Физика вокруг нас



Илья Файвильевич Гинзбург
Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН.

Верёвка в туристском походе

1. Введение

Решив недавно одну задачу, связанную с моим увлечением – сплавом по горным рекам, я понял, что это – модель настоящей научной работы, которая полностью доступна школьникам. Надеюсь, что этот пример будет интересен и учителям.

Я попробую восстановить ход решения, начиная с постановки вопроса и мотивов, вызвавших мой интерес, и до описания результатов для «потребителя», которым является турист, знакомый с физикой в объёме забытого курса средней школы.

Как мы плаваем

По горным рекам большинство туристов плавает на плотах или катамаранах с надувными элементами – специально склеенными гондолами из прорезиненной ткани – или автомобильными камерами (иногда употребляются для плотов). Деревянный или металлический каркас массой до 150-200 кг изготавливается или собирается на месте. Обычно на одного человека приходится не менее 200 л объёма воздуха в гондолах или камерах. Туристы ходят и на байдарках или каяках, грузоподъёмность типичной двухместной байдарки не менее 300 кг. Вес судна с экипажем составляет от 200 до 1200 кГ, а запас плавучести (отношение максимальной подъёмной силы к весу судна с гребцами) не бывает меньше 1,5.

Важным элементом техники является зачаливание судна (швартовка) на быстротоках. Бывает необходимо остановить судно в заданном месте и закрепить его. Для этого используют «чальную» верёвку, один конец которой закреплён на судне, а другой выносится на берег членом экипажа или подаётся человеку на берегу. Здесь применяют стандартные альпинистские верёвки или парашютные стропы.

Немного истории

В одном из туристских альманахов я увидел статью «О пределах применимости верёвки в водном туризме». По расчётам её автора, безопасно зачалить среднее туристское судно с помощью верёвки диаметром 10 мм можно лишь при скорости течения не более 1,5-2 м/с. А мы уверенно чалимся на скорости 3-4 м/с, используя верёвку диаметром 6-8 мм. Мне стало ясно, что в расчётах статьи содержится ошибка. Казалось бы – бог с ней. Пусть тот, кто поверит автору, берёт более толстую верёвку (запас карман не тянет). Но: более толстая веревка – менее гибкая, и работать с ней не очень удобно, т.е. при её использовании труднее обеспечить безопасность; таскать такую верёвку тяжело; из таких расчётов могли

проистечь и ошибочные административные решения чиновников от туризма, а им нельзя было давать дорогу; наконец, упомянутая статья имеет «очень научный» вид – автор считал на ЭВМ, и его результаты неискушённому читателю кажутся точными.

Для меня неприемлемы оба возможных вывода: «все ваши науки врут» и «что делать, надо брать более тяжёлую верёвку». Поэтому я решил сделать правильные расчёты. Заодно, может быть, удастся получить какой-нибудь полезный результат.

О постановке задачи

Сформулируем теперь нашу задачу: необходимо остановить в потоке судно массой M с помощью верёвки длины L_0 и сечения $S_0 = \pi d^2/4$, где d – диаметр верёвки). При какой наибольшей скорости течения это возможно?

Важный вспомогательный вопрос – о необходимой точности расчётов. По-видимому, их можно делать довольно грубо, а значит – просто. Если удастся использовать простые наглядные вычисления, обойдясь без второстепенных «уточняющих» деталей, то надёжность результатов возрастёт. Нестандартность изготовления верёвки, небольшие неоднородности по длине (микронадрезы), наконец, изменение свойств верёвки при хранении (старение) приводят к разбросу свойств верёвки, который никак не меньше 15-20%. Ясно, что считать с большей точностью не имеет смысла. И мы увидим, что при такой точности расчёт становится совсем простым.

2. Верёвка

При сравнительно небольших усилиях F имеет место закон Гука – удлинение верёвки ΔL пропорционально F:

$$F = k\Delta L = E\frac{S_0}{L_0}\Delta L = ES_0\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{F}{E \cdot S_0}\left(\varepsilon = \Delta L/L_0\right). \qquad (1)$$

Здесь E – модуль упругости (зависящий от материала и способа плетения верёвки), а ε – относительное удлинение верёвки.

Соответственно потенциальная энергия деформации растянутой верёвки –

$$W = k\left(\Delta L\right)^2/2 = ES_0L_0\varepsilon^2/2 = wL_0;$$

$$w = ES_0\varepsilon^2/2 = F\varepsilon/2. \qquad (2)$$

Эта энергия пропорциональна длине веревки[1] L_0. Поэтому мы ввели здесь новое полезное понятие – энергию единицы длины веревки $w = W/L_0$.

При больших усилиях линейная зависимость ε от F нарушается – с ростом силы удлинение начинает расти быстрее, чем по закону (1). Когда натяжение превышает некоторое значение F_{max}, верёвка рвётся. Типичная нагрузочная характеристика верёвки (зависимость её натяжения от относительного удлинения) описывается кривой на рис. 1. Величины F_{max} и ε_{max}, так же, как и точный вид нагрузочной характеристики, можно найти в специальных справочниках.

Максимальная энергия деформации, приходящаяся на единицу длины верёвки w_{max}, описывается площадью под кривой на рис. 1.

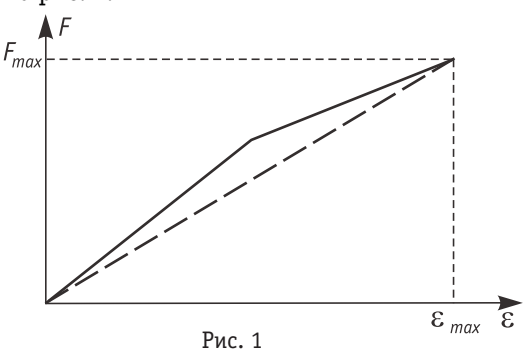

Рис. 1

[1] При заданном относительном удлинении ε величины F и w пропорциональны S_0. Поэтому можно ввести ещё понятия «напряжения» $F/S_0 = E\varepsilon$ и объёмной плотности энергии $w/S_0 = E\varepsilon^2/2$.

Верёвка при страховке на скалах

Рассказанного уже достаточно, чтобы обсудить совсем другой вопрос из туристской и альпинистской практики – об использовании верёвки для страховки и самостраховки при скалолазании. Полученный вывод мы используем и в нашей задаче.

Обычно при лазании по скалам вверх идёт связка из двух человек. Первый идёт вверх на **основной** верёвке, которая должна удержать его в случае падения. Второй (страхующий) фиксирует другой конец верёвки через какой-нибудь выступ скалы или специальный скальный крюк, следя за тем, чтобы верёвка между точкой фиксации и идущим не натягивалась и не провисала (чтобы избежать излишнего полёта при срыве идущего). Дополнительно он должен немного протравить верёвку в случае срыва (отпускать её с усилием, чтобы смягчить удар).

Страхующий не должен отвлекаться на заботу о собственном равновесии. Поэтому при работе на крутых скалах он должен сам встать на самостраховку, т.е. привязаться коротким *страховочным* концом к другому выступу или крюку.

Многие считают, что страхующий находится в значительно более безопасных условиях, чем идущий, и потому страховочный конец может быть выполнен из верёвки меньшего сечения (и прочности), чем основная. Оказалось, что такой подход приводил к нередким срывам, кончавшимся гибелью страхующего.

Чтобы понять причину этого, рассмотрим упрощённый случай, когда скала вертикальная и спортсмен массы M (идущий или страхующий) находится над точкой страховки на высоте H. Пусть также верёвка «почти натянута» так, что спортсмен падает на полную длину верёвки, т.е. на высоту $2H$. Тогда кинетическая энергия падающего к моменту его остановки верёвкой совпадает с изменением его потенциальной энергии $Mg\cdot 2H$. Эта энергия должна перейти в энергию растянутой верёвки $W = w\cdot H$. Таким образом, верёвка не разорвётся, если только имеет место неравенство: $w_{\max} > Mg\left(2+\varepsilon_{\max}\right)$. (Последнее слагаемое в скобках учитывает дополнительную энергию падения при удлинении верёвки.) Очень важно, что высота H выпала из ответа, т.е. результат один и тот же и для идущего и для страхующего. Это показывает, что ***страховочный конец должен быть не слабее основной верёвки.***

На самом деле, ситуация для страхующего даже хуже. Действительно, если страховка грамотная, то при срыве идущего страхующий немного протравливает основную верёвку через выступ или крюк так, что часть кинетической энергии падающего уходит на трение. Для страхующего этого не сделает никто.

Определение $w_{\max}$

Приближённое вычисление

Теперь нам нужно определить $w_{\max}$ (она описывается площадью под кривой на рис.1), в то время как в таблицах можно найти только $F_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$. Обычно это делают численно (нередко на ЭВМ). Посмотрим, нельзя ли упростить расчёт, учитывая, что мы не претендуем на точность лучше $15\div 20\%$, и допуская ошибки в сторону занижения $w_{\max}$ (ведь нас интересует безопасность!).

Грубое (и как мы увидим, вполне удовлетворительное) приближение даёт замена нагрузочной характеристики прямой, проходящей через начало координат и точку $(F_{\max},\ \varepsilon_{\max})$. Соответствующее среднее значение E есть $E_{cp} = F_{\max}/\left(S_0\varepsilon_{\max}\right)$.

При этом для предельной энергии единицы длины верёвки вместо $w_{\max}$ получается заниженное значение $\overline{w}$ – площадь под пунктирной прямой:

$$\overline{w} = E_{cp}S_0\varepsilon_{\max}^2/2 = F_{\max}\varepsilon_{\max}/2. \qquad (3)$$

На сколько же истинное значение $w_{\max}$ больше, чем $\overline{w}$?

Рассмотрим сначала значительно лучшее приближение для нагрузочной характеристики – ломаную на рис. 1, которая приходит в точку ($\varepsilon_{max}, F_{max}$), меняя свой наклон вдвое посередине: при удлинениях $\varepsilon < \varepsilon_{max}/2$ имеет место закон Гука (1) с некоторым модулем упругости E, а при бóльших удлинениях – тот же закон Гука, но с модулем упругости $E/2$, т.е. $F_{max} = \frac{E\varepsilon_{max}S_0}{2} + \left(\frac{E}{2}\right)\frac{\varepsilon_{max}S_0}{2}$. Поэтому введённая величина $E = 4E_{ср}/3$. В такой модели энергия единицы длины верёвки, растянутой до удлинения ε_{max}, вычисляется как площадь под ломаной и равна

$$\overline{w} = \frac{1}{2}ES_0\left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{E}{2}S_0\left(\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)^2 + \left(ES_0\frac{\varepsilon_{max}}{2}\right)\frac{\varepsilon_{max}}{2} =$$

$$= \frac{7}{16}ES_0\varepsilon_{max}^2 = \frac{7}{12}E_{ср}S_0\varepsilon_{max}^2 \equiv \overline{w} = \frac{7}{6}\overline{w} \approx 1{,}17\overline{w}.$$

Далее, из рисунка видно, что разница между энергиями единицы длины верёвки для истинной нагрузочной кривой и для модели ломаной меньше, чем разница для моделей «прямая» и «ломаная». А поскольку последнее различие – в пределах заявленной нами погрешности, мы можем использовать для оценок вместо истинного значения w величину $\overline{w}$, которая меньше w.

Результаты для типичных верёвок

Для хорошей альпинистской верёвки должно быть $\varepsilon_{max} = 0{,}25 \div 0{,}3$. К сожалению, отечественная верёвка даёт меньшие значения. Я принял $\varepsilon_{max} = 0{,}15$. Это немного меньше, чем дают прямые измерения, известные мне. Приведём также известное из опыта значение F_{max} и величину w_{max}, вычисленную по формуле (3) (всё – для верёвки диаметром 10 мм):

$$F_{max} = 12000Н \pm (10-15)\%,$$

$$w_{max} = 900Дж/м \pm (20-25)\%. \quad (4)$$

Формулы (1) и (3) позволяют пересчитать эти цифры для других верёвок. (Ну а для туристов из этих вычислений можно сообщить только минимум, зато надо дать таблицу значений F_{max} и w_{max} для основных используемых верёвок.)

Как измерить F_{max} и w_{max}

Но тут же передо мной встал следующий вопрос: а если кто-то использует другую верёвку или хочет более точных цифр? Надо предложить простые способы измерения F_{max} и w_{max}. Простой способ измерения w_{max} основан на понимании, которое возникло при обсуждении скальной страховки. К сожалению, столь же доступного способа измерения F_{max} мне придумать не удалось.

Рецепт измерения w_{max}: Возьмите короткий кусок верёвки длиной L. Жестко закрепите один конец верёвки, привяжите к другому концу груз, поднимите его вертикально вверх (насколько можно), а затем предоставьте грузу свободно падать. Повторяйте опыт, понемногу увеличивая массу груза. Если верёвка порвалась при массе груза m, то $w_{max} = 2mg(1 + a/L)$ Дж/м, где a – расстояние от точки закрепления верёвки на грузе до его центра тяжести. (До разрыва центр тяжести опустится на $2(L+a)$, т.е. потенциальная энергия уменьшится на $2mg(L+a)$. Эта энергия перейдёт в энергию растянутой верёвки $w_{max}L$. Приравнивая энергии, получим приведённый результат [2]).

Рецепт измерения F_{max}: Закрепите один конец короткого куска верёвки, а нагрузку на втором плавно увеличивайте с помощью автомобиля или лебёдки. Если у Вас есть динамометр, рассчитанный на усилия в тысячи ньютонов, вы можете с его помощью определить разрывное уси-

[2] Здесь не учтена добавка к изменению потенциальной энергии, связанная с удлинением верёвки, $mg \cdot \Delta L = mgL\varepsilon_{max}$. Поэтому полученное значение w_{max} на 7-10% меньше истинного.

лие F_p. Если такого динамометра нет, используйте лебёдку, к рукоятке которой подвешен груз. Увеличивайте груз, пока при некотором значении m_p не произойдет разрыв. Тогда $F_p = m_p gH/r$, где H – расстояние от оси лебёдки до груза, а r – радиус барабана лебёдки. С учётом необходимости неоднократного использования верёвки следует принять $F_{\max} \sim 0{,}9F_p$.

3. Судно

Силу сопротивления воды, действующую на судно, можно записать в виде $F_c = \beta\rho S u^2$, где u – скорость воды относительно судна, ρ – плотность воды, S – площадь сечения погружённой в воду части судна (сечение, перпендикулярное потоку), β – численный коэффициент, зависящий от обводов судна ($\beta \le 0{,}5$). (Зависимость коэффициента β от скорости существенна только на гладкой воде.)

Сначала я делал оценки, используя эту формулу. Но насколько они надежны? Ведь и коэффициент β, и площадь S известны очень плохо. И тогда я сообразил, что эти два параметра можно объединить в один (тоже неизвестный) параметр.

Согласно закону Архимеда, масса судна $M = \rho V$, где V – объём погружённой в воду части судна, приблизительно равный произведению S на длину судна по ватерлинии L. Эффективной длиной судна l я назвал величину L/β. Тогда

$$F_c = Mu^2/l. \qquad (5)$$

Поскольку $\beta \lesssim 0{,}5$ и длина судна L обычно не меньше 4м, то $l \gtrsim 8$ м.

Потом я понял, что l можно измерить. Для этого разгоним судно на стоячей воде до какой-то скорости v_0, а потом отпустим. Дальнейшее его движение под действием силы сопротивления описывается вторым законом Ньютона:

$$Ma = -Mv^2/l.$$

Изменение кинетической энергии судна на пути Δx равно работе силы сопротивления на этом пути, т.е.

$$\Delta\left(\frac{Mv^2}{2}\right) = -\left(\frac{Mv^2}{l}\right)\Delta x \Rightarrow \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{v^2}{l}\Delta x. \qquad (6)$$

Будем искать теперь скорость в зависимости от пройденного пути x (а не от времени). Из уравнения для энергии видно, что отношение v/v_0 зависит только от x/l, т.е. $v/v_0 = f(x/l)$. Аккуратное решение даёт [3]

$$v = v_0 \cdot e^{-x/l} \quad (e \approx 2{,}7). \qquad (7)$$

Таким образом, вот способ измерения l: путь, пройденный судном к тому времени, когда его скорость уменьшится в 2,5-3 раза (точнее в $e \approx 2{,}7$ раз), примерно равен l. Из наблюдений мы хорошо знаем, что такой путь практически для всех судов больше, чем 10 м, т.е. $l \gtrsim 10$ м (как и в первой грубой оценке).

4. Зачаливание судна

Теперь можно перейти к решению основной задачи: *при какой наибольшей скорости течения $v_{\max}$ судно массой M можно остановить с помощью верёвки длины L?*

Рассмотрим сначала самое грубое приближение – пренебрежём сопротивлением воды (мы увидим, что это – хорошее приближение).

В этом случае вся кинетическая энергия судна $Mv^2/2$ переходит в потенциальную энергию натянутой веревки W. Максимальное значение этой энергии

[3] Оно получается, если переписать уравнение (6) в виде $dv/v = -dx/l$.

$W_{max} = w_{max}L$. Таким образом, максимальная скорость, при которой судно можно остановить на быстротоке (без учёта сопротивления потока) определяется из уравнения

$$Mv^2_{max}/2 = w_{max}L \Rightarrow v_{max} = \sqrt{2w_{max}L/M}. \quad (8)$$

При заданном значении w_{max} минимальная длина верёвки должна быть

$$L_{min} = \frac{1}{2}\frac{Mv^2_{max}}{w_{max}}. \quad (9)$$

Оценим теперь роль сопротивления воды. Здесь мы используем простое приближение (1). При этом энергия растянутой верёвки $W = F^2L/2S_0E$ (см. формулы (2). Приравнивая это выражение к кинетической энергии судна, получаем, что при скорости течения $v < v_{max}$, максимальное натяжение верёвки есть

$$F_v = F_{max}(v/v_{max}). \quad (10)$$

Сила сопротивления воды максимальна, когда судно остановилось. При скорости потока v она составляет $F_c = Mv^2/l$. Её отношение к натяжению верёвки F_v с учётом соотношений (2), (8) и (10) можно записать в виде:

$$\frac{F_c}{F_v} = \frac{Mv^2}{lF_v} = \frac{Mv^2}{lF_{max}(v/v_{max})} \cdot \frac{Mv^2_{max}/2}{Mv^2_{max}/2} =$$

$$= \frac{v^2}{l(v/v_{max})} \cdot \frac{2LF_{max}\varepsilon_{max}/2}{v^2_{max}F_{max}} = \gamma \cdot \frac{v}{v_{max}};$$

$$\gamma = \frac{L\varepsilon_{max}}{l}.$$

Таким образом, роль сопротивления воды описывается параметром $\gamma = L\varepsilon_{max}/l$.

Обычно используется верёвка не длиннее 20 м. При $\varepsilon_{max} = 0{,}15$ это даёт полное удлинение верёвки не более 3 м, и при $l \gtrsim 10$ м получается:

$$\gamma \lesssim 1/3.$$

Итак, при скорости течения меньше v_{max} величина F_c не превосходит $F_{max}/3$. Поэтому добавка, обусловленная давлением потока, играет небольшую роль, и предельная скорость близка к v_{max} [4].

Ну а теперь надо дать численные оценки для туристов. Пусть судно необходимо остановить на струе при скорости течения 4м/с=14 км/ч (это большая скорость!). Необходимые параметры для верёвки мы определим из формул (9), (2) и (6). Чтобы создать необходимый запас, мы подставим в формулу (9) несколько бóльшее значение $v_{max} = 5$ м/с. Результаты расчётов для судов разных масс приведены в таблице, где указана (округлённо) минимальная длина чальной верёвки при различных типовых значениях её диаметра. Это, собственно, и есть главный результат.

Масса судна	Диаметр верёвки и её минимальная длина
200 кг	6 мм, 10 м
400 кг	6 мм, 20 м или 8 мм, 10 м
800 кг	8 мм, 20 м или 10 мм, 10 м
1200 кг	10 мм, 20 м

Ещё один вариант зачаливания. Поперечная верёвка

Иногда для остановки судна приходится навешивать верёвку поперёк реки. Конец чальной верёвки с идущего судна с помощью крюка цепляют за эту поперечную верёвку. Её стараются навесить под углом к течению, чтобы судно соскользнуло вдоль неё к берегу, или предусматривает её обрыв с одного берега так, чтобы судно «маятником» пришло к другому берегу.

[4] Соответствующее дифференциальное уравнение удаётся решить только приближённо. Относительная величина поправки к решению без трения меньше, чем $(1{,}5 - 2\ln 2)\gamma \approx 0{,}11\gamma$.

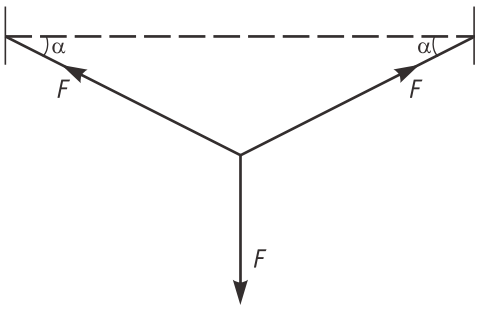

Рис. 2

Если эти варианты реализовать нельзя, верёвку навешивают поперёк течения (рис. 2). При натяжении чальной верёвки натягивается и эта поперечная верёвка. Её натяжение возьмёт на себя часть кинетической энергии судна. Но не приведёт ли это к разрыву поперечной верёвки? Действительно, если натяжение чальной верёвки судна есть F, то натяжение поперечной верёвки $F_n = F/2\sin\alpha$, где α – угол между направлением растянутой поперечной верёвки и её первоначальным направлением.

Длина поперечной верёвки должна быть в $n = 1/\cos\alpha$ раз больше расстояния между точками закрепления. Если угол α меньше 30°, то F_n больше F, т.е. очень туго натянутая верёвка может порваться. При $\alpha = 30°$ величина $n = 2/\sqrt{3} \approx 1{,}15$. Но предельное относительное удлинение $\varepsilon_{max} = 0{,}15$, т.е. если первоначально верёвка не была натянута, её длина в растянутом состоянии составит почти точно нужную величину, а провис под собственной тяжестью создаст необходимый резерв длины (он нужен, например, если судно идёт не по центру верёвки).

5. Некоторые выводы

Обсудим теперь этапы решения задачи как пример выполнения научной работы.

Первый этап – вопрос не очень чётко поставленный. Какой верёвкой можно пользоваться в водном походе?

Второй этап – осмысление ситуации и постановка задачи (с частичным угадыванием ответа): самые тяжёлые условия для верёвки – при зачаливании. Определить, какую верёвку надо использовать при принудительном зачаливании. Сюда же относится предварительная оценка погрешности последующего решения.

Третий этап – собирание и организация сведений; оценка базовых параметров. Мне хватило уже имевшихся знаний. Вообще же на этом этапе могут потребоваться и дополнительные эксперименты. Важным шагом на этом этапе было формальное решение с использованием избытка данных (например, S и β в формуле для силы сопротивления). Это позволило, получив ответ, избавиться от определения большого числа ненужных промежуточных величин, заменяемых одной легко оцениваемой величиной (в нашем случае l).

И только после этого выполняется **четвертый этап** – решение задачи, т.е. получение формул, а затем и чисел. Без чисел, без знания соотношения параметров невозможно понять, правильное ли решение получено, или реальная ситуация определяется совсем другими причинами. Важным является и вопрос, как представить полученные результаты, ибо решение реальной задачи обычно адресуется какому-то «потребителю».

Есть и ещё одна черта разумно решённой задачи – мы получили попутно ещё и решения некоторых задач, о которых не задумывались вначале.

Средняя плотность воды после слива

Туристам «хорошо известно», что после прохождения порога, сразу за сливом, судно «проседает». Дело в том, что в пороге вода перемешивается с воздухом, и после слива пузырьки воздуха уменьшают среднюю плотность воды.

Я знал это утверждение и неоднократно пересказывал его начинающим «сплавщикам». Но однажды мне захотелось большей определённости в этом вопросе, и я попробовал оценить среднюю плотность воды после слива $\rho_{ср}$. Интуиция подсказывала, что в действительности роль пузырьков значительно меньше, чем об этом думают. А если так – достаточно оценить $\rho_{ср}$ снизу, т.е. получить наименьшее значение $\rho_{ср}$, совместимое с наблюдениями. Но какие наблюдения использовать?

Я вспомнил, что обычно после слива в воде действительно видны всплывающие пузырьки, и в то же время при не очень большой глубине камни на дне видны вполне отчётливо (если в воде нет мути). Этого было достаточно, чтобы использовать одну идею, хорошо известную из физики газов и жидкостей.

Будем для простоты считать, что все пузырьки имеют один и тот же радиус r, а их среднее число в единице объёма (1 л) обозначим через n. Тогда их суммарное число в единице объёма есть $\frac{3}{4}\pi r^3 n$, и, пренебрегая массой воздуха, среднюю плотность воды можно считать равной

$$\rho_{ср} = \rho_0\left(1-\frac{4}{3}\pi r^3 n\right),$$

где ρ_0 – плотность «чистой» воды, без пузырьков.

Теперь вернёмся к камням, видимым на дне. Если на пути светового луча, идущего ото дна, встречаются пузырьки, то сквозь них мы не можем увидеть камни чётко – свет рассеивается на пузырьках. Оценим, при какой глубине l на пути светового луча почти наверняка встретится хоть один пузырёк. Выделим на дне участок площадью S и рассмотрим столб воды над ним. Его объём lS; в нём находится $N = nlS$ пузырьков, и они «перекрывают» свету площадь, не бóльшую, чем $S_1 = N\pi r^2 = nlS\pi r^2$. Путь свету полностью «перекрыт», если эта площадь S_1 совпадает с S (мы считаем для простоты, что смотрим почти вертикально вниз и пренебрегаем случайными перекрываниями, учёт которых несущественно меняет ответ). Поэтому наибольшая глубина $l_{\max}$ чёткого видения дна определяется из условия $S_1 = S$, т.е.

$$l_{\max} = 1/\left(n\pi r^2\right).$$

Подставляя это соотношение в выражение для $\rho_{ср}$, получаем

$$\rho_{ср} = \rho_0\left(1-\frac{4}{3}\frac{r}{l_{\max}}\right).$$

Это – ответ. Подставим теперь цифры, чтобы понять, что стоит за этой формулой.

Встречаются два типа сливов. После одних видны довольно крупные пузырьки с $r \lesssim 0{,}5$ см, а глубина ви́дения дна $l_{\max} \gtrsim 0{,}5$ м. После других вода кажется молочно-белой от очень мелких пузырьков с $r \lesssim 0{,}1$ см, а глубина ви́дения дна (точнее – предмета в воде) после таких сливов $l_{\max} \approx 5-10$ см. Подставляя эти цифры в формулу для $\rho_{ср}$, найдём в обоих случаях $\rho_{ср} \gtrsim 0{,}98\,\rho_0 = 0{,}98$ кг/л.

Из формулы для $\rho_{ср}$ видно, что чем меньше размер пузырьков, тем ближе $\rho_{ср}$ к ρ_0. Поэтому с точки зрения поставленной задачи наше предположение об одинако-

вом большом радиусе всех пузырьков вполне разумно.

Итак, для современных туристских судов с большим запасом плавучести отличие $\rho_{ср}$ от ρ_0 несущественно, «фольклорное» утверждение, с которого я начал – о проседании судна после прохождения порога, – несправедливо.

Некоторые выводы

Обсудим теперь то общее, что было в обоих примерах, схему их решения.

Первый этап – вопрос не очень чётко поставленный. (Какова средняя плотность воды после порога? Какой верёвкой можно пользоваться?)

Второй этап – осмысление ситуации и постановка задачи (с частичным угадыванием ответа): показать, что изменение средней плотности воды после порога ничтожно мало; определить, какую верёвку надо использовать при принудительном зачаливании. Сюда же относится предварительная оценка погрешности последующего решения.

Третий этап – собирание и организация сведений; оценка базовых параметров. В наших примерах хватило уже имевшихся у меня знаний. Вообще же на этом этапе могут потребоваться дополнительные, вспомогательные эксперименты. Очень важным шагом на этом этапе было формальное решение с использованием избытка данных (например, S и α в формуле для силы сопротивления). Это позволило, представив ответ, избавиться от определения большого числа ненужных промежуточных величин, заменяемых одной легко оцениваемой величиной (в нашем случае l).

И только после этого выполняется четвёртый этап – решение задачи, т.е. получение формул, а затем и чисел. Без чисел, без знания соотношения параметров невозможно понять, правильное ли решение получено, или реальная ситуация решающим образом определяется совсем другими причинами. Важным является и вопрос о том, как представить полученные результаты, ибо решение реальной задачи обычно адресуется какому-то «потребителю».

