

Чивилёв Виктор Иванович
к.ф.-м.н., доцент кафедры общей физики МФТИ, заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета ЗФТШ при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Закон электромагнитной индукции в современной формулировке связывает ЭДС индукции в контуре и скорость изменения магнитного потока. Есть ещё одна запись закона электромагнитной индукции, форма которой предложена Фарадеем. В ней связаны изменение магнитного потока, прошедший заряд и сопротивление контура. Фарадей нашёл универсальную закономерность, не зависящую от условий проведения опыта. Есть ряд задач для школьников, в которых фактически требуется вывести эту универсальную закономерность для конкретного эксперимента. Часто приводится приближённое и сомнительное решение, но с правильным ответом. Для прояснения ситуации и служит эта небольшая статья, в конце которой решены типичные задачи.

1. Открытие Фарадея

М. Фарадей из своих опытов заключил, что величина заряда q, прошедшего по цепи пропорциональна изменению магнитного потока $\Delta\Phi$, пронизывающего соответствующий контур, и обратно пропорциональна сопротивлению цепи R:

$$q \sim \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Это соотношение представляет закон электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем.

2. Приближённый вывод закона электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Дадим приближённый вывод, который достаточно распространён и известен.

Пусть проводящий контур, полное сопротивление которого R, находится во внешнем магнитном поле. Контур может



представлять собой отдельный виток или катушку, концы которой замкнуты через резистор. Пусть за некоторое время магнитный поток через контур изменился на $\Delta\Phi$. Найдём заряд, протёкший по контуру (через произвольное поперечное сечение контура) за время опыта.

В течение опыта ЭДС индукции в контуре $\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, ток в контуре $I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$.

Протёкший заряд $q = I\Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}$. Итак, получили, что при изменении магнитного потока через контур на $\Delta\Phi$ в контуре с сопротивлением R протекает заряд

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad (1)$$

К этому выводу, да и к самой постановке задачи можно предъявить претензии и задать немало вопросов. Читатель, встречавшийся с формулой (1) при решении конкретных задач, мог задать ряд вопросов самому себе, другим или получить вопросы от кого-либо.

Перечислим возможные вопросы.

1) Изменение потока $\Delta\Phi$ есть изменение потока внешнего поля, собственного (созданного собственным током) или это изменение суммарного потока?
2) Как влияет на ответ индуктивность контура?
3) Время опыта Δt мало или необязательно?
4) Какой момент считать концом опыта?
5) ЭДС индукции и ток в цепи в течение опыта постоянны (как предполагалось неявно в приближённом выводе) или нет?
6) Какой смысл знака «минус» в выражении для заряда q?

При отсутствии ответа на эти вопросы может сложиться впечатление, что физика – наука туманная и расплывчатая и её нельзя причислять к точным наукам.

Для ответа на поставленные вопросы уточним формулировку задачи и приведём строгий вывод (1).

3. Строгий вывод закона электромагнитной индукции в форме, найденной Фарадеем

Формулировка задачи. *Проводящий контур, полное сопротивление которого R, находится во внешнем магнитном поле. В течение некоторого времени (времени опыта) суммарный магнитный поток внешнего и собственного полей изменился на $\Delta\Phi$. Найти заряд, протёкший через контур за время опыта.*

Дадим пояснения к формулировке. Проводящий контур – это отдельный виток произвольной формы или катушка индуктивности. Время опыта необязательно мало и есть произвольный интервал времени в некотором эксперименте. Внешнее магнитное поле, ток в контуре, индуктивность контура могут изменяться по разным причинам до, во время и после опыта. Поэтому за время опыта изменяется как магнитный поток от внешнего поля, так и магнитный поток от собственного поля контура. Суммарный поток изменяется на $\Delta\Phi$. При этом скорость изменения магнитного потока (суммарного) не обязательно постоянна, не постоянны ЭДС и ток в контуре во время опыта. Ток в начале и в конце опыта необязательно нулевой, так как опыт может быть составной частью более длительного эксперимента.

Решение. Разобьём время опыта на сколь угодно малые интервалы $\Delta t_к$. Пусть за время $\Delta t_к$ суммарный магнитный поток от внешнего и собственного полей изменился на $\Delta\Phi_к$. ЭДС индукции в контуре $\mathscr{E}_к = -\frac{\Delta\Phi_к}{\Delta t_к}$. Здесь $\frac{\Delta\Phi_к}{\Delta t_к}$ при $\Delta t_к \to 0$ есть производная магнитного потока по времени, обозначаемая часто через Φ' или $\frac{d\Phi}{dt}$. Поэтому записанное выражение для $\mathscr{E}_к$ даёт мгновенное значение ЭДС и в этом смысле это выражение правильное и строгое. По закону Ома ток в контуре в течение $\Delta t_к$ равен $I_к = \frac{\mathscr{E}_к}{R} = -\frac{\Delta\Phi_к}{R\Delta t_к}$. Переносимый заряд за это время

$$\Delta q_к = I_к \Delta t_к = -\frac{\Delta\Phi_к}{R}.$$

Сложим равенства такого вида для всех $\Delta t_к$:

$$\Sigma\Delta q_к = -\frac{\Sigma\Delta\Phi_к}{R}.$$

Здесь $\Sigma\Delta q_к = q$ – протёкший за время опыта заряд, $\Sigma\Delta\Phi_к = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ –

изменение суммарного магнитного потока через контур, Φ_1 и Φ_2 начальный и конечный суммарные потоки. Получаем, что *за время произвольного изменения суммарного магнитного потока внешнего и собственного полей на $\Delta\Phi$ в проводящем контуре с сопротивлением R проходит заряд*

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad (1')$$

Результат совпал с полученной приближённо формулой (1).

На ряд поставленных выше вопросов ответы уже получены при разъяснении формулировки задачи и в процессе решения.

Разберёмся с влиянием индуктивности контура и найдём где она «запрятана» в (1′). Изменение суммарного потока равно сумме изменений внешнего и собственного потоков:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{внешн} + \Delta\Phi_{соб}.$$

Здесь $\Delta\Phi_{соб} = \Delta(LI) = L_2I_2 - L_1I_1$, где L_2 и L_1 – индуктивности контура в конце и в начале опыта, I_2 и I_1 токи в контуре в конце и в начале опыта. Теперь (1′) принимает вид

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + \Delta(LI)}{R} = -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + (L_2I_2 - L_1I_1)}{R}.$$

Если конечная и начальная индуктивности одинаковы и равны L, например, индуктивность остаётся постоянной во время опыта, то

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + L\Delta I}{R} = -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + L(I_2 - I_1)}{R}.$$

Если при $L_1 = L_2 = L$ конечный и начальный токи оказываются равными, например, оба нулевые, то индуктивность «выпадает» из окончательной формулы:

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{внешн}}{R}.$$

Это не означает, что индуктивностью пренебрегают. Просто она не влияет на окончательный ответ.

Осталось сказать о знаке «минус» в (1′). Этот вопрос связан с правилом знаков для магнитного потока, ЭДС индукции, тока в контуре. Все эти величины считаются алгебраическими, т.е. могут принимать положительные и отрицательные значения. Это отдельный вопрос и поясним его поэтому на частном случае контура в виде небольшого плоского витка. Из двух векторов единичной нормали к плоскости витка выбирается какой-нибудь один, назовём его $\vec{n}$, причём $|\vec{n}| = 1$. Магнитный поток через виток $\Phi = \vec{B}\vec{n}S = BS\cos\alpha$, где S – площадь витка, α – угол между вектором индукции $\vec{B}$ магнитного поля и $\vec{n}$. Из этого определения потока следует, что Φ может быть как положительным, так и отрицательным (при $90^0 < \alpha < 180^0$). С вектором нормали связывают положительное направление обхода контура правилом буравчика (правого винта). Если ток идёт в положительном направлении обхода контура, то он считается положительным, в противном случае – отрицательным. Аналогично с ЭДС индукции. Интересно, что формула для собственного магнитного потока $\Phi_{соб} = LI$ удовлетворяет этому правилу знаков. Отрицательный знак в (1′) означает, что заряд протёк так, что индукционный ток и $\Delta\Phi$ оказались противоположного знака.

4. Задачи

Разберём наиболее типичные задачи, иллюстрирующие применение формулы (1′).

Задача 1. *Перпендикулярно плоскости проводящего кольца радиусом $r = 2$ см и сопротивлением $R = 1$ Ом направлено однородное магнитное поле с индукцией $B_1 = 8$ мТл. Индукция магнитного поля в течение некоторого времени уменьшилась до $B_2 = 2$ мТл. Найти заряд, протёкший по кольцу за это время.*

Решение. При решении задачи нужно вывести формулу (1′), а затем воспользоваться ею. Начальный поток Φ_1 внешнего поля удобно взять положительным, поэтому сонаправим вектор нормали $\vec{n}$ с вектором $\vec{B}_1$ (рис.1). Изменением собственного магнитного потока можно пренебречь по сравнению с изменением внешнего потока из-за

малой индуктивности кольца (даже если в конце опыта ток продолжает течь из-за продолжающегося изменения внешнего поля). Итак, изменение потока

$\Delta\Phi = \pi r^2 (B_2 - B_1)$, протёкший заряд

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\pi r^2 \left(B_1 - B_2\right)}{R} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-6}\ Кл.$$

Положительность заряда означает, что он прошёл в положительном направлении обхода контура, показанном на рис.1. Следует отметить, что направление прохождения заряда (тока) можно найти и по правилу Ленца.

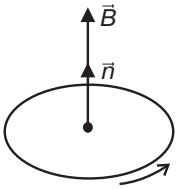


Рис. 1

Задача 2. *Катушка из W витков, площадь каждого из которых равна S, присоединена к баллистическому гальванометру (баллистический гальванометр измеряет прошедший через него заряд). Сопротивление всей цепи R. Вначале катушка находилась между полюсами магнита в области, где магнитная индукция $\vec{B}$ постоянна по модулю и направлена перпендикулярно виткам катушки. Затем катушку переместили в пространство, где магнитное поле отсутствует. Чему равен заряд q, прошедший через гальванометр?* (Мякишев Г.Я. и др. Физика: Электродинамика. М.: Дрофа, 1998. Упражнение 9, задача 1).

Решение. Будем считать, что составная часть решения задачи – вывод (1′) – уже выполнена. В процессе переноса катушки внешний магнитный поток через катушку изменялся (и не обязательно равномерно). Это привело к появлению ЭДС индукции и индукционного тока в катушке, замкнутой на гальванометр. Изменяющийся ток при неизменной индуктивности вызвал появление ЭДС самоиндукции. Разделить эти ЭДС можно только условно. В конце перемещения катушки по ней может идти ток, который не исчезает мгновенно (аналог инерции в механике). Но через некоторое время ток перестаёт течь (затухает). В этой задаче неявным образом под временем окончания опыта подразумевается не момент окончания движения катушки, а момент, когда ток перестаёт течь. Итак, начальный I_1 и конечный I_2 токи в опыте можно считать нулевыми. Поэтому изменение собственного потока при постоянной индуктивности

$$\Delta\Phi_{соб} = L\left(I_2 - I_1\right) = 0.$$

Изменение внешнего потока

$$\Delta\Phi_{внешн} = 0 - BSW = -BSW.$$

Отметим, что при подсчёте потока нормаль к каждому витку катушки мы сонаправили с полем и начальный поток внешнего поля получился положительным и равным BSW. Направление нормали задало положительное направление обхода витков катушки.

Итак, изменение суммарного потока за время опыта

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{внешн} + \Delta\Phi_{соб} = \Delta\Phi_{внешн} = -BSW.$$

Заряд, протёкший в цепи (и через гальванометр тоже):

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{BSW}{R} > 0.$$

Прошедший заряд q получился положительным. Это означает, что он прошёл в положительном направлении обхода витков катушки.

Обратим внимание, что индуктивностью катушки мы не пренебрегали, индуктивность «выпала» не из-за её малости, а из-за того, что начальный и конечный токи в опыте равны нулю.

Задача 3. *Катушка сопротивлением R = 40 Ом и индуктивностью L = 0,01 Гн замкнута накоротко и находится во внешнем магнитном поле (рис.2). Начиная с определённого момента внешнее поле начинает изменяться. В результате за некоторое время магнитный поток внешнего поля через катушку возрос на 0,002 Вб, а ток достиг значения 0,08 А. Какой заряд прошёл за это* время *по катушке?*

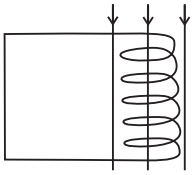


Рис. 2

Решение. Изменяющееся внешнее поле вызывает в катушке ЭДС индукции, в результате чего возникает изменяющийся со временем ток, являющийся причиной появления ЭДС самоиндукции. Свяжем направление нормали к виткам катушки и положительное направление обхода витков правилом буравчика. Этим будет задаваться связь между знаками магнитного потока, тока и обеих ЭДС в контуре. Если направление нормали к виткам катушки выбрать таким, чтобы было изменение внешнего потока положительным, т.е. $\Delta\Phi_{внешн} = 0{,}002$ *Вб*, то значение конечного тока I_2 надо взять отрицательным, т.е. $I_2 = -0{,}08$ *А*. Это следует из правила Ленца: знак индукционного тока должен быть противоположен знаку изменения магнитного потока, вызвавшего этот ток.

Будем считать, что формула (1′) уже выведена в процессе решения этой задачи. Изменение суммарного потока

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{внешн} + \Delta\Phi_{соб},$$

где $\Delta\Phi_{внешн} = 0{,}002$ *Вб*, $\Delta\Phi_{соб} = L(I_2 - I_1)$. Начальный ток $I_1 = 0$, $I_2 = -0{,}08$ *А*. Протёкший по катушке заряд

$$q = -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + \Delta\Phi_{соб}}{R} =$$

$$= -\frac{\Delta\Phi_{внешн} + L(I_2 - I_1)}{R} = -3 \cdot 10^{-5}\ Кл\ .$$

Отрицательный знак заряда означает, что он прошёл в отрицательном направлении обхода витков катушки.

ОДНАЖДЫ НА ЛЕКЦИИ

- Вот гиря, вот селедка… А где торсионные силы?
- Дж. Бруно развивал идеи Коперника, за что Коперника сожгли.
- Чем более силен электрон, тем ему более плевать на существование потенциальной ямы. А слабый электрон на столько дохл, что ему там так трудно! Он стонет, плачет!
- Нелинейность уравнения Навье-Стокса является основной трудностью гидродинамики, не считая отсутствия денег.
- Если карандаш поставить точно вертикально и точно с нулевой скоростью, то он будет находиться в таком состоянии вечно, можете проэкспериментировать.
- Всего три буквы, благодаря которым летают все спутники и космические корабли. Они определили законы небесной механики
- Тепловая энергия — это бардак.
- Ньютон любил называть вещи своими именами. Так появились кольца Ньютона, зрительная труба Ньютона, формула Ньютона-Лейбница и много других замечательных названий.