

Олимпиадная школа



Замятнин Михаил Юрьевич
Тьютор лаборатории по работе с одаренными детьми МФТИ, член центральной предметно-методической комиссии по физике, почетный работник общего образования РФ



Вергунов Антон Юрьевич
Преподаватель физики «Физтех-лицея» им. П.Л.Капицы

Учет погрешности на олимпиадах по физике

Часть 2

В статье рассматриваются необходимые и достаточные способы учета погрешности на экспериментальных турах регионального и заключительного этапов Всероссийской олимпиады школьников по физике. Основные положения теории авторы иллюстрируют большим количеством примеров.

Графическая обработка результатов эксперимента

Часто на олимпиадном эксперименте необходимо сначала снять зависимость одной физической величины от других, а затем, обработав ее, получить требуемые результаты. Рассмотрим простейший случай, когда теория предсказывает, что зависимость линейная.

Нахождение углового коэффициента по среднему

Допустим, необходимо найти сопротивление резистора по имеющимся парам значений напряжений и сил тока $U(I)$. После измерения нескольких экспериментальных точек, может возникнуть желание воспользоваться законом Ома $R = U/I$. С его помощью найти сопротивление резистора для каждого измерения, а затем усреднить полученные R_i. К сожалению, при всей кажущейся разумности описанного подхода, он **неудачен** по ряду причин:

1. Применять процедуру усреднения можно при повторении

однотипных измерений. В данном примере значения R_i относятся к **разным** измерениям (изменялись U и I).

2. Не получится проверить линейность зависимости, а, как известно, существуют нелинейные элементы, для которых закон Ома не выполняется.

3. Даже если зависимость линейная, нет гарантии что из-за систематических отклонений она проходит через начало координат. В таком случае потребуется введение поправок.

4. Погрешности измерения отдельных точек (чаще начальных) могут сильно отличаться, а усреднение величин, измеренных с разной точностью – отдельная задача.

5. Среднее значение R_i, пропорционально среднему угловых коэффициентов наклона линий, которые при углах $\alpha > \frac{\pi}{4}$ резко возрастают. В таком случае небольшое «шевеление» экспериментальной точки, особенно если она находится близко к оси ординат, приведет к резкому увеличению вклада этой точки в итоговый результат.

6. Легко пропустить промахи.

Самым простым и верным методом в данном случае является построение графика и проведение наилучшей прямой.

Нахождение углового коэффициента с помощью графика

В физике «хорошая» прямая строится не менее чем по 5, а кривая не менее чем по 11 точкам. По возможности точки должны распределяться равномерно по исследуемому диапазону.

Измерив пары значений $(x_i; y_i)$, изобразим их на графике. Каждая величина обладает погрешностью Δx и Δy. На графиках погрешности принято изображать в виде «крестов» или прямоугольников (при условии, что они видны в масштабе графика).

Далее, для быстрой оценки результатов нужно приложить к точкам линейку так, чтобы кресты всех экспериментальных точек находились как можно ближе к проводимой линии, а по обе стороны оказалось примерно одинаковое количество точек (метод медиан). Очевидно, что удобнее это делать с помощью прозрачной линейки (см. рисунок 1).

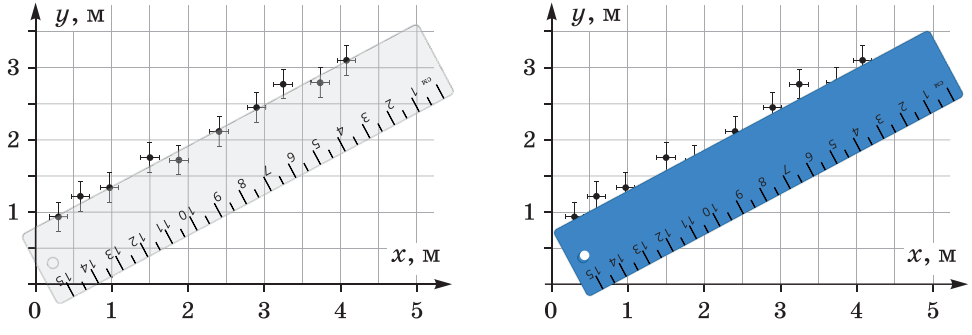


Рис. 1

Построив таким образом «наилучшую» прямую для зависимости $y = kx + b$, можно найти ее параметры: угловой коэффициент k и вертикальное смещение b. Таким же способом можно оценить ошибку определения k и b. Смещая линейку вертикально в пределах крестов погрешностей, оценим погрешность Δb, и, изменяя наклон линейки относительно условного «центра масс» экспериментального графика, получим оценку для погрешности углового коэффициента Δk.

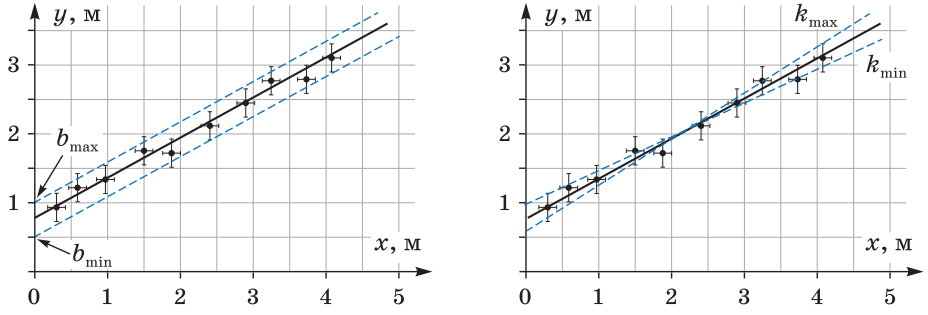


Рис. 2

Оценить погрешности Δb и Δk можно по формулам:

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}; \quad \Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2}.$$

Существуют и более точные аналитические методы подбора параметров (метод наименьших квадратов или метод парных точек). Все они достаточно трудоемки и для олимпиадного эксперимента избыточны.

Нелинейные зависимости

Если теория предсказывает **нелинейную** связь между величинами, то как правило можно сделать **замену переменных** так, чтобы в определенных осях график получился линейным. Такая процедура называется линеаризация.

Таблица 1

Исходная функция	Замена переменных	Новая функция
$y = Ax^n$	$X = x^n$ или $z = \sqrt[n]{y}$	$y = AX$ или $z = \sqrt[n]{A}x$
$y = ax^n + b$	$X = x^n$	$Y = aX + b$
$y = \dfrac{1}{ax^n + b}$	$Y = \dfrac{1}{y}, \quad X = x^n$	$Y = aX + b$
$y = \dfrac{x}{a + bx}$	$Y = \dfrac{1}{y}, \quad X = \dfrac{1}{x}$	$Y = aX + b$
$y = ax^n + bx^m$	$Y = yx^{-m}, \ X = x^{n-m}$	$Y = aX + b$
$y = a\sin x + b\cos x$	$Y = \dfrac{y}{\cos x}, \ X = \operatorname{tg} x$	$Y = aX + b$
$y = Ax^n$	$Y = \ln y, \ X = \ln x, \ a = n, \ b = \ln A$	$Y = aX + b$
$y = Ae^{kx}$	$Y = \ln y, \ b = \ln A$	$Y = kx + b$

Важно помнить, что при переходе к новым переменным необходимо пересчитывать и погрешности. Делать это можно, применяя правила для погрешностей из Части 2. Например, при замене $z = x^n$ погрешности z будут равны $\varepsilon_z = |n| \cdot \varepsilon_x$ и $\Delta z = \varepsilon_z \cdot z$, что скажется на крестах ошибок на графике.

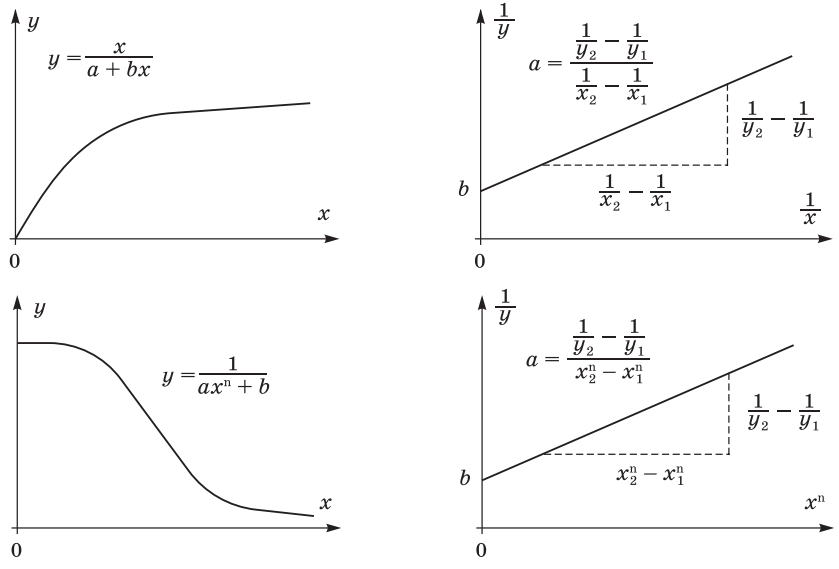


Рис. 3

Из таблицы видно, что линеаризовать зависимость $y = Ax^n$ можно по-разному. Если известна величина n, то есть два способа:

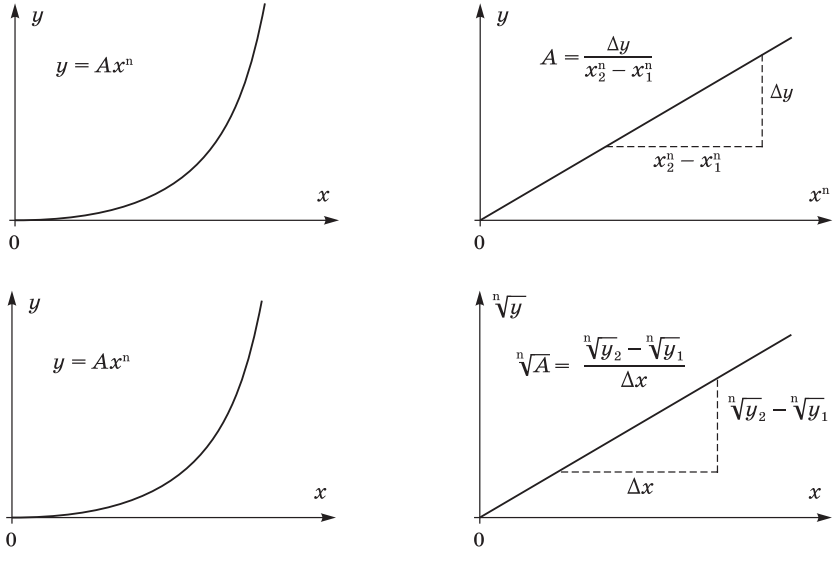


Рис. 4

Если показатель степени n надо найти, то приходится логарифмировать.

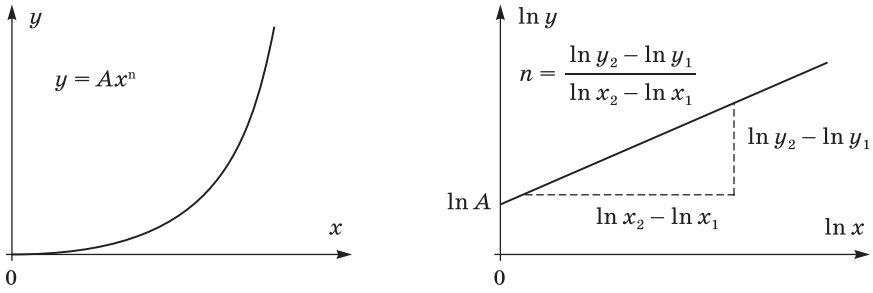


Рис. 5

***) О логарифмировании размерных величин**

Логарифмировать можно **только** безразмерные величины! Не имеет смысла логарифм из 5 кг. Но при формальном логарифмировании уравнения возникают выражения типа $\ln(m)$. Как это понимать?

Говорят, что величины x или y измерены, если известно, сколько раз в x или y содержатся соответствующие им единицы измерений $[x]$ или $[y]$. Это и есть числовые значения $\{x\}$ или $\{y\}$ величин x и y. Иными словами, каждую размерную величину x можно представить в виде произведения числовой части $\{x\}$ и единицы измерения $[x]$. Масса 25 кг – это 25 раз по килограмму: $m = 25$ кг $= \{25\} \cdot$ [кг]

Пример

$y = gt^2/2$. Здесь $y = \{y\} \cdot [y]$, $g = \{9{,}8\} \cdot$ [м/с^2], $t = \{3\} \cdot$ [с].

Тогда мы получим: $y = \{y\} \cdot$ [м] $= \{9{,}8/2\}$[м/с^2] $\cdot \{3\}^2 \cdot$ [с]^2.

Для размерных единиц верно равенство: [м] = [м/с^2] $\cdot$ [с]^2,

а для числовых значений:

$$\{y\} = \{9{,}8/2\}\{3\}^2 = \{44{,}1\}.$$

В рассмотренном примере ($y = Ax^n$) связи между размерными величинами и числовыми значениями определяются уравнениями:

1) $[y] = [A][x]^n$.

2) $\{y\} = \{A\}\{x\}^n$.

Прологарифмируем второе выражение: $\ln\{y\} = \ln\{A\} + n\ln\{x\}$, в которое входят только безразмерные числа! График этой линейной зависимости и следует строить.

Есть три варианта оформления осей в логарифмическом масштабе.

1. Самый очевидный (но не самый удобный вариант) когда по оси с равными делениями откладываются логарифмы численных значений величин. Ось тогда подписывается как **ln*x***, а **единицы измерения не указываются**.

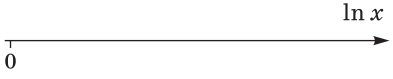


Рис. 6

Такой подход оправдан при построении качественных графиков, но при наличии чисел не всегда легко быстро догадываться какой величине x соответствует $\ln x = 0{,}456$.

2. Чтобы избежать указанных трудностей, договариваются о следующем. На координатной оси реально откладывают логарифмы соответствующих значений аргумента, но штрихи делений оцифровываются значениями аргумента, логарифмы которых откладываются. Координатная ось обозначается соответствующим обозначением данной величины ***x* без указания символа логарифма и указывается размерность** данного аргумента, например, x, мм; f, Гц и т.д.

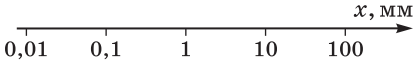


Рис. 7

3. Иногда применяется логарифмическая сетка с делениями, не равными друг другу. Координатная ось обозначается соответствующим обозначением данной величины ***x* без указания символа логарифма и указывается размерность** данного аргумента. Такой вариант используется, если в наличии есть бланк с готовой логарифмической сеткой. На олимпиадах встречается редко (рис. 8).

Касательные к графику и площадь под ним

Для нахождения быстроты изменения одних величин при изменении других необходимо строить касательные к графику в одной или нескольких точках, а затем рассчитывать их угловые коэффициенты наклона.

*) заметим, не *тангенс угла наклона*, а именно *угловой коэффициент наклона*. Это разные понятия. Тангенс – величина безразмерная и зависящая от выбора масштаба по осям графика, а угловой коэффициент имеет размерность скорости изменения величины и сохраняется при изменении масштаба.

Качество построения касательных зависит от точности и аккуратности построения самой экспериментальной кривой. Проведение касательной «на глаз» приводит к неточности определения углового коэффициента k. Абсолютную погрешность Δk можно оценить, изменяя наклон линейки относительно точки касания.

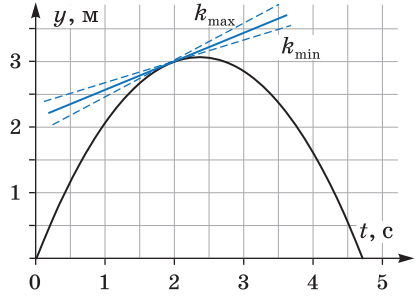


Рис. 9

В примере на рисунке угловой коэффициент «сплошной» касательной пропорционален скорости объекта вдоль оси Oy в момент времени равный $t = 2$ с. Погрешность k определяется угловыми коэффициентами «пунктирных» касательных.

$$k = 0{,}44\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$\Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2} = 0{,}13\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v = (0{,}44 \pm 0{,}13)\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

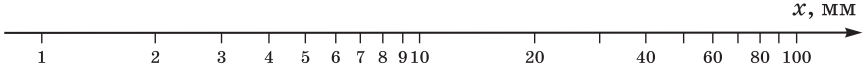


Рис. 8

Часто информативной оказывается площадь под графиком (иногда слева от графика). Для линейных зависимостей ее можно находить просто, рассчитывая по формулам из геометрии для площадей треугольников, прямоугольников или трапеций.

В случае, когда функция нелинейная, ее приходится разбивать на малые участки с последующим суммированием их площадей.

Рассмотрим зависимость проекции скорости от времени $v(t)$. Проекция элементарного перемещения $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ пропорциональна площади вертикального столбика.

*) Тут опять заметим. Площадь не *равна* и не *численно равна*, а **пропорциональна** искомой величине!

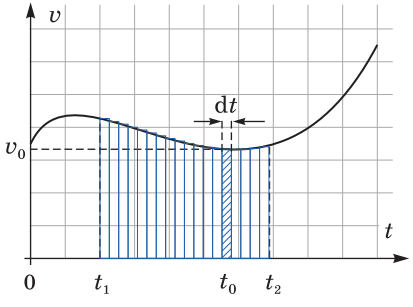


Рис. 10

Полное перемещение можно найти через сумму площадей всех таких столбиков, заключенных между t_1 и t_2.

Расчет площади производится, как правило, так. Сначала находится количество N_0 целых клеток. Затем подсчитывается число N клеток, входящих частично, и оно делится на 2. Абсолютная погрешность полученного числа неполных клеток N оценочно принимается равной $\sqrt{N}$ (N_0 считается точным).

Сумма $N_0 + N/2$ умножается на коэффициент пропорциональности k, устанавливающий соответствие между площадью одной клетки и интересующей нас физической величиной:

$$s = k(N_0 + N/2).$$

Если существенна погрешность величин, отложенных по осям графика, то нужно ее учесть, рассчитав, по правилам нахождения погрешности для произведения:

$$\Delta s = s\varepsilon_s, \text{ где } \varepsilon_s = \varepsilon_v + \varepsilon_t.$$

Чтобы окончательно записать абсолютную погрешность искомой величины, имеет смысл сравнить вклады в нее от величин, отложенных по осям, и от подсчета нецелых клеток. Если один из них окажется существенно меньше, то им можно пренебречь.

Пример

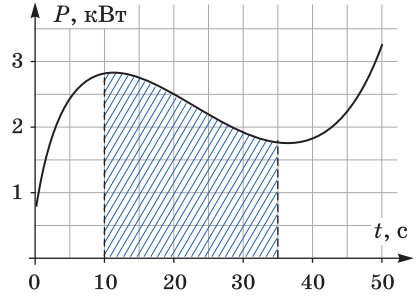


Рис. 11

По экспериментальной зависимости мощности нагревателя от времени $P(t)$ необходимо найти количество теплоты Q, выделившееся за время от 10 с до 35 с. Известно, что относительные погрешности нагревателя и часов равны $\varepsilon_P = 2\%$ и $\varepsilon_t = 1\%$ соответственно.

Количество теплоты Q пропорционально площади под графиком в указанном интервале времени. Для оценки площади посчитаем количество $N_0 = 20$ целых клеток и $N = 6$ нецелых.

$$Q = Q_0(N_0 + N/2).$$

Площадь одной клетки пропорциональна $Q_0 = 0{,}5 \cdot 10^3$ Вт $\cdot$ 5 с = 2,5 кДж, тогда количество теплоты

$$Q = 2{,}5 \cdot 10^3 (20 + 6/2) = 58 \text{ кДж}.$$

Рассчитаем вклады в ΔQ от подсчета клеток и от погрешности величин P и t. Абсолютная погрешность полученного числа неполных клеток пропорциональна погрешности количества теплоты $\Delta Q_1 = Q_0 \cdot \sqrt{N} = 7$ кДж. С другой стороны, погрешность величин, отложенных по осям графика:

$$\Delta Q_2 = Q \cdot \varepsilon_Q = Q \cdot (\varepsilon_P + \varepsilon_t) =$$

$$= 58 \cdot 10^3 \cdot 0{,}03 = 1{,}8 \text{ кДж}.$$

Видно, что в данном примере ΔQ_1 и ΔQ_2 сравнимы, поэтому в качестве абсолютной погрешности ΔQ можно взять их сумму, тогда окончательно:

$$Q = (58 \pm 9) \text{ кДж}.$$

Задания

1. Определите количество значащих цифр в числе

1,2 2,30 0,3 1,00 0,01 23,40 0,234 $0{,}11 \cdot 10^4$

2. Округлите число до двух значащих цифр.

1234 1664 151 150,3 0,0307

3. Запишите в стандартной форме числа из задания 2.

4. Определите относительную погрешность физической величины и приведите запись (если это требуется) к *культурному* виду (таблица 3).

5. Определите абсолютную погрешность величины. Запишите величину в *культурном* виде с учетом погрешности (таблица 4).

Таблица 3

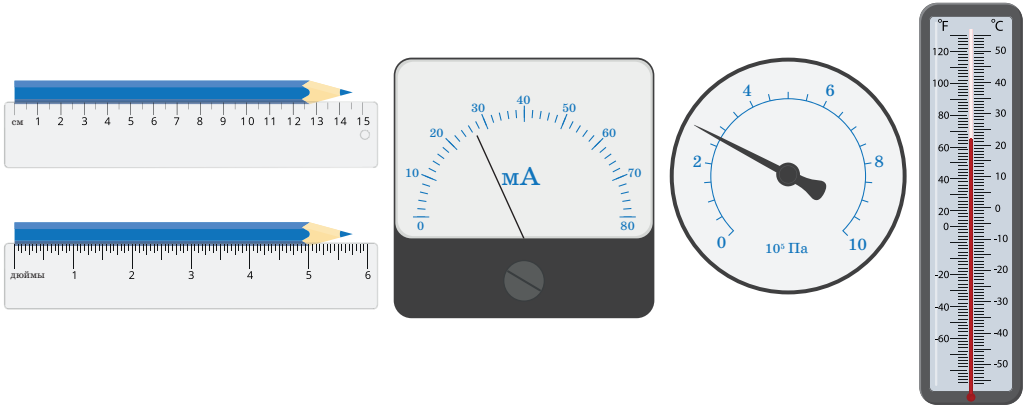
Физическая величина	Культурная запись	Относительная погрешность
$F = (4{,}0 \pm 0{,}35)$ Н	$F =$ $\pm$	$\varepsilon_F =$
$H = (1625 \pm 52)$ мм	$H =$ $\pm$	$\varepsilon_H =$
$U = (9{,}99 \pm 0{,}2)$ В	$U =$ $\pm$	$\varepsilon_U =$
$p = (23{,}45 \cdot 10^3 \pm 2160)$ Па	$p =$ $\pm$	$\varepsilon_P =$
$P = (0{,}983 \pm 0{,}011)$ кВт	$P =$ $\pm$	$\varepsilon_P =$
$t = (120 \pm 5{,}8)$ °C	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$
$t = (0{,}21 \pm 1)$ °C	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$
$t = (-40{,}1 \pm 2)$ °C	$t =$ $\pm$	$\varepsilon_t =$

Таблица 4

Физическая величина	Абсолютная погрешность	Культурная запись
$M = 5{,}6789$ кг ($\varepsilon_M = 5$ %)	$\Delta M =$	$M =$ $\pm$
$I = 0{,}0015$ А ($\varepsilon_I = 12$ %)	$\Delta I =$	$I =$ $\pm$
$t = 20$°C ($\varepsilon_t = 10$ %)	$\Delta t =$	$t =$ $\pm$
$t = 2$°C ($\varepsilon_t = 5$ %)	$\Delta t =$	$t =$ $\pm$
$T = -2{,}08$°C ($\varepsilon_T = 2$ %)	$\Delta T =$	$T =$ $\pm$

6. Запишите в *культурном* виде показания прибора с учетом приборной погрешности

а) Приборная погрешность равна цене деления.



б) Приборная погрешность равна 2 ед. последнего разряда



в) Приборная погрешность равна 2 ед. последнего разряда, но не менее 1%



г) Приборная погрешность равна 0,02 с для каждого интервала (0,1 – 60) с



д) Приборная погрешность равна 2%+2 ед. последнего разряда



7. Обработайте экспериментальные данные, представленные в таблице. Результат запишите в культурном виде.

Шарик диаметром $d = 18$ мм после падения с некоторой высоты пролетает мимо фотоэлемента (время перекрытия датчика фиксируется автоматически). По результатам девяти измерений найдите скорость шарика во время пролета мимо датчика.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, мс	4,2	4,2	4,1	4,0	4,1	4,0	4,1	3,9	3,7
v, м/с									

8. Найдите угловой коэффициент наклона зависимости и силу тока I_0 при $R = 0$. Оцените погрешности найденных значений (рис. 12).

9. В каких осях зависимость величины x от величины y будет линейной? Здесь a и b постоянные величины.

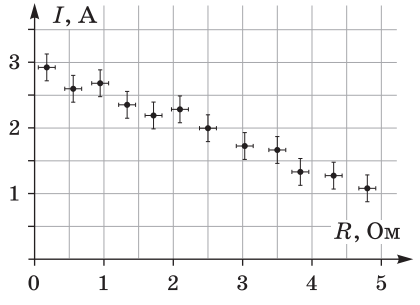


Рис. 12

$$x=\frac{a}{y+b};\quad x=y^2+ay;\quad x=\frac{a+by}{a-by};$$
$$x=\frac{y}{a+by};\quad x=\sqrt{a+by};\quad x=\sqrt{y^2+ay}.$$

10. По известной зависимости работы A от времени t найдите мощность, развиваемую силой, в момент времени 10 с. Оцените погрешность полученного результата.

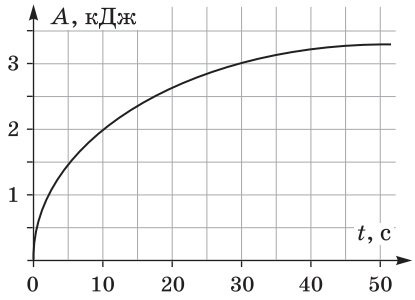


Рис. 13

11. Оцените количество теплоты, подведенное к телу (теплоемкость которого зависит от температуры как показано на графике) при нагревании от 0°C до 40°C. Относительные погрешности теплоемкости и температуры равны $\varepsilon_C = 2\%$ и $\varepsilon_t = 1\%$ соответственно.

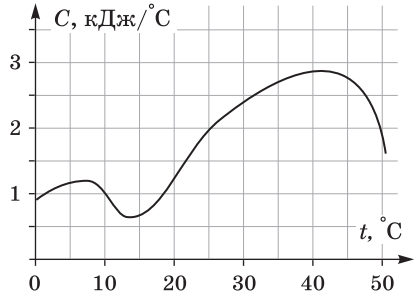


Рис. 14

Новости Новости Новости Новости

Роботы-океанографы отправились изучать Гольфстрим

Американская компания Saildrone отправила три автономных исследовательских судна Explorer изучать Гольфстрим. Они шесть месяцев будут собирать данные о поглощении океаном углекислого газа, чтобы оценить, какую роль в этом процессе играет теплое атлантическое течение.

Гольфстрим влияет на глобальный углеродный бюджет — баланс между поступлениями углекислого газа в атмосферу за счет выбросов от деятельности человека и его расходом в резервуарах углерода на суше или в океане. Добыть данные из зоны теплого течения сложно из-за сильных ветров и штормов. Чтобы заполнить пробелы, исследователи при оценке влияния Гольфстрима на поглощение океаном углекислого газа используют различные статистические методы и модели. Но эти результаты отличаются от тех, что основаны на наблюдениях, примерно на четыре миллиарда тонн углекислого газа.

Американская компания Saildrone в декабре отправила три автономных исследовательских судна Explorer изучать Гольфстрим. За шесть месяцев они должны собрать данные наблюдений, которые позволят дать точную количественную оценку роли теплого течения в поглощении океаном углекислого газа и спрогнозировать его стабильность в будущем.

Explorer — семиметровые суда, работающие от энергии ветра и солнца. Они движутся со средней скоростью до трех узлов и могут провести в открытом океане больше года. На роботах установлены разнообразные сенсоры, включая ASVCO2, который измеряет парциальное давление углекислого газа в атмосфере и на поверхности океана.

Автономные суда уже переплывали Атлантику в обоих направлениях. На нескольких из них установлены «ураганные паруса», уже показавшие свою надежность в миссии по изучению урагана «Сэм».

Источник: https://nplus1.ru/news/2021/12/14/explorer