

Колесникова Софья Ильинична

Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал», автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ», лауреат премии Правительства РФ 2020 г. в области образования

Методы рационализации

Часть третья.

Некоторые типы неравенств, содержащих сложную экспоненту

Когда в школьной программе появляется новая функция, то, как правило, сначала изучаются (или, по крайней мере, постулируются) ее свойства, а потом, основываясь на них, выводятся правила решения уравнений и неравенств, их содержащих.

Иная ситуация с двумя функциями, которые в школе не изучаются (нет ни единого слова об их свойствах), – это функция вида

$$y(x) = \log_{a(x)} f(x) \quad (\text{о ней мы уже писали})$$

и функция вида $y(x) = a(x)^{f(x)}$.

Однако в школе и заданиях ЕГЭ встречается выражение вида $a(x)^{f(x)}$, но в школьных учебниках не написано, каковы свойства функции $y(x) = a(x)^{f(x)}$, какова её область определения, как решать уравнения и неравенства, её содержащие. Учителя и школьники, не задумываясь, логарифмируют это выражение, чтобы, например, решить уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$. А где написано, что это можно делать? Какова область определения этой функции? Всегда ли $a(x)^{f(x)} > 0$?

Первую учителя считают логарифмической, а вот про «экзотическую», с их точки зрения, функцию $y = x^x$ авторы учебника [7] написали, что она ни показательная, ни степенная, что некоторые называют её показательно-степенной. Задач с ней в учебнике нет. Почему? Думается потому, что не все знают, что это такое, почему функция определена только при $x > 0$. Зато в учебнике [7] и со-

ответствующем задачнике есть уравнения и неравенства, содержащие другую сложную экспоненту – $y = x^{\log_a x}$, которую авторы учебника называли показательно-логарифмической. С ней им, видимо, работать показалось проще, т. к. из-за наличия логарифма функция принимает положительные значения и поэтому, по мнению авторов, её можно логарифмировать. По каким правилам, если она ни то, ни другое? Об этом речи нет – логарифмируют по правилам логарифмирования обычной показательной функции с постоянным основанием. А что бы делали авторы, если бы потребовалась производная этой функции? Мы рассмотрим один пример из [7].

Многие авторы различных пособий и в Интернете решают задачи такого типа, не задумываясь над тем, почему уравнения и неравенства так решаются. Авторы учебника [7], однако, пошли дальше – каждый раз объясняют, что всё следует из теорем, сформулированных для показательных и логарифмических функций с постоянным основанием. Мы уже видели, что для логарифмов с переменным основанием это не так. Теперь увидим, что $y(x) = a(x)^{f(x)}$ – это не просто показательная функция.

Функция $y(x) = a(x)^{f(x)}$, пожалуй, самая сложная.

Всем придется сдавать ЕГЭ. Но что можно написать, решая, например, уравнение $x^{x^2} = x^{x+2}$ или неравенство $x^{x^2} \geq x^{x+2}$? Каково ОДЗ этой функции? А можно ли продифференцировать, например, x^x ? А можно ли построить график функции $y = x^x$? Если да, то как?

Попробуем сейчас все обосновать и объяснить.

1. Сложная экспонента $y(x) = a(x)^{f(x)}$.

Если посмотреть на выражение

$$y(x) = a(x)^{f(x)},$$

то это не показательная функция, т. к. основание переменное! Но это и не степенная функция, потому что показатель переменный.

Тогда что же это за функция?

Про свойства функции $y(x) = a(x)^{f(x)}$ в школе ничего не известно.

Начнем с определения.

По определению, полагают, что для любого $c > 0, c \neq 1$

$$a(x)^{f(x)} = c^{f(x) \log_c a(x)} \quad (1)$$

(По существу, степенная функция тоже показательная функция: $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, и сложно увязана с ветвями $e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$).

Из определения сразу чётко следует, что это все-таки *показательная* функция. Чаще всего ее записывают через натуральное основание

$$a(x)^{f(x)} = e^{f(x) \ln a(x)}, \quad (2)$$

поэтому ее называют экспонентой.

Многим понятней записать ее через основание 10 или 2:

$$a(x)^{f(x)} = 10^{f(x) \lg a(x)} = 2^{f(x) \log_2 a(x)}. \quad (3)$$

Так или иначе, но это *сложная* показательная функция, потому что в показателе входит не только показатель заданного выражения, но и его основание.

Функцию $y(x) = a(x)^{f(x)} \equiv e^{f(x) \ln a(x)}$ называют *сложной экспонентой*.

Теперь хорошо видно, что *областью определения* сложной экспоненты является множество X , на котором $a(x) > 0$.

Сложная экспонента классическими свойствами показательной функции уже не обладает (например, не является монотонной функцией в области определения), но, как всякая показательная функция, принимает только *положительные* значения.

Заметим, что

$$y(x) = a(x)^{f(x)} \equiv e^{f(x) \ln a(x)} \Rightarrow \ln y(x) = f(x) \ln a(x), \quad (4)$$

т. е. сложную экспоненту *можно* логарифмировать.

Некоторые свойства сложной экспоненты.

$$\begin{aligned} 1. \quad a(x)^{f(x)} \cdot a(x)^{g(x)} &= a(x)^{f(x)+g(x)} \\ \left(\text{т.к. } a(x)^{f(x)} \cdot a(x)^{g(x)} &= e^{f(x) \ln a(x)} \cdot e^{g(x) \ln a(x)} = \right. \\ &= e^{f(x) \ln a(x) + g(x) \ln a(x)} = e^{(f(x)+g(x)) \ln a(x)} = a(x)^{f(x)+g(x)} \left. \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad a(x)^{f(x)} &= a(x)^{f(x)-b(x)+b(x)} \equiv e^{(f(x)-b(x)+b(x)) \ln a(x)} \equiv \\ &\equiv e^{(f(x)-b(x)) \ln a(x)} \cdot e^{b(x) \ln a(x)} \equiv a(x)^{f(x)-b(x)} \cdot a(x)^{b(x)} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Сложная экспонента является непрерывной функцией в области определения там, где непрерывны $a(x)$ и $f(x)$, и дифференцируемой там, где дифференцируемы $a(x)$ и $f(x)$.

Теперь становится ясно также, по каким правилам дифференцируется сложная экспонента:

$$y'(x) = \left(a(x)^{f(x)} \right)' = \left(e^{f(x) \ln a(x)} \right)' = e^{f(x) \ln a(x)} (f(x) \ln a(x))' =$$

$$= e^{f(x) \ln a(x)} \left(f'(x) \ln a(x) + f(x) \cdot \frac{a'(x)}{a(x)} \right). \quad (6)$$

Например, $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$.

Однако часто находят производную по-другому – находят сначала так называемую логарифмическую производную, используя то, что $\ln y(x) = f(x) \ln a(x)$.

Пример 1. Найдите производную функции $y(x) = (3x^2 + 4)^{\cos x}$.

$$\blacktriangleright y(x) = (3x^2 + 4)^{\cos x} = e^{\cos x \ln(3x^2 + 4)} \Rightarrow$$

$$y'(x) = (3x^2 + 4)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln(3x^2 + 4) + \cos x \cdot \frac{6x}{3x^2 + 4} \right) \blacktriangleleft$$

Пример 2. Постройте график функции $y = x^{x^2}$.

$\blacktriangleright$ Так как $D(y) = (0; +\infty)$, то, прежде всего, необходимо выяснить поведение на «границе», т. е. найти два предела:

$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x^2 \ln x} = 1$, т. к. $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x = 0$ (это не самый простой предел – здесь используется тот факт, что $\ln x$ при $x \rightarrow +0$, стремится к $-\infty$ медленнее, чем $\frac{1}{x^\alpha}$, где α – любое, наперёд заданное положительное число. В нашем слу-

чае можно взять, например, $\alpha = \frac{1}{2}$) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln x} = +\infty$.

Теперь найдем производную:

$$y' = (x^{x^2})' = (e^{x^2 \ln x})' = e^{x^2 \ln x} \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) = x e^{x^2 \ln x} (2 \ln x + 1).$$

Найдем критические точки в области определения:

$$y' = 0 \Leftrightarrow x e^{x^2 \ln x} (2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Расставим знаки производной – рис. 1.

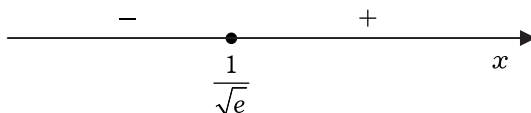
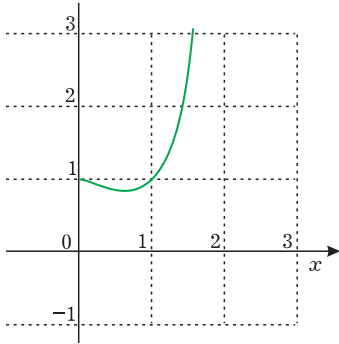
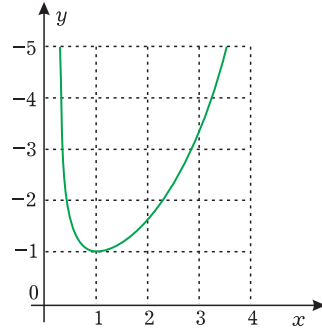


Рис. 1.

Ясно, что точка $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ – точка минимума, $y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{2e}}$.


Рис. 2. $y = x^2$

Рис. 3. $y = x^{\ln x}$

Строим эскиз графика – рис. 2.

Исследуйте и постройте сами график функции $y = x^{\ln x}$ (рис. 3) ◀

2. Уравнения, содержащие сложную экспоненту

Рассмотрим теперь уравнение $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

В известном задачнике Сканави просто постулируются правила решения уравнений и неравенств, содержащих $y(x) = a(x)^{f(x)}$ при $a(x) > 0$, ничего не говоря об ОДЗ самого выражения $y(x) = a(x)^{f(x)}$. Мы выведем эти правила.

Воспользуемся определением сложной экспоненты (возьмем в роли с число 10 – наиболее знакомое школьникам основание логарифма).

Так как $a(x)^{f(x)} = 10^{f(x) \lg a(x)}$, $a(x)^{g(x)} = 10^{g(x) \lg a(x)}$, то

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow 10^{f(x) \lg a(x)} = 10^{g(x) \lg a(x)} \Leftrightarrow f(x) \lg a(x) = g(x) \lg a(x) \Leftrightarrow$$

$$\lg a(x)(f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg a(x) = 0, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Следовательно,

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x) = 1, \\ a(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \quad (7^*) \text{ или}$$

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a(x) = 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

(7)

или

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)(f(x)-g(x))=0 \quad (8)$$

Соотношение

$$a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \lg a(x) = g(x) \lg a(x) \quad (9)$$

показывает, что равносильное уравнение получается таким же, как если бы его прологарифмировали как «обычную» степень по допустимому основанию.

Замечательно, что ОДЗ левой и правой частей всегда совпадают! Именно поэтому этот равносильный переход обычно называют и осуществляют логарифмированием уравнения $a(x)^{f(x)} = a(x)^{g(x)}$.

Вот мы и получили те уравнения, которые просто декларируются в литературе.

Пример 3. Решите уравнение $x^{x^2+1} = x^{3x+5}$.

► Воспользуемся (8):

$$x^{x^2+1} = x^{3x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; \\ x>0, \\ x^2+1=3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; \\ x>0, \\ x=\frac{3\pm 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=4. \end{cases}$$

Ответ. $\{1; 4\}$

Примечание 1.

Заметим, что, если подставить в исходное уравнение $x=0$ или $x=-1$, то уравнение «вроде бы» превратится в тождество.

Однако мы не считаем эти числа решением нашего уравнения, потому что, во-первых, они не принадлежат ОДЗ уравнения, во-вторых, с точки зрения решения уравнений, содержащих сложную экспоненту, уравнения

$x^{x^2} x^{0,5} = x^{3x+4,5}$, $x^{x^2+\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = x^{3x+5}$, $x^{x^2+1} = x^{3x+5}$, $x^{x^2} x = x^{3x+5}$ равносильны (ведь не известно, после проведения каких преобразований появилось уравнение примера или любого, равносильного ему). Но теперь у первого уравнения и $x=0$, и $x=-1$ — не решения, у второго $x=-1$ — не решение, а $x=0$ — «решение», у третьего $x=0$ и $x=-1$ — «решения», а у четвёртого $x=-1$ — «решения», а $x=0$ — не решение.

В-третьих, $x=0: 0^1 \neq 0^2 \cdot 0^{-1}$; $x=-1: (-1)^2 \neq (-1)^{\frac{3}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}}$. ◀

Примечание 2.

Заметим, что заданное уравнение «случайно» имеет целочисленные корни. Поэтому, для сравнения, решим ещё пример.

Пример 3*. Решите уравнение $n^{n^2+1} = n^{3n+5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

► Положительные корни найдены: $n=1, n=4$.

Надо иметь в виду, что операции с целыми степенями отличаются от того, как вычисляются значения a^x , где $x \in \mathbb{R}$.

Будем разбираться с 0 и отрицательными n .

Прежде всего подставим «засветившиеся» числа $n = -1$; $(-1)^2 \equiv (-1)^2$ (не имеем права представлять 2 как $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$).

Попробуем подставить $n = 0$: $0^1 \equiv 0^5$ (не имеем права представлять 1 как $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$).

При $n \neq 0 \Rightarrow n^{n^2+1} = n^{3n+5} \Leftrightarrow n^{(n+1)(n-4)} = 1 \Rightarrow$ других целочисленных отрицательных решений нет, т. к. при $n < -1$ квадратный трёхчлен положителен и $|n|^{(n+1)(n-4)} > 1$.

Ответ. $\{-1; 0; 4\}$

Видна разница? ◀

Поэтому, так как об этой функции в школе ни слова, то чаще всего в заданиях ЕГЭ или задачах вступительных экзаменов просят найти решение соответствующего уравнения или неравенства при условии, что $a(x) > 0$ (или уже в самом условии задачи видно, что $a(x) > 0$).

Пример 4. Решите уравнение $(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}$.

Этот пример разобран в одной из книг. И мы его разбирали. Напомним.

По «форме» примера, $x \in \mathbb{R}$. Тогда, согласно (7*),

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 57)^{3x^2+3} &= (x^2 + x - 57)^{10x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 57 = 1, \\ x^2 + x - 57 > 0, \\ 3x^2 + 3 = 10x \Leftrightarrow (x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$.

Но в названной книге ответов больше.

1) Заметим, что $x^2 + x - 57 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8, \\ x = 7. \end{cases}$

Эти значения, по (7*), не принадлежат ОДЗ. Но... , если подставить эти числа в уравнении, то получим:

а) $x=7 \Rightarrow (-1)^{3 \cdot 49+3} = (-1)^{70}$ – вроде бы «тождество».

$$\text{Но } (x^2+x-57)^{3x^2+3} = (x^2+x-57)^{10x} \Leftrightarrow (x^2+x-57)^{3x^2+2.5} = (x^2+x-57)^{10x-0.5},$$

а тогда $x=7$ – решение? Вовсе нет, т. к. уже $(-1)^{3 \cdot 49+2.5}$ не существует!

$$\text{б) } x=-8 \Rightarrow (-1)^{3 \cdot 64+3} = (-1)^{-80} \Leftrightarrow \emptyset$$

2) Теперь рассмотрим случай, когда основание равно 0:

$$x^2+x-57=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}. \text{ Эти значения, по (7*), тоже не принадлежат}$$

ОДЗ.

Подставляем их в уравнение:

$$\text{а) } x = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2} \Rightarrow \text{справа и слева } 0 \text{ в положительной степени – «решение»}$$

вроде бы есть.

$$\text{б) } x = \frac{-1 - \sqrt{229}}{2} \Rightarrow \text{слева } 0 \text{ в положительной степени, а справа } 0 \text{ в отрица-}$$

тельной степени – решений «вроде» нет.

Теперь заметим, что, в силу свойств сложной экспоненты,

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3} = (x^2+x-57)^{10x} \Leftrightarrow (x^2+x-57)^{-10x} = (x^2+x-57)^{-3x^2-3}, \text{ а тогда}$$

«решением» будет $x = \frac{-1 - \sqrt{229}}{2}$, а $x = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ нет.

$$\text{3) В книге рассмотрен ещё один случай: } \begin{cases} x^2+x-57 < 0, \\ 3x^2+3=10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Авторы подставляют эти числа в заданное уравнение:

$$\text{а) } x=3 \Rightarrow (-45)^{3 \cdot 9+3} = (-45)^{30} \text{ – вроде бы «верно»,}$$

$$\text{б) } x=\frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{9}-57\right)^{\frac{1}{3}+3} = \left(\frac{4}{9}-57\right)^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow \emptyset$$

Но...

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3} = (x^2+x-57)^{10x} \Leftrightarrow (x^2+x-57)^{3(3x^2+3)} = (x^2+x-57)^{30x}$$

в ОДЗ.

А теперь будут «тождеством» уравнение

$$(x^2+x-57)^{3(3x^2+3)} = (x^2+x-57)^{30x} \text{ и при } x=3, \text{ и при } x=\frac{1}{3}.$$

Вот такая история!

Решение, приведенное в названной книге с ответом: $\left\{3, 7, \frac{-1+\sqrt{229}}{2}, \frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}\right\}$

надо считать ошибочным.

Примечание. Никакой компьютер не найдет полученные в названной книге решение $x = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$.

Ведь при любом шаге невозможно «поймать», например, изолированное значение $x = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$, т. к. в любой «соседней» точке слева от $x = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$ значений ни $(x^2+x-57)^{3x^2+3}$, ни $(x^2+x-57)^{10x}$ просто не существует, т. к. там $x^2+x-57 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-1-\sqrt{229}}{2}; \frac{-1+\sqrt{229}}{2}\right)$, а показатель степени иррациональный.

Пример 4*. Решите уравнение $(n^2+n-57)^{3n^2+3} = (n^2+n-57)^{10n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

► Тогда, заметим, операции со степенями совсем не те, что при произвольных

$$\begin{aligned} (n^2+n-57)^{3n^2+3} &= (n^2+n-57)^{10n} \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ x \in \mathbb{R}. \quad \begin{cases} n^2+n-57=0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset, \\ \begin{cases} n^2+n-57 \neq 0, \\ (n^2+n-57)^{(n-3)(3n-1)} = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n=3, \\ n^2+n-57=1 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \emptyset, \\ n^2+n-57=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} n=-8 \Rightarrow (-1)^{11 \cdot 25} \neq 1 \Rightarrow \emptyset, \\ n=7 \Rightarrow (-1)^{10 \cdot 22} = 1 - \text{верно}. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{3, 7\}. \end{aligned}$$

Ответ. $\{3; 7\}$.

Как видим, ответы разные. И даже не пересекающиеся! ◀

Пример 5 (из [7]). Решите уравнение $\log_x(3x^{\lg x} + 4) = 2 \lg x$.

► Как видите, в примере и логарифм с переменным основанием и «экзотическая функция».

Мы решим не так, как у авторов.

По определению,

$$\log_x(3x^{\lg x} + 4) = 2\lg x \Leftrightarrow \frac{\lg(3x^{\lg x} + 4)}{\lg x} = 2\lg x \Leftrightarrow \lg(3x^{\lg x} + 4) = 2\lg^2 x \Leftrightarrow$$

$$\lg(3x^{\lg x} + 4) = \lg 10^{2\lg^2 x} \Leftrightarrow (\text{по определению, } x^{\lg x} = 10^{\lg^2 x})$$

$$\lg(3 \cdot 10^{\lg^2 x} + 4) = \lg 10^{2\lg^2 x} \Leftrightarrow 3 \cdot 10^{\lg^2 x} + 4 = 10^{2\lg^2 x} \Leftrightarrow$$

$$10^{2\lg^2 x} - 3 \cdot 10^{\lg^2 x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 10^{\lg^2 x} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow 10^{\lg^2 x} = 4 \Leftrightarrow \lg^2 x = \lg 4 \Leftrightarrow$$

$$\lg x = \pm \sqrt{\lg 4} \Leftrightarrow x = 10^{\pm \sqrt{\lg 4}} \in \text{ОДЗ}$$

Ответ. $10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$.

Примечание. У нас всюду равносильные переходы, в [7] – нет. И проверки нет. Как проверить ответ? Как подставить $x = 10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$ в уравнение $\log_x(3x^{\lg x} + 4) = 2\lg x$? И как вообще там решалась задача, если нет определения функции $y = a(x)^{f(x)}$? ◀

3. Неравенства, содержащие сложную экспоненту. Правила П ПЗ и П П4.

$$\text{П ПЗ} \quad a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \overset{\text{ОДЗ}}{(a(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0}$$

$$\text{П П4} \quad a(x)^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow \overset{\text{ОДЗ}}{(a(x)-1)f(x) \vee 0}$$

При доказательстве правил для сложной экспоненты нам придётся воспользоваться правилами для решения неравенств, содержащих показательные функции и логарифмы с постоянным основанием.

П П1. При любом $a > 0$ знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ, и разность $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)(f(x)-g(x))$, или, в современных обозначениях,

$$a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \overset{\text{ОДЗ}}{(a-1)(f(x)-g(x)) \vee 0}$$

П П2. При любом $a > 0$ знак разности $a^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a-1)f(x)$ в ОДЗ, и разность $a^{f(x)} - 1$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)f(x)$, или, в современных обозначениях,

$$a^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow \overset{\text{ОДЗ}^*}{(a-1)f(x) \vee 0}$$

П Л1. Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ, и разность $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ обращается в 0

одновременно с произведением $(a-1)(f(x)-g(x))$, или, в современных обозначениях,

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x)-g(x))$$

П Л2. Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ, и $\log_a f(x)$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)(f(x)-1)$, или, в современных обозначениях,

$$\log_a f(x) \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a-1)(f(x)-1)$$

Рассмотрим неравенство $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0$

Воспользуемся определением сложной экспоненты, взяв в качестве s , например, число 10 (можно взять любое другое допустимое основание), а затем воспользуемся правилом П П1 и П Л2:

$$a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 10^{f(x) \lg a(x)} - 10^{g(x) \lg a(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (\text{в силу ПП1})$$

$$f(x) \lg a(x) - g(x) \lg a(x) \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\lg a(x)(f(x) - g(x)) \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (\text{в силу П Л2})$$

$$(a(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0$$

т. е., учитывая решение уравнения $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} = 0$ (7), получили

П П3 Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$, и разность $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a(x)-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ или, в современных обозначениях,

$$\text{П П3 } a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)} \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \vee 0 \quad (10)$$

Следствие.

Если $g(x) \equiv 0$, то правило П П3 примет вид правила П П4

П П4 Знак разности $a(x)^{f(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(a(x)-1)f(x)$, и разность $a(x)^{f(x)} - 1$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a(x)-1)f(x)$ в ОДЗ, или, в современных обозначениях,

$$\text{П П4 } a(x)^{f(x)} - 1 \vee 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} (a(x)-1)f(x) \vee 0 \quad (11)$$

Проанализируем Правила:

- 1) если $a(x) > 1$, то $f(x) > g(x)$;
- 2) если $0 < a(x) < 1$, то $f(x) < g(x)$,

т. е. мы получили те условия, которые в литературе просто *декларируются*.

Итак, из выведенных Правил следуют стандартные способы, рассматривающие отдельно случаи, когда основание больше или меньше единицы.

При применении *наших* Правил это не имеет значения.

Кроме того, если $a(x), f(x), g(x)$ – рациональные функции, то за **ОДИН ШАГ** мы перешли к классическому варианту метода интервалов для рациональных функций (наверное, поэтому его кто-то назвал методом рационализации), который изучается в 9-ом классе.

Правила П ПЗ и П П4 *намного* упростят решение сложных неравенств вида $F(x) \vee 0$, содержащих в качестве множителя разность $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ или $a(x)^{f(x)} - 1$.

Рассмотрим, например, неравенство вида

$$\frac{(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}) (b(x)^{r(x)} - 1)}{h(x)} \vee 0 \quad (12)$$

Решение неравенства $\frac{(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}) (b(x)^{r(x)} - 1)}{h(x)} \vee 0$ зависит от знаков сомножителей, а, в силу правил П ПЗ и П П4, знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ в ОДЗ, знак разности $b(x)^{r(x)} - 1$ совпадает со знаком произведения $(b(x) - 1)r(x)$ в ОДЗ.

Поэтому

$$\frac{(a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}) (b(x)^{r(x)} - 1)}{h(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{\text{ОДЗ} (a(x) - 1)(b(x) - 1)(f(x) - g(x))r(x)}{h(x)} \vee 0 \quad (13)$$

Пример 6. Решите неравенство $\frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(12x^2+7x+1) \left(((x+4)^2)^{(6x^2+4x)} - 1 \right)} \leq 0$.

► Заметим, что $((x+4)^2)^{6x^2+4x} \neq (x+4)^{2(6x^2+4x)}$, так как у правой и левой части разные ОДЗ: у правой $x+4 > 0$, а у левой $x+4 \neq 0$.

Найдём ОДЗ *: $\begin{cases} 1-x > 0, \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1).$

Воспользуемся правилами П ПЗ и П П4:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(12x^2+7x+1) \left(((x+4)^2)^{(6x^2+4x)} - 1 \right)} \leq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\Leftrightarrow} \\ & \Leftrightarrow \frac{(1-x-1)(x^2+2x+2-4x-5)}{\left(x+\frac{1}{3}\right) \left(x+\frac{1}{4}\right) ((x+4)^2-1) (6x^2+4x)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{x(x-3)(x+1)}{\left(x+\frac{1}{3}\right) \left(x+\frac{1}{4}\right) (x+5)(x+3)x \left(x+\frac{2}{3}\right)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & x \in (-5; -3) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -1\right] \cup [3; +\infty). \end{aligned}$$

После учёта ОДЗ* получаем, что

$$x \in (-5; -4) \cup (-4; -3) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -1\right].$$

Ответ. $(-5; -4) \cup (-4; -3) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -1\right]. \blacktriangleleft$

Пример 7. Решите неравенство $(2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{2x}} \geq (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{1-x}}.$

► Воспользуемся сначала правилом П ПЗ, а затем П П1:

$$\begin{aligned} & (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{2x}} \geq (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{1-x}} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x} - 1) \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{1-x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 2^x + 0,09) \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\left(2^x - \frac{1}{10}\right) \left(2^x - \frac{9}{10}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow (\text{в силу П П1}), \\ & \frac{\left(x - \log_2 \frac{1}{10}\right) \left(x - \log_2 \frac{9}{10}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right)}{x(x-1)} \geq 0. \end{aligned}$$

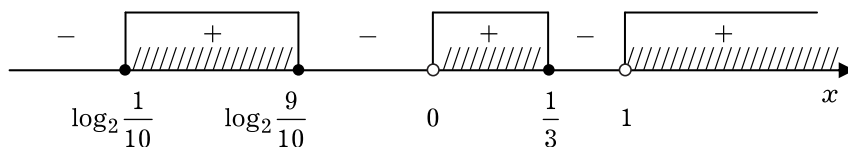


Рис. 4

С рисунка снимаем

Ответ. $\left[\log_2 \frac{1}{10}; \log_2 \frac{9}{10}\right] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. ◀

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(\log_2(8x^2+22x+13)-3) \log_{(x^2+8x+16)}(6x^2+4x+1)} \geq 0.$$

► Ну, и неравенство! Ничего – постараемся справиться. Оно приведено для того, чтобы любой убедился в том, что нашим способом такое неравенство может решить *любой* школьник, а не только какой-нибудь «ботаник» (кстати, «ботаники» – народ упрямый, и некоторые игнорируют приведенные правила, по-прежнему решая обобщённым методом интервалов. Но... К сожалению, многие из них не подставляют «пробные» точки, без которых метод, вообще говоря, не работает. В нашем примере с «пробными» точками работать очень неприятно).

Найдем сначала ОДЗ:

$$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 8x^2+22x+13 > 0, \\ x+4 \neq 0, \\ 6x^2+4x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4) \cup \left(-4; \frac{-11-\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; 1\right).$$

Теперь воспользуемся П ПЗ для числителя, П ЛЗ, П Л4 для знаменателя:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^{x^2+2x+2} - (1-x)^{4x+5}}{(\log_2(8x^2+22x+13)-3) \log_{(x+4)^2}(6x^2+4x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(1-x-1)(x^2+2x+2-4x-5)}{(8x^2+22x+13-8)(x^2+8x+16-1)(6x^2+4x+1-1)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(x-3)(x+1)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(x+3)(x+5)\left(x+\frac{2}{3}\right)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{с учетом ОДЗ – рис. 4}) \\ & x \in (-\infty; -5) \cup \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1). \end{aligned}$$

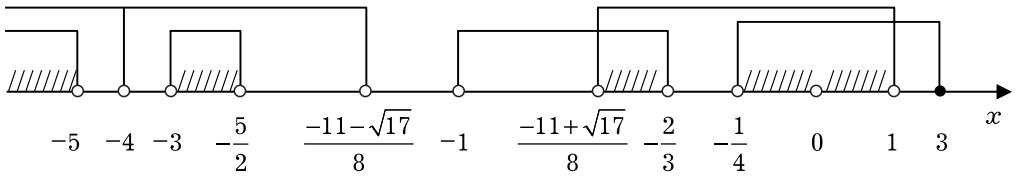


Рис. 5.

Ответ. $(-\infty; -5) \cup \left(-3; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{-11+\sqrt{17}}{8}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; \infty)$.

Пример 9. Решите неравенство $(x-2)^{4x^2+35} \leq (x-2)^{24x}$.

► Воспользуемся П ПЗ:

$$\begin{aligned} (x-2)^{4x^2+35} \leq (x-2)^{24x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ (x-2-1)(4x^2-24x+35) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ (x-3)(x-5)(x-2,5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 2,5] \cup [3; 5] \end{aligned}$$

Ответ. $(2; 2,5] \cup [3; 5]$.

Пример 10. Решите неравенство $x^{x(x^2-9)} \leq x^{\frac{x^2-9}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{► } x^{x(x^2-9)} \leq x^{\frac{x^2-9}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x-1)\left(x^3-9x-\frac{x^2}{2}+\frac{9}{2}\right) \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x-1)(x-3)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 3]. \end{aligned}$$

Ответ. $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 3]$.

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{\left((100x^2-99)^{6x^2+7x} - (100x^2-99)^{49}\right)(2^{2x-9} - 2^{-x-2})}{(x+3,4)(x-0,9)} \leq 0.$$

► Неравенство громоздкое, поэтому найдём сразу

$$\text{ОДЗ}^*: x \in (-\infty; -\sqrt{0,99}) \cup (\sqrt{0,99}; +\infty).$$

$$\frac{\left((100x^2 - 99)^{6x^2+7x} - (100x^2 - 99)^{49} \right) (2^{2x-9} - 2^{-x-2})}{(x+3,4)(x-0,9)} \stackrel{\text{ОДЗ}^*}{\leq 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(100x^2 - 99 - 1)(6x^2 + 7x - 49)(2x - 9 + x + 2)}{(x+3,4)(x-0,9)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)(x+3,5)(3x-7)^2}{(x+3,4)(x-0,9)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{с учётом ОДЗ} \\ \text{(снимаем ответ с рисунка)} \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -3,5] \cup (-3,4; -1] \cup (0,99; 1] \cup \left\{ \frac{7}{3} \right\}.$$

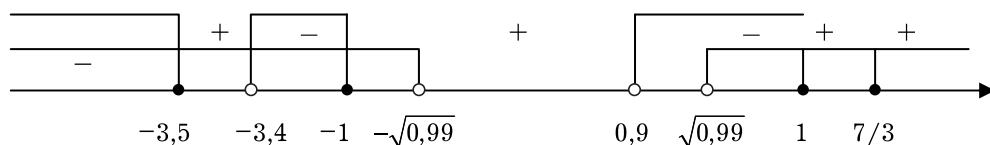


Рис. 6

$$\text{Ответ. } (-\infty; -3,5] \cup (-3,4; -1] \cup (\sqrt{0,99}; 1] \cup \left\{ \frac{7}{3} \right\}. \blacktriangleleft$$

Литература

1. Колесникова С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 6-изд. допущено ФИПИ.
2. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 4-е изд.
3. Колесникова С.И. Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва, ВАКО, 2011.
4. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Москва, ООО «Азбука».
5. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения. Москва, ООО «Азбука».
6. Колесникова С.И. ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства. Москва, ООО «Азбука».
7. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. «Алгебра и начала математического анализа», 11 класс. «Мнемозина».

Продолжение следует: Часть четвёртая – Неравенства, содержащие иррациональные функции и модуль. Умножение на сопряжённое выражение.