радикалами (иррациональностями)

В статье рассмотрены разнообразные типы задач по теме «Задачи с иррациональностями» (задачи на упрощение и оценки радикалов, сравнение и свойства иррациональных чисел, на свойства иррациональных функций и проч.).

1. Возведение в квадрат (или другую степень) сравниваемых чисел

Пример 1. Какое из чисел больше: $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

Решение. 1) Приведём рациональное число $8,(24)$, записанное в виде периодической дроби, к виду обыкновенной дроби. Для этого примем это число за x , т. е. $x = 8,(24)$, умножим обе части этого равенства на 100: $100x = 824,(24)$. При вычитании из полученного равенства исходного одинаковые периоды после десятичной запятой сократятся и получаем $99x = 816$, или $x = \frac{816}{99} = \frac{272}{33}$.

2) Тогда имеем задачу сравнения: $\sqrt{17} \vee \frac{136}{33} \Leftrightarrow 33\sqrt{17} \vee 136 = 34 \cdot 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 33^2 \vee 34 \cdot 32 \Leftrightarrow 33^2 \vee (33+1)(33-1) = 33^2 - 1$. Таким образом, $33^2 > 33^2 - 1$.

Ответ: первое число больше.

Пример 2. Сравнить числа: $\sqrt[4]{5}$ и $3 - 2\sqrt[5]{47}$.

Решение. Так как $\sqrt[4]{5} \vee 1 \Leftrightarrow 5 > 1^{47} = 1$, аналогично и для $\sqrt[5]{47}$, то $1 < \sqrt[4]{5} \vee 3 - 2\sqrt[5]{47} < 1 \Rightarrow \sqrt[4]{5} \vee 3 - 2\sqrt[5]{47}$ Ответ: первое число больше.

Пример 3. Сравнить числа:

$$\sqrt{8+\sqrt{40}}+\sqrt{20}+\sqrt{8} \quad \text{и} \quad \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}.$$

Решение

Воспользуемся формулой

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Так как оба числа положительны, то можно сравнить их квадраты:

$$\begin{aligned} & \sqrt{8+\sqrt{20}}+\sqrt{40}+\sqrt{8} \vee \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 8+\sqrt{20}+\sqrt{40}+\sqrt{8} \vee 5+2+\sqrt[3]{9}+2\sqrt{5}\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}\sqrt{2}+2\sqrt{5}\sqrt{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 0 < (\sqrt[3]{9}-1)+2\sqrt{5}(\sqrt[3]{3}-1)+\sqrt{8}(\sqrt[3]{3}-1) \Rightarrow \sqrt{8+\sqrt{20}}+\sqrt{40}+\sqrt{8} < \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: первое число меньше.

Пример 4. Упростить выражение

$$A = \frac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

Решение.

1-й способ. Заметим, что $A > 0$ и возведём его в квадрат:

$$A^2 = \left(\frac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \right)^2 = \frac{(\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}})^2}{(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})^2} = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow A = 3.$$

2-й способ. Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$, после чего под корнями образуются полные квадраты:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \\ &= \frac{\sqrt{(3+\sqrt{7})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}} = \frac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

2. Умножение на сопряжённое

Опр. 1 (сопряжённого выражения). Пусть имеется некоторое выражение K , содержащее радикалы (корни). Сопряженным по отношению к K называется всякое выражение S такое, что их произведение $K \cdot S$ не содержит корней.

Например, если $K = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, то $S = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, так как $K \cdot S = x - y$ не содержит корней. Если $K = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$, то $S = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}$, так как $K \cdot S = x - y$ не

содержит корней. Если $K = \sqrt[3]{x^2 y z^5}$, то $S = \sqrt[3]{x y^2 z}$, так как $K \cdot S = x y z^2$ не содержит корней.

Пример 5. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}.$$

Решение. а) $\frac{1}{\sqrt[4]{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt[4]{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt[4]{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{2})(3 + \sqrt{2})}{7};$

$$\text{б) } \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1} = \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{5} - 1}{4}.$$

Пример 6. Сравнить числа: $\frac{1}{2 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$ и $\frac{8}{17}$.

$$\text{Видно, что } 17 - 12\sqrt{2} = 17 - 2 \cdot (3 \cdot 2\sqrt{2}) = 9 - 2 \cdot 3(2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2})^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2.$$

Итак, $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$. Продолжим сравнение, умножив числитель и знаменатель левой дроби на сопряжённое к знаменателю выражение:

$$\frac{1}{5 - 2\sqrt{2}} \vee \frac{8}{17} \Leftrightarrow \frac{5 + 2\sqrt{2}}{(5 - 2\sqrt{2})(5 + 2\sqrt{2})} \vee \frac{8}{17} \Leftrightarrow \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} \vee \frac{8}{17} \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{2} \vee 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3.$$

Ответ: первое число меньше.

Пример 7. Что больше: $tg \frac{11\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трёхчлена

$$11^2 - 17x - 13?$$

Решение. Упростив табличный тангенс и вычислив меньший корень квадратного трёхчлена, приходим к задаче на сравнение чисел: $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и

$$t_2 = \frac{17 - \sqrt{861}}{22}.$$

1-й способ. Прямое сравнение затруднительно, но возможно:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \vee \frac{17 - \sqrt{861}}{22} \Leftrightarrow -22 \vee 17\sqrt{3} - \sqrt{287 \cdot 3} \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -22 \vee 17\sqrt{3} - 3\sqrt{287} \Leftrightarrow 3\sqrt{287} - 51 \vee 17\sqrt{3} + 22 - 51 \Leftrightarrow$$

$$0 > 3\sqrt{287} - 51 \vee \frac{(17\sqrt{3} - 29)(17\sqrt{3} + 29)}{(17\sqrt{3} + 29)} = \frac{17^2 3 - 29^2}{29 + 17\sqrt{3}} = \frac{867 - 841}{29 + 17\sqrt{3}} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{17 - \sqrt{861}}{22}.$$

2-й способ. Этот способ короче и основан на следующей цепочке (где она) неравенств:

$$\frac{17 - \sqrt{861}}{22} > \frac{17 - \sqrt{867}}{22} = \frac{17 - 17\sqrt{3}}{22} > -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Приведём развёрнутое доказательство последнего из неравенств:

$$3(17 - 17\sqrt{3}) > -22\sqrt{3} \Leftrightarrow 51 > 29\sqrt{3} \Leftrightarrow 2601 = 51^2 > 29^2 \cdot 3 = 2523.$$

Ответ: меньший корень квадратного трёхчлена.

3. Задачи на доказательство

Пример 8. Доказать, что $\sqrt[4]{5}$ не является рациональным числом.

Доказательство (от противного). Предположим, что данное число рационально, т. е. представимо в виде несократимой обыкновенной дроби $\sqrt[4]{5} = \frac{p}{q}$, где

$p, q \in \mathbb{N}$. Тогда имеем $5q^4 = p^4$. Левая часть кратна 5 $\Rightarrow p^4 : 5 \Rightarrow p : 5 \Rightarrow p = 5k (k \in \mathbb{N})$. Подставим в равенство $5q^4 = p^4$ и получим $5q^4 = (5k)^4$, т. е. $q^4 = 125k^4$, откуда поскольку $125k^4 : 5$, то $q^4 : 5 \Rightarrow q : 5 \Rightarrow q = 5n (n \in \mathbb{N})$. Но тогда дробь $\frac{p}{q}$ сократима на 5. Получили противоречие с несократимостью дроби.

Следовательно, предположение о рациональности было неверно, а значит, число является иррациональным.

4. Задачи на свойства иррациональных чисел

Пример 9. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{52}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

Доказательство (от противного). Предположим, что могут, тогда найдутся такие $n, k, m \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{cases} \sqrt{2} = a_n = a_1 + (n-1)d, \\ \sqrt{3} = a_k = a_1 + (k-1)d, \\ \sqrt{5} = a_m = a_1 + (m-1)d. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое, а из третьего – второе

$$\begin{cases} \sqrt{3} - \sqrt{2} = (k-n)d, \\ \sqrt{5} - \sqrt{3} = (m-k)d, \end{cases}$$

откуда делением получаем: $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{k-n}{m-k}$. Однако слева стоит иррациональное число, а справа – рациональное. Противоречие.

5. Задачи на целую и дробную части числа

Пример 10. [ДВИ–2019]. Найти наибольшее целое число, не превосходящее

$$\sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032}.$$

Решение. Для решения задачи вспомним определения.

Опр. 2. Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Обозначение: $[x]$.

Опр. 3. Дробной частью x называется разность между числом и его целой частью:

$$\{x\} = x - [x].$$

Таким образом, по условию требуется найти целую часть данного числа. Упростим число и уже затем оценим его и найдём целую часть:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2019 \cdot 2029 - 2016 \cdot 2032} = \sqrt{(2024 - 5)(2024 + 5) - (2024 - 8)(2024 + 8)} = \\ &= \sqrt{(2024^2 - 5^2) - (2024^2 - 8^2)} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}. \end{aligned}$$

Так как $6 < \sqrt{39} < 7$, то $[x] = 6$.

Ответ: 6.

Пример 11. [Олимпиада «Ломоносов–2019», 10–11 кл.] Найти целую часть числа $a + \frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная части числа $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}}$.

Решение. Упростим число:

$$\sqrt{76 - 42\sqrt{3}} = \sqrt{(7 - 3\sqrt{3})^2} = 7 - 3\sqrt{3} = 1 + (6 - 3\sqrt{3}),$$

где $0 < 6 - 3\sqrt{3} < 1$. Поэтому $a = 1$, $b = 6 - 3\sqrt{3}$, значит,

$$a + \frac{9}{b} = 1 + \frac{9}{6 - 3\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{2 - \sqrt{3}} = 1 + 3(2 + \sqrt{3}) = 7 + 3\sqrt{3}.$$

Так как $12 < 7 + 3\sqrt{3} < 13$, то $\left[a + \frac{9}{b} \right] = 12$.

Ответ: 12.

6. Наименьшее и наибольшее значения функции. Использование неравенств

Опр. 4. Число A называется наименьшим значением функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq D(f)$, если:

1. $\forall x \in X$ выполняется $f(x) \geq A$;
2. $\exists x_0 \in X$: $f(x_0) = A$.

Обозначение: $\min_{x \in X} f(x) = A$.

Пример 12. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x}$.

Решение. Запишем ОДЗ заданной функции: $x \in [-7; 11]$

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x+7} + \sqrt{11-x} \geq 0 &\Rightarrow f^2(x) \stackrel{\text{ОДЗ}}{=} 18 + 2\sqrt{(x+7)(11-x)} = \\ &= 18 + 2\sqrt{81 - (x-2)^2} \leq 36, f(2) = 6 \Rightarrow \max_{x \in [-7; 11]} f(x) = 6 \end{aligned}$$

Ответ: Наибольшее значение равно 6.

Неравенство о сумме двух взаимно обратных чисел. Для всех $a > 0$ справедливо неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = 1$.

Пример 13. Найти наименьшее значение при $x > 0$ функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x+1} - 1.$$

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} \right) + (\sqrt{x+1} - 1) = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x} + \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} \geq 2, \end{aligned}$$

причём наименьшее значение, равное 2, достигается тогда и только тогда, когда $\frac{\sqrt{x+1} + 1}{x} = 1$, т. е. при $x = 3$.

Ответ: наименьшее значение функции равно 2.

Неравенство Коши, или неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

причём неравенство обращается в равенство только при $a = b$.

Пример 14. Доказать, что при положительных a , b , c , сумма которых равна 1, верно неравенство

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5.$$

Доказательство. Оценим каждый из корней с помощью неравенства Коши:

$$\sqrt{(4a+1) \cdot 1} < \frac{(4a+1) + 1}{2} = 2a + 1,$$

аналогично $\sqrt{4b+1} < 2b + 1$, $\sqrt{4c+1} < 2c + 1$. Складывая три неравенства, получаем

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < (2a+1) + (2b+1) + (2c+1) = 5,$$

что и требовалось доказать.

