



Колесникова Софья Ильинична
Старший преподаватель кафедры высшей математики Московского физико-технического института (МФТИ), специалист ЗФТШ при МФТИ, редактор журнала «Потенциал». Автор пособий «Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ» и «Решение сложных задач ЕГЭ». Лауреат премии Правительства РФ 2020 г. в области образования.

Методы рационализации

Статья содержит изложение методов решения некоторых типов неравенств, содержащих логарифмические, показательные, иррациональные, монотонные функции, модули выражений.

Суть методов состоит в использовании равносильных (не школьных) преобразований, сводящих рассматриваемые неравенства при некоторых условиях к рациональным неравенствам, изучаемых всеми школьниками в 9-ом классе.

Сразу заметим, что рассматриваемые в статье равносильные преобразования уже рассматривались подробно (с выводом и обоснованием) в пособиях автора [1]–[7] (первое издание [1] вышло в 2004 г, а в 2007 пособие получило гриф ФИПИ), в статьях автора в нашем журнале, в работе автора в 463 школе, работе в ЗФТШ МФТИ, в работе с учителями на семинарах, курсах повышения квалификации МФТИ, всероссийском марафоне.

Методика в Интернете получила название «Методы рационализации». Когда и кем введено такое название, автору не известно. То ли это потому появилось такое название, что неравенства часто сводятся к рациональным, то ли потому, что это действительно, и на взгляд автора, хорошие, рациональные способы решений.

Странно, но чаще всего говорят так, решая логарифмические неравенства.

Мы решили вернуться к этой теме ещё раз.

Дело в том, что этих методов нет в школьных учебниках. Однако уже многие их применяют формально, но объяснить, почему это возможно, или не могут, или объясняют неправильно.

Статья будет состоять из 5 частей.

Часть первая – Некоторые типы неравенств, содержащих логарифмы и показательные функции с постоянным основанием.

Часть вторая – Некоторые типы неравенств, содержащих логарифмы с переменным основанием.

Часть третья – Некоторые типы неравенств, содержащих сложную экспоненту.

Часть четвёртая – Некоторые типы неравенств, содержащих иррациональные функции или модули. Умножение на сопряжённое выражение.

Часть пятая – Некоторые типы неравенств, содержащих произвольные монотонные функции.

Часть первая. Некоторые типы неравенств, содержащих логарифмы и показательные функции с постоянным основанием

Поводом для написания этой заметки послужило оформление в [8] решения неравенства

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)} \geq -1 \qquad \textbf{(1)}$$

«Перейдём к десятичным логарифмам

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{6}\right)} \geq -1; \quad \begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)} \geq -1, \\ x \neq 2 \end{cases}; \quad \frac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)} \geq 0; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1}{\left(\frac{x}{6}\right)-1} \geq 0, \\ x>1, x \neq 2 \end{cases} \ldots»$$

В знаменателе заданного неравенства стоит $y(x)=\log_{a(x)} f(x)$.

А что это за функция?

Почему и по каким правилам можно переходить к десятичному основанию?

А к другому можно?

А откуда взялось последнее неравенство?

На второй вопрос ни один из присутствующих 20 школьников из разных гимназий, лицеев и спецшкол Москвы не ответил, а на четвёртый вопрос раздался робкий голос «Похоже на метод рационализации?» Да, именно – похоже.

На второй и третий вопросы ответ прост – «По определению»

Кроме того, так как их нет в учебниках, а пособия и учителя, и ученики не всегда читают, а некоторые их просто игнорируют, считая, что школьных методов достаточно (это их право – многие задачи можно решить разными методами, более сложными или более простыми). Есть учителя, даже профильных классов, которые до сих пор игнорируют применение равносильных преобразований.

При применении школьных методов все преобразования часто пишутся подряд, иногда разделяются запятой (точка с запятой впервые встретилась в [8]).

Например, $x^2=4, x_1=2, x_2=-2$. Или $x^2-5x+6\le 0, (x-2)(x-3)\ge 0, x\in[2;3]$

Никто не сомневается в правильности ответов и не требует проверки. Так делается в учебниках.

Но, если задача решается «методом рационализации», то оформлять надо с помощью значка равносильности.

Допустим, что где-то решение записано так:

$$\frac{x\left(2^{x^2-2x}-\frac{1}{2}\right)}{(x-4)(x+1)}\le 0, \frac{x(x-1)^2}{(x-4)(x+1)}\le 0,\ x\in(-\infty;-1)\cup[0;4). \qquad (2)$$

Сколько школьников и учителей будет думать, откуда взялось второе неравенство?

Последовательность неравенств записана через запятую – значит, должны быть переходы по правилам. Но такой связи между неравенством с показательной функцией и рациональной дробью в школе нет. Понять, верно ли решено неравенство, невозможно. И вообще, может быть, решается только второе неравенство, а первое просто записано, но не решается?

Теперь оформим решение по правилам «метода рационализации».

«Воспользуемся методом рационализации

$$\frac{x\left(2^{x^2-2x}-\frac{1}{2}\right)}{(x-4)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2}{(x-4)(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow\ x\in(-\infty;-1)\cup[0;4). \qquad (3)»$$

Так все и пишут, не ссылаясь на то, что пользуются при этом Правилом П1 (первым правилом для показательных неравенств):

«При любом $a>0$ знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ, и *разность $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$.*

У разработчиков ЕГЭ появился значок « $\vee$ ». Тогда и мы «позволим» себе его использовать. В предыдущих пособиях мы не решались этого делать, а пользовались словесной формулировкой (как приведённая выше) правил.

Теперь правило впервые (не считая устных лекций автора) запишем в символах

$$ПП1\quad a^{f(x)}-a^{g(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

Будем называть эту форму записи – запись в *современных обозначениях*.

Посмотрев на заданное неравенство (2) решающий сначала задумается над тем, как его можно решить. Да, ...не очень ясно. А дальше в решении стоит простое рациональное неравенство, связанное с первым значком равносильности.. Какая между ними связь?

Ситуация не простая. Некоторые никогда не сталкивались с равносильностью преобразований – поэтому им решение может показаться просто стран-

ным. Те, кто пользуется равносильными преобразованиями, но не знаком с использованным переходом, начнёт искать, что такое «метод рационализации».

А где его найти? Трудно ответить на этот вопрос. Автору пока известны лишь свои работы, содержащие обоснование равносильных переходов. Но они не носят такого названия, а называются «Правилами» решения неравенств соответствующего типа.

1. Неравенства, содержащие логарифмы с постоянным основанием

$$П\ Л1.\quad \log_a f(x)-\log_a g(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

$$П\ Л2.\quad \log_a f(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-1\big)\vee 0$$

Рассмотрим уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$.

Всем известно, что, так как логарифмическая функция монотонна при любом допустимом основании $a<0, a\neq 1$, то

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} f(x)-g(x)=0 \qquad (1)$$

Запишем (1) в равносильном виде

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)=0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)f(x)-g(x)=0 \qquad (2)$$

Заметим, что $a\neq 1$ в (2).

Выведем теперь написанные выше правила (правило для логарифмов 1-4 – так они названы в пособиях автора)

Рассмотрим, например, неравенство вида

$$\log_a f(x)>\log_a g(x).$$

►1) Пусть неравенство $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ выполнено. (3)

Тогда,

а) если $a>1$, то $f(x)-g(x)>0$, в силу того, что при этом $\log_a x$ – монотонно возрастающая функция. Это известно всем. Но тогда *выполнено* и неравенство

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0, \qquad (4)$$

которого в учебниках *нет*;

б) если же $0<a<1$, то $f(x)-g(x)<0$, в силу монотонного убывания функции $\log_a x$. При этом по-прежнему *выполнено* неравенство $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$.

Мы показали, что, *если* $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, *то*

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \text{ в ОДЗ}, \qquad (5)$$

$$\text{т. е. } \log_a f(x)-\log_a g(x)>0 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \qquad (6)$$

2) Пусть теперь, наоборот, дано, что $a>0,\ a\neq 1,\ f(x)>0, g(x)>0,$ и выполнено алгебраическое неравенство $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0.$

Тогда,

а) если $a>1$, то $f(x)>g(x)$, а тогда $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ существуют и выполнено неравенство (3)

$$\log_a f(x)>\log_a g(x);$$

б) если $0<a<1$, то $f(x)<g(x)$, $\log_a f(x)$ и $\log_a g(x)$ существуют и опять выполнено неравенство (3)

$$\log_a f(x)>\log_a g(x), \text{ т. е.,}$$

если $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$, то и $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$ в ОДЗ, или

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} \log_a f(x)-\log_a g(x)>0. \qquad (7)$$

Следовательно, из 1) - 2) следует, что

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)>0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

Если в исходном неравенстве поменять знак, то сменится знак и в произведении.

Учитывая и (2), мы получили первое правило для решений неравенства вида

$$\log_a f(x)-\log_a g(x)\vee 0 \qquad (8)$$

П Л1: Знак разности $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ, и разность $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ.

Следствие.

В частности, если $g(x)\equiv 1$, то $\log_a g(x)\equiv 0$, и мы получаем правило П Л2 для решений неравенства вида

$$\log_a f(x)\vee 0 \qquad (9)$$

П Л2. Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-1\big)$ в ОДЗ, $\log_a f(x)$ обращается в 0 одновременно с произведением $(a-1)\big(f(x)-1\big)$ в ОДЗ.

В *современных обозначениях* правила имеют вид

$$\textit{П Л1.}\quad \log_a f(x)-\log_a g(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)\vee 0$$

$$\textit{П Л2.}\quad \log_a f(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-1\big)\vee 0$$

При конкретном a, например, неравенство $\log_a f(x)-\log_a g(x)>0$, конечно, может быть решено стандартным способом, и объем выкладок тот же.

Но здесь уже есть преимущество, т. к. *не надо задумываться* над тем, какое a: оно больше единицы или меньше единицы, надо менять знак неравенства или не надо, возрастает или убывает рассматриваемая логарифмическая функция.

Кроме того, замечательные правила П Л1 и П Л2 уже *намного* упростят решение более сложных неравенств вида $F(x)\vee 0$, содержащих в качестве *множителя* $\log_a f(x)$ или разность $\log_a f(x)-\log_a g(x)$.

Теперь можно будет гораздо *проще* решить, например, неравенства вида

$$\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)}\vee 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Действительно, так как, в силу П Л1, знак числителя совпадает со знаком $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ, то

$$\frac{\log_a f(x)-\log_a g(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)}{h(x)}\vee 0 \quad (11)$$

(ОДЗ* не включает ОДЗ знаменателя)

Аналогично, в силу ПЛ2, знак числителя совпадает со знаком $(a-1)\big(f(x)-1\big)$ в ОДЗ, то

$$\frac{\log_a f(x)}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(a-1)\big(f(x)-1\big)}{h(x)}\vee 0 \qquad (12)$$

Теперь мы можем объяснить связь между 3-им и 4-м неравенствами из [8] в записи:

$$\frac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0;\quad \begin{cases}\dfrac{(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1}{\left(\frac{x}{6}\right)-1}\ge 0,\\ x>1, x\ne 2\end{cases}$$

Воспользуемся правилом П Л2 (можно записать и так:

Так как $\lg f(x)\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} \big(f(x)-1\big)\vee 0$):

$$\frac{\lg(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)}{\lg\left(\frac{x}{6}\right)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-1)\left(\frac{x}{6}\right)-1}{\left(\frac{x}{6}\right)-1}\ge 0,\\ x>1, x\ne 2\end{cases}$$ а дальше всё понятно.

Пример 1. Решите неравенство $\dfrac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0.$

Примеры такого вида встречаются в ЕГЭ. Это наиболее популярные примеры. Обычно их решают, рассматривая совокупность двух систем, в каждой из которых рассматривается случай, когда числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки. Мы этого делать не будем, но традиционное решение, для сравнения (второй способ), всё-таки приведём.

***Первый** способ* (с применением правила (П Л1))

► Найдём сначала ОДЗ*: $\begin{cases}3x^2-3x+7>0\Leftrightarrow x\in R,\\ -x^2+x+6>0\Leftrightarrow x\in(-2;3).\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;3).$

А теперь воспользуемся правилом П Л1 – знак разности $\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)$ совпадает со знаком $(3x^2-3x+7+x^2-x-6)$ в ОДЗ*(формулировать правило не обязательно):

$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(-x^2+x+6\right)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{3x^2-3x+7+x^2-x-6}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)}=\frac{(2x-1)^2}{\left(x-\frac{3}{10}\right)\left(x-\frac{7}{10}\right)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};+\infty\right).$$

Учтём ОДЗ*:

$$x\in\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right). - \text{рис.1}$$

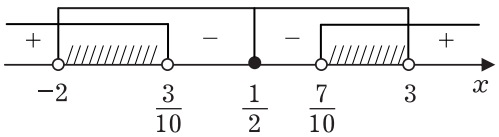


Рис.1

Ответ. $\left(-2;\dfrac{3}{10}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup\left(\dfrac{7}{10};3\right).$

Примечание. На ЕГЭ решение можно оформить более компактно:

$$\frac{\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)}{(10x-7)(10x-3)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-3x+7>0\Leftrightarrow x\in R,\\ 6+x-x^2>0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)<0,\\ \dfrac{3x^2-3x+7-\left(6+x-x^2\right)}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)}=\dfrac{(2x-1)^2}{\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)}\geq 0\end{cases}$$

Решили все неравенства методом интервалов – рис. 1

Ответ. $\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right)$. ◄

Второй *способ* (традиционный)

►Рассмотрим два случая. Первый случай – числитель неотрицателен, знаменатель положителен:

$$\begin{cases}\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)\geq 0,\\(10x-7)(10x-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-3x+7-\left(6+x-x^2\right)\geq 0,\\6+x-x^2>0,\\\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow x\in R,\\x\in(-2;3),\\\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left(\frac{7}{10};3\right).$$

Второй случай – числитель не положителен, знаменатель отрицателен:

$$\begin{cases}\lg\left(3x^2-3x+7\right)-\lg\left(6+x-x^2\right)\leq 0,\\(10x-7)(10x-3)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-3x+7-\left(6+x-x^2\right)\leq 0,\\6+x-x^2>0,\\\left(x-\frac{7}{10}\right)\left(x-\frac{3}{10}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-1)^2\leq 0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\\x\in(-2;3),\\x\in\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Объединяя оба случая, получаем, что $x\in\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right)$.

Ответ. $\left(-2;\frac{3}{10}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{7}{10};3\right),5.$ ◄

Теперь слово за читателем. Какой способ выбираете?

Примечание. В этом примере разность логарифмов *не меняет* знак при переходе через точку $x=\frac{1}{2}$, а следующие нули находятся близко. Обобщённым методом интервалов решать пример затруднительно.

2. Неравенства, содержащие показательные функции с постоянным основанием

$$П\,П1.\quad a^{f(x)}-a^{g(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$$

$$П\,П2.\quad a^{f(x)}-1\vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)f(x)$$

Прежде всего, заметим, что

$$a^{f(x)}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=1,\\ f(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow (a-1)f(x)=0 \qquad (1)$$

Рассмотрим, например, неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a>0$.

1. Пусть неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ выполнено.

Тогда,

а) если $a>1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Rightarrow f(x)>g(x)$. Теперь запишем то, чего нет в учебниках:

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Rightarrow (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \qquad (2);$$

б) если $0<a<1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Rightarrow f(x)-g(x)<0$, или

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Rightarrow (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \qquad (3)$$

(запишем то, чего нет в учебниках).

Из а) и б) следует (независимо от того, $a>1$ или $a<1$), что

$$a^{f(x)}-a^{g(x)}>0 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \quad (4)$$

т. е., если выполнено неравенство $a^{f(x)}>a^{g(x)}$,

то в ОДЗ выполнено и неравенство (4), которое *не встречается* в учебниках.

2. Пусть теперь $a>0$, и выполнено алгебраическое неравенство

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0.$$

Тогда,

а) если $a>1$, то $f(x)-g(x)>0$, а тогда и $a^{f(x)}-a^{g(x)}>0$;

б) если $0<a<1$, то $f(x)-g(x)<0$, а, значит, и $a^{f(x)}-a^{g(x)}>0$.

Из а) и б) следует (независимо от того, $a>1$ или $a<1$), что

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0 \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} a^{f(x)}-a^{g(x)}>0.$$

А из 1. и 2. следует, что мы *доказали*, что

$$a^{f(x)}>a^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0. \qquad (5)$$

Заметим, что из доказательства следует, что при смене знака неравенства сменится и знак произведения, т.е.

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) < 0. \qquad (6)$$

Заметим также, что при решении строгого неравенства a не может быть равно 1.

А вообще a может быть равно 1? Почему бы и нет? Конечно, наверное, не пишут – решите неравенство $1^{f(x)} \geq 1^{g(x)}$. Но встречаются неравенства вида $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, где a – параметр.

Нестрогие неравенства, в силу (1) и (5), имеют тот же вид

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big) \geq 0, \qquad (7)$$

Если $g(x) \equiv 0$, то

$$a^{f(x)} \geq 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} \geq a^{0} \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)f(x) \geq 0 \qquad (8)$$

А тогда уже ясно, что лучили правила П П1 и П П2.

П П1. *При любом* $a>0$ *знак разности* $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ *совпадает со знаком произведения* $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ, и *разность* $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ *обращается в 0 одновременно с произведением* $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$.

П П2. *При любом* $a>0$ *знак разности* $a^{f(x)} - 1$ *совпадает со знаком произведения* $(a-1)f(x)$ в ОДЗ, и *разность* $a^{f(x)} - 1$ *обращается в 0 одновременно с произведением* $(a-1)f(x)$.

Запишем эти утверждения в современных символах:

$$П\ П1.\quad a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$$

$$П\ П2.\quad a^{f(x)} - 1 \vee 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow} (a-1)f(x)$$

Обратите внимание – выведено правило, *единое* для возрастающей (при $a>1$) и убывающей (при $0<a<1$) показательных функций.

Что дают Правила?

При конкретном значении a неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, конечно, может быть решено стандартным способом, и объем выкладок тот же. Но здесь уже есть преимущество, т. к. *не надо задумываться* над тем, какое a: оно больше единицы или меньше единицы, надо менять знак неравенства или не надо, возрастает или убывает заданная показательная функция.

Но вот найденные *замечательные правила П П1* и *П П2* уже *намного* упростят решение сложных неравенств, содержащих в качестве *множителя* разность $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ или разность $a^{f(x)} - 1$.

Рассмотрим, например, неравенство вида

$$\frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{h(x)}\geq 0\,(\leq 0)\Leftrightarrow \frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{h(x)}\vee 0.$$

Решение неравенства зависит от знаков сомножителей, а, в силу правила П П1, знак разности $a^{f(x)}-a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)$ в ОДЗ. Поэтому немедленно получаем, что

$$\frac{a^{f(x)}-a^{g(x)}}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)}{h(x)}\vee 0 \qquad (9)$$

Если $g(x)\equiv 0$, то $\dfrac{a^{f(x)}-1}{h(x)}\vee 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \dfrac{(a-1)f(x)}{h(x)}\vee 0$ (10)

Примечание. Скобок – множителей может быть и больше 2. Тогда к каждой скобке применяем соответствующее правило.

Пример 2. Решите неравенство

$$\frac{\left(0,3^{8x^2-6x}-0,3^{-1}\right)\left(5^{20x^2+1}-5^{9x}\right)\left(0,6^{3x^2}-0,6^{4x-1}\right)}{6x^2-x-1}\leq 0.$$

►Применим к каждой скобке правило П П1. Тогда

$$\frac{\left(0,3^{8x^2-6x}-0,3^{-1}\right)\left(5^{20x^2+1}-5^{9x}\right)\left(0,6^{3x^2}-0,6^{4x-1}\right)}{6x^2-x-1}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(0,3-1)\left(8x^2-6x+1\right)(5-1)\left(20x^2+1-9x\right)(0,6-1)\left(3x^2-4x+1\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\leq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{5}\right]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$$

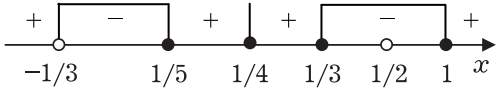


Рис. 2

Ответ. $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{5}\right]\cup\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Легко ли такое неравенство решить обобщённым методом интервалов?◄

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{\left(2^{4x^2}-2^{4x+3}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(4x^2-4x+9\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(4x+6\right)\right)}{\left|2x^2-x-1\right|-\left|2x^2-5x-3\right|}\le 0.$$

►Это пример практически невозможно сделать обобщённым методом интервалов, т. к. трудно будет вычислять значения в «пробных» точках – они будут «плохие».

Найдём ОДЗ*: $4x+6>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$.

Применяя правила П П1, П Л1 и правило для разности модулей, получим:

$$\frac{\left(2^{4x^2}-2^{4x+3}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(4x^2-4x+9\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(4x+6\right)\right)}{\left|2x^2-x-1\right|-\left|2x^2-5x-3\right|}\le 0 \overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{ОДЗ}{\Leftrightarrow}\frac{\left(4x^2-4x-3\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(4x^2-4x+9-4x-6\right)}{\left(2x^2-x-1+\left(2x^2-5x-3\right)\right)\left(2x^2-x-1-\left(2x^2-5x-3\right)\right)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup(2;+\infty)\in ОДЗ$$

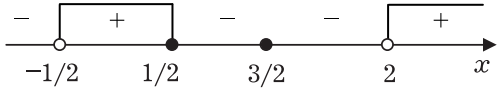


Рис. 3

Ответ. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup(2;+\infty)$. ◄

Пример 4. Решите неравенство $\frac{\left(2x^2-3x+1\right)\left(2^{2x^2+x}-2^{6x-3}\right)}{\ln\left(x^2+x\right)-\ln(3x-1)}\le 0.$

► Найдём ОДЗ*: $3x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}\Rightarrow(x+1)x>0.$

Воспользуемся П П1 для числителя и П Л1 – для знаменателя:

Тогда

$$\frac{\left(2x^2-3x+1\right)\left(2^{2x^2+x}-2^{6x-3}\right)}{\ln\left(x^2+x\right)-\ln(3x-1)}\le 0 \overset{ОДЗ^*}{\Leftrightarrow} \frac{(x-1)(2x-1)\left(2x^2+x-(6x-3)\right)}{x^2+x-(3x-1)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(2x-1)(x-1{,}5)}{(x-1)^2}\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]\in ОДЗ^*.$$

Ответ. $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Интересно, легко ли задача решается обобщённым методом интервалов.◀

Литература

1. *Колесникова С.И.* Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 6-изд. допущено ФИПИ.
2. *Колесникова С.И.* Математика. Решение сложных задач ЕГЭ. Москва, «Айрис-пресс», 2008, 4-е изд.
3. *Колесникова С.И.* Решение сложных задач ЕГЭ по математике. Москва «ВАКО», 2011.
4. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства. Москва, ООО «Азбука»
5. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические уравнения Москва, ООО «Азбука»
6. *Колесникова С.И.* ЕГЭ. Математика. Показательные и логарифмические неравенства. Москва, ООО «Азбука»
7. Потенциал, 2005 г.
8. Типовые варианты экзаменационных заданий. Под редакцией И. В. Ященко, 50 вариантов. 2021г, стр. 204.

Продолжение следует: Часть вторая – Неравенства, содержащие логарифм с переменным основанием

Занимательные истории из жизни физиков

«День, наверное, на второй, стенографист подошел ко мне и спросил: «Чем Вы занимаетесь? Вы, конечно же, не профессор». — Я как раз профессор. — Чего? — Физики — науки. — О! Так вот в чем, должно быть, причина, — сказал он. — Причина чего? Он сказал: «Видите ли, я — стенографист и печатаю все, о чем здесь говорят. Когда говорят все остальные, я печатаю все, что они говорят, не понимая ни слова. Но каждый раз, когда встаете Вы, чтобы задать вопрос или что-то сказать, я понимаю все, что Вы имеете в виду — в чем суть вопроса или что Вы говорите — поэтому я и подумал, что Вы просто не можете быть профессором!»

Ричард Филлипс Фейнман — американский учёный. Основные достижения относятся к области теоретической физики. Один из создателей квантовой электродинамики.